СПРАВОЧНИК ПО ДИНАМИКЕ СООРУЖЕНИЙ



СПРАВОЧНИК ПО ДИНАМИКЕ СООРУЖЕНИЙ

Под редакцией профессоров
Б. Г. Коренева,
И. М. Рабиновича



Стройиздат 1972

УДК 624.042.8(031)

Справочник по динамике сооружений. Под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. М., Стройиздат, 1972. 511 с.

Справочник содержит материалы по прикладной динамике сооружений, относящиеся к расчету строительных конструкций на динамические воздействия, измерению колебаний и методам борьбы с колебаниями зданий и сооружений. Подробно рассмотрены специальные вопросы: действие динамических нагрузок, динамические характеристики материалов, влияние колебаний на людей и технологические процессы, расчет конструкций на прочность и выносливость, распространение упругих волн, ветровые воздействия, виброизоляция, моделирование, колебания отдельных видов конструкций и др.

Справочник рассчитан на инженеров-проектировщиков, научных работников, аспирантов и студентов.

Табл. 109, ил. 172, список лит.: 457 назв.

Научный редактор — д-р техн. наук *А. И. Цейтлин*

3—2—5
47—72

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проектирование зданий и сооружений на современном этапе невозможно без учета динамических воздействий. Это объясняется многими причинами. Наиболее очевидная — рост динамических нагрузок, вызываемых машинами, кранами и другим оборудованием, широкое применение вибраций, ударов и производственных взрывов, как элементов технологического процесса; строительство гибких висячих сооружений, для которых необходимо учитывать динамическое действие ветра, и др. Повышенное внимание к динамике связано также с развитием точных технологических процессов, требующих снижения уровня вибраций, применением точных измерительных приборов и специального лабораторного оборудования при проведении научных исследований. И, наконец, одна из важнейших технических задач — обеспечить такой уровень вибраций, который допустим с санитарно-гигиенической точки зрения.

Поэтому при проектировании сооружений наряду со статическими необходимо также учитывать динамические воздействия и нагрузки. Попытки ограничиться статическим расчетом и учитывать динамические воздействия некоторыми по существу априорными динамическими коэффициентами уже давно признаны несостоятельными.

Динамика сооружений, закладывающая теоретические основы динамического расчета зданий, получила широкое развитие. Эта область строительной механики представлена огромным числом работ, которые лишь в самой общей форме отражены в обзорной литературе. Практическое применение всего многообразия результатов, естественно, затруднено; очевидно, что одной из причин этого является и многочисленность самих работ. Поэтому возникла острая необходимость в создании таких материалов, которые помогли бы инженеру-проектировщику в проведении динамических расчетов и ориентировали бы его на правильный и целесообразный выбор не только методов расчета, но и, что отнюдь не менее важно, на разумный выбор расчетных схем; эта задача в бо́льшей мере была решена в результате создания ряда инструкций и руководств по динамическому расчету сооружений, которые разрабатывались в ЦНИИСКе им. В. А. Кучеренко. Указанные инструкции существенно упрощают проведение динамических расчетов. Однако они освещают далеко не все возникающие при проектировании вопросы; кроме того, без получения многих справочных данных расчет иногда затрудняется.

Цель настоящего издания — дополнить инструктивную и учебную литературу, дав инженеру-проектировщику справочные данные, необходимые для динамического расчета сооружений.

Справочник содержит разнообразные материалы, относящиеся к динамическому расчету сооружений и методам борьбы с вибрациями. В частности приводятся подробные сведения о динамических свойствах строительных материалов, динамических нагрузках и требованиях, предъявляемых к результатам динамического расчета. Основная часть справочника посвящена

непосредственно вопросам динамического расчета; широко представлены вопросы расчета стержней и стержневых систем, пластинок, оболочек, висячих конструкций. Эти разделы содержат весьма обширный справочный материал. Наряду с этим в справочнике имеются разделы, посвященные инженерным методам расчета — их обоснованию и пояснению. Эти разделы, поясняющие и развивающие материалы, опубликованные в инструкциях, бесспорно будут способствовать правильному пониманию существа основных положений современных инженерных методов расчета. С этих позиций рассмотрены вопросы расчета зданий на действие нагрузок от машин, расчет гибких сооружений на действие ветра, расчет фундаментов под машины, а также расчет сооружений на действие импульсивных нагрузок.

Большое внимание в современной динамике сооружений уделяется вопросам, связанным с разработкой методов борьбы с вибрациями, которые широко представлены в справочнике. Раздел, посвященный линейной теории виброизоляции, имеет четкую инженерную направленность. В перспективе можно ожидать развития нелинейной теории виброизоляции, и этот вопрос также отражен в специальном разделе. Кратко рассмотрены динамические и ударные гасители колебаний, которые применяются еще не очень часто, однако применение гасителей является перспективным и эффективным методом борьбы с вибрациями. Два раздела посвящены вопросам моделирования и методам измерения вибраций, которые дают известное представление об экспериментальных методах изучения колебаний.

Настоящий справочник ориентирован на те проблемы динамики, которые возникают в основном при проектировании обычных промышленных зданий и сооружений. Вопросы динамики гидросооружений, транспортных сооружений (мостов, виадуков и т. д.) не рассматриваются. Не освещены и некоторые весьма важные стороны динамического расчета, относящиеся к учету специальных видов динамических воздействий. К ним относятся в первую очередь расчеты на сейсмические воздействия, такой сравнительно новый вопрос, как расчет сооружений на действие взрывов при взрывоопасных производствах, а также вопросы динамики, имеющие отношение к проблемам противовоздушной обороны.

В справочник не вошел ряд разделов общего характера, необходимых в равной мере как для проведения динамических расчетов, так и расчетов статических, в частности, раздел «математика» и таблицы математических величин; в нем нет раздела «теоретическая механика», несмотря на то, что знание теоретической механики и особенно такого ее раздела как теория малых линейных колебаний являются совершенно необходимыми для читателей. Справочник не включает также вводных разделов динамики сооружений, которые имеются практически во всех начальных курсах этой дисциплины.

Б. Г. Коренев, И. М. Рабинович

РАЗДЕЛ 1

ОЦЕНКА ДОПУСТИМОГО УРОВНЯ КОЛЕБАНИЙ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

(А. М. Сизов)

1.1. Общие положения

Допустимый уровень колебаний конструкций, подвергающихся динамическим воздействиям, определяется: а) физиологическим воздействием колебаний на людей; б) несущей способностью конструкции (прочностью и выносливостью); в) влиянием колебаний на производственный процесс.

Нормирование уровня колебаний представляет сложную проблему. Наиболее полные и обоснованные данные о допустимом уровне колебаний определяются условиями обеспечения несущей способности сооружений. Они могут быть получены в результате динамического расчета конструкций. Менее обоснованными являются данные, определяемые санитарно-гигиеническим характером воздействия колебаний на людей. Наиболее сложно общее обоснование допустимого уровня колебаний в зависимости от условий производства, определяемых точностью обработки изделий, влиянием колебаний на работу контрольно-измерительной аппаратуры, на технологический процесс и т. п.

Критерии допустимости колебаний по несущей способности конструкций и производственным условиям приводятся в разделе 4.

В настоящем разделе основное внимание уделено описанию экспериментальных данных о физиологическом воздействии колебаний на людей, санитарно-гигиеническим нормам вибраций и данным о предельно допустимых динамических прогибах.

Допустимый уровень колебаний строительных конструкций, обусловленный физиологическим воздействием, определяется характером действия колебаний на людей. Превышение некоторого уровня колебаний может оказаться неприятным, вызвать повышенное утомление, снизить производительность труда и даже вызвать вибрационную болезнь.

Различают два способа воздействия колебаний на человека: 1) непосредственное — при колебаниях всего тела или отдельных его частей и 2) косвенное (визуальное) — при колебании отдельных предметов, находящихся в поле зрения.

Возможны три случая непосредственного действия колебаний на человека. При этом колебания называются: а) общими — когда человек находится на колеблющемся основании (на колеблющемся перекрытии, на площадке, на полу, в вагоне движущегося поезда, автомобиле, на эскалаторе и т. п.) и колебания передаются через опорную поверхность всему телу; б) местными — при действии колебаний на отдельные части тела (при работе с виброинструментом, ручными вибраторами, касании колеблющихся элементов машин и т. п.); в) объемными — когда человек находится в вибрирующей (пульсирующей) среде (воздушной, водной) и колебания передаются от среды всей поверхности тела.

При косвенном (визуальном) воздействии колебания оказывают на человека психологическое действие. Например, заметные на глаз колебания связей между фермами покрытия, коробов вентиляции, проводки электроосвещения, светильников, транспарантов и тому подобных предметов, подвешенных к различным конструкциям, воспринимаются обычно неприятно, хотя и действуют только зрительно.

В настоящее время отсутствуют экспериментальные данные о предельных значениях параметров колебаний при косвенном их воздействии. Однако для того, чтобы ограничить колебания предметов, подвешенных и колеблющимся конструкциям (фермам покрытий, перекрытиям), необходимо ограничивать колебания опорных строительных конструкций предельно допустимым динамическим прогибом.

1.2. Допустимый уровень колебаний, определяемый характером физиологического воздействия

Впервые у нас в стране данные о характере восприятия человеком гармонических колебаний (табл. 1.1) были введены в строительные нормы проектирования в 1954 г. Е. С. Сорокиным. Качественная оценка восприятия колебаний, приведенная в инструкции [4], позволила проектировать промышленные сооружения с безопасным для здоровья людей уровнем колебаний. При этом практика проектирования показала, что, как правило, назначались разумные границы допускаемых колебаний («хорошо ощутимые» при продолжительном действии колебаний и «сильно ощутимые» при кратковременных воздействиях), которые в основном получили подтверждение в Санитарных нормах 1959 г. № 280-59 [2]*.

Таблица 1.1

Характеристики воздействия колебаний на людей в зависимости от скорости и ускорения гармонических перемещений с амплитудой не более 1 *мм* (по И 200-54)

Характеристика воздействия колебаний на людей	Предельное ускорение колебаний $w_{макс}$ в *мм/сек*^{2} для частот от 1 до 10 *кол/сек*	Предельная скорость колебаний $v_{макс}$ в *мм/сек* для частот от 10 до 100 *кол/сек*
Неощутимы	10	0,16
Слабо ощутимы	40	0,64
Хорошо ощутимы	125	2
Сильно ощутимы (мешают)	400	6,4
Вредны при длительном воздействии	1000	16
Безусловно вредны	Более 1000	Более 16

Качественные оценки характера воздействия колебаний на людей (табл. 1.1) не утратили своего значения до настоящего времени, поскольку официальные нормативные документы о допустимом уровне колебаний с количественными характеристиками имеются только для промышленных сооружений при действии колебаний на людей в тяжелых производственных условиях.

При расчете строительных конструкций по методике предельных состояний требованием обеспечения необходимых санитарно-гигиенических условий труда определяется второе предельное состояние колеблющейся конструкции (при отсутствии требований, ограничивающих колебания по производственным и технологическим условиям). Как известно, второе предельное состояние характеризуется такими упругими деформациями или перемещениями, при которых конструкция, не достигшая предела несущей способности (первого предельного состояния), перестает отвечать своему назначению и ее эксплуатация должна быть прекращена.

Обозначая амплитуду колебаний строительной конструкции, на которой находятся люди, через z_0, а допускаемую по санитарно-гигиеническим условиям труда амплитуду колебаний через $[a_0]$, получаем условие, обеспечивающее безопасное для здоровья пребывание людей на колеблющейся конструкции,

$$z_0 \leqslant [a_0]. \qquad (1.1)$$

* В связи с утверждением Минздравом СССР 13 мая 1966 г. «Санитарных норм и правил по ограничению вибраций рабочих мест» (№ 627-66) Временные санитарные нормы № 280-59 отменены. С 1 апреля 1972 г. обязательными являются нормы СН 245—71 [10].

Если условие (1.1) не соблюдается, необходимо принять меры по уменьшению колебаний конструкции или исключить возможность пребывания на ней людей. Многочисленные обследования колебаний эксплуатируемых зданий и сооружений, а также расчеты строительных конструкций на прочность показали, что в большинстве случаев требования уменьшения колебаний конструкций, на которых находятся люди, определяются характером физиологического воздействия колебаний, т. е. нарушением условия (1.1), а не влиянием колебаний на прочность.

Обеспечить безопасный для человека уровень колебаний часто бывает труднее, чем создать конструкцию необходимой прочности, рассчитанную на действие динамических нагрузок. Объясняется это тем, что человек чрезвычайно чувствителен к механическим колебаниям. Он способен ощущать весьма малые колебания с амплитудой порядка 0,001—0,0001 *мм*. При этом чем больше частота, тем меньше величины амплитуд ощутимых колебаний. При частоте 100 *кол/мин* человек почти не ощущает колебаний с амплитудой 0,1 *мм*, а при частоте 3000 *кол/мин* он ощущает колебания с амплитудой 0,001 *мм*.

Обеспечению необходимых санитарно-гигиенических условий труда в производственных помещениях уделяется большое внимание. Достаточно назвать выпуск санитарных норм [2, 10, 11], инструкций и норм проектирования зданий и сооружений, подвергающихся действию динамических нагрузок [4—8].

1.3. Экспериментальные данные о физиологическом воздействии колебаний и их нормирование

Известные экспериментальные данные о влиянии колебаний на людей относятся к колебаниям со сравнительно низким частотным диапазоном — от 1 до 100 *гц*. Это объясняется тем, что частоты изменения динамических нагрузок от применяемого промышленного оборудования находятся в этом частотном диапазоне.

Здесь приводятся данные о восприятии людьми общих колебаний и их оценке, поскольку как при проектировании новых, так и при уменьшении колебаний эксплуатируемых промышленных зданий и сооружений инженера интересует только общее воздействие колебаний на человека, передающееся всему телу через опорные поверхности.

Изучением влияния колебаний на людей занимались многие исследователи [1, 3, 12, 13]. Однако это влияние еще не изучено полностью и требуются дальнейшие исследования, особенно по изучению физиологического действия полигармонических, негармонических, импульсивных, случайных и других сложных динамических воздействий, а также установлению допускаемых колебаний для различных условий труда и деятельности человека (производственных, жилищно-бытовых и т. п.). Экспериментальные данные позволяют в ряде случаев определить качественный характер восприятия колебаний человеком, а также установить безопасные для здоровья границы колебаний.

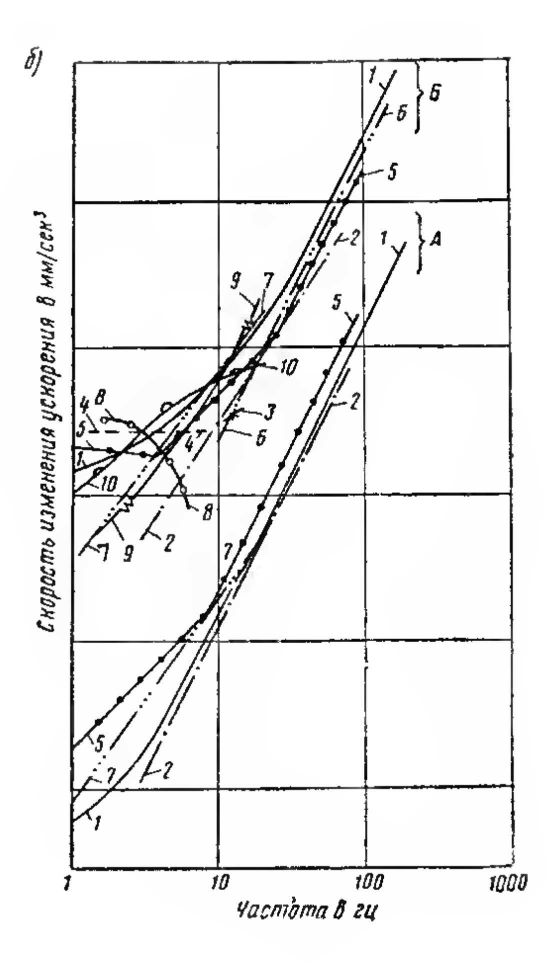
Характер восприятия колебаний обычно определяется несколькими категориями чувствительности, а именно: неощутимые колебания, слабо ощутимые, хорошо ощутимые, сильно ощутимые, вредные при длительном воздействии (неприятные), безусловно вредные даже при кратковременном действии.

На рис. 1.1 приведены графики из работы [12], полученные различными исследователями, на которых показаны низшие границы слабо ощутимых и неприятных (вредных) колебаний. Чувствительность людей к колебаниям изменяется в довольно широких пределах, и поэтому результаты различных исследователей несколько отличаются друг от друга. В качестве критериев оценки действия колебаний на людей исследователями предлагаются различные характеристики колебаний: перемещения, скорости, ускорения, скорости изменения ускорения и некоторых других параметров. При этом используются как пиковые (амплитудные), так и среднеарифметические и среднеквадратичные значения этих характеристик.

а) 100
10
1
0,1
0,01
0,001
1 10 100 1000
Амплитуда колебаний в мм
Частота в гц

1 — Брох
2 — Рейер и Мейстер
3 — Маллон
4 — Мельвиль
5 — Дауер
6 — Дигби и Сенни
7 — Хельберг и Шперлинг
8 — Жаклин
9 — Постлетуайт
10 — Жаклин

Б
А



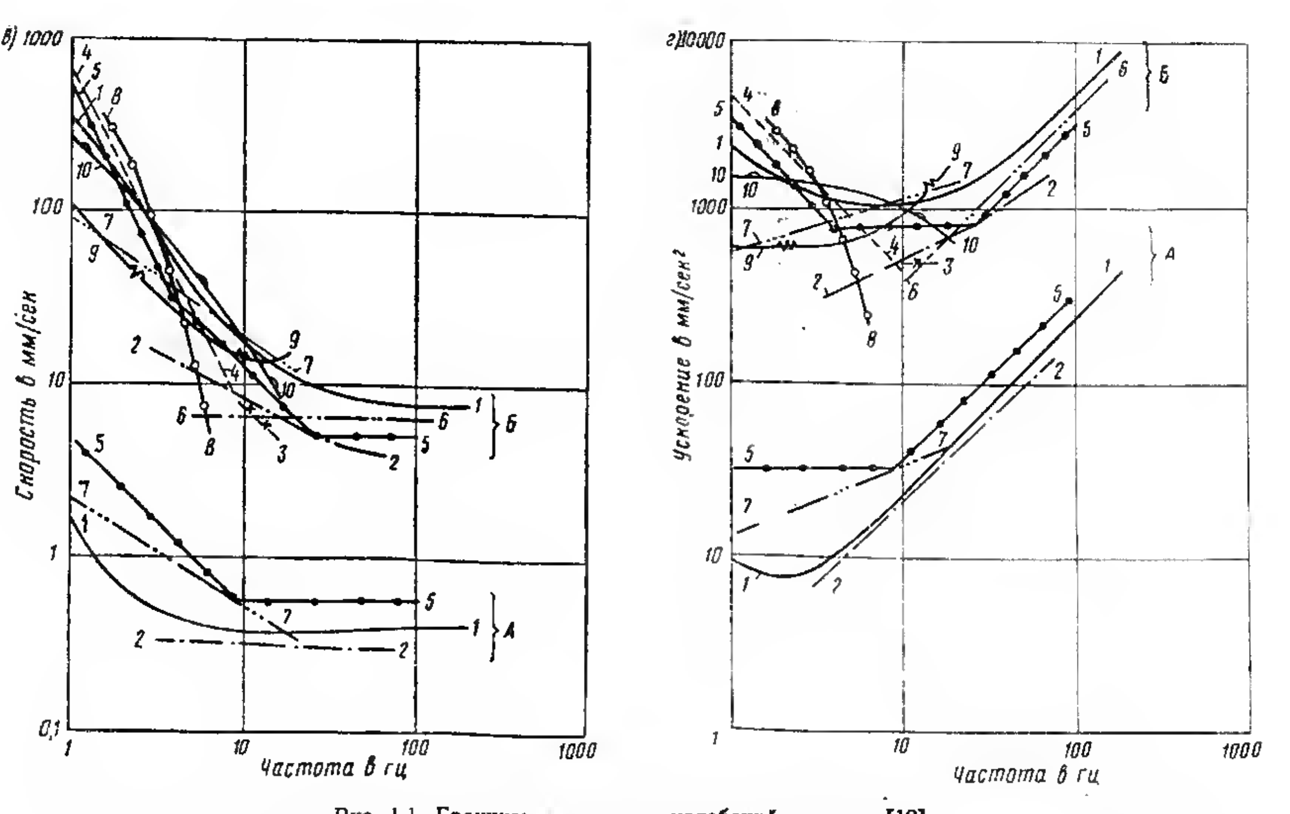


Рис. 1.1. Границы восприятия колебаний людьми [12]

а — в зависимости от амплитуды колебаний; *б* — то же, скорости изменения ускорения; *в* — то же, скорости; *г* — то же, ускорения; *А* — начало ощущения колебаний; *Б* — нижняя граница неприятных (вредных) колебаний

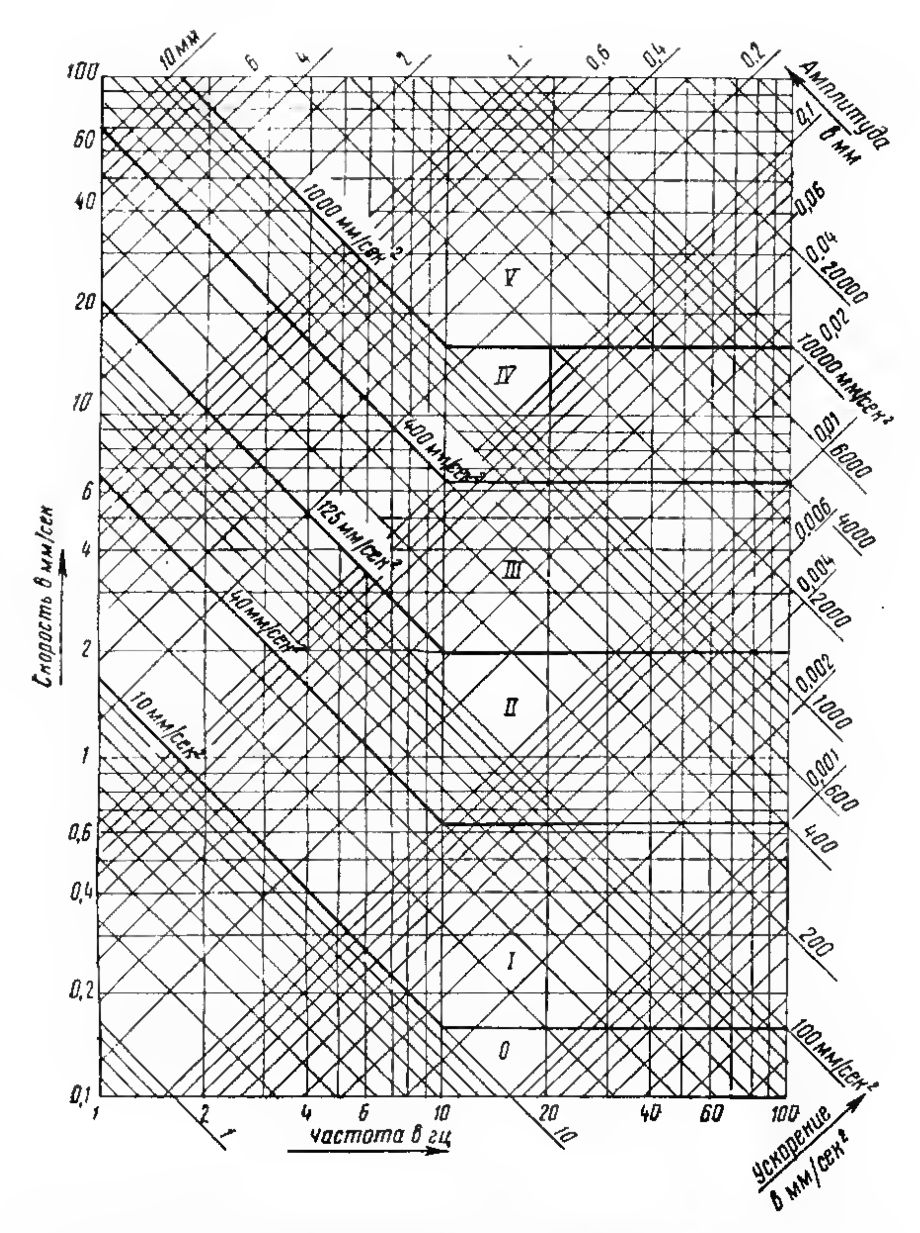


Рис. 1.2. График характеристик гармонических колебаний (римскими цифрами отмечены области характеристик восприятия колебаний людьми по данным табл. 1.1)

В отечественных нормах проектирования строительных конструкций [5, 6, 8] характер восприятия гармонических колебаний для частот менее 10 *гц* определяется амплитудой (пиковым значением) ускорения $w_{макс} = a\omega^2$ в *мм/сек*², а для частот равных и более 10 *гц* — амплитудой скорости $v_{макс} = a\,\omega$ в *мм/сек* (табл. 1.1), где a — амплитуда колебаний в *мм*; ω — круговая частота в *сек*$^{-1}$. При определении по заданным параметрам гармонических колебаний производных параметров удобно пользоваться графиком рис. 1.2.

Допустимый уровень колебаний по санитарным нормам [11] для частот до 11 *гц* определяется смещением, а для частот от 11 до 355 *гц* среднеквадратичной скоростью по октавным полосам. При этом предполагается, что колебания, относящиеся к различным октавным полосам, воспринимаются человеком независимо друг от друга, т. е. не суммируются.

Изложенная в нормах методика нормирования механических колебаний в случае превышения допустимого уровня колебаний в одной из частотных полос позволяет путем перераспределения частотных характеристик вынужденных колебаний между частотными полосами добиваться допустимого уровня колебаний, например при возбуждении колебаний группой машин — изменением числа оборотов некоторых машин [1].

Имеются другие предложения по оценке восприятия колебаний.

Для оценки характера воздействия колебаний на людей в немецких нормах 1939 г. DIN 4150 была введена единица измерения «пал» (табл. 1.2), предложенная Целлером (рис. 1.3).

Воздействие колебаний на людей определяется формулой

$$P = 20\,\lg\frac{v_{ср.кв}}{v_0}, \qquad (1.2)$$

где P — интенсивность воздействия колебаний в палах;

$$v_{ср.кв} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [v(t)]^2\,dt} \qquad (1.3)$$

— среднеквадратичная скорость колебаний в *см/сек*:

Таблица 1.2

Оценка воздействия колебаний на людей (по Целлеру)

Характер воздействия колебаний	Оценка в палах
Начало ощущения колебаний в зависимости от положения тела	0—10
Ощутимые колебания	10—20
Вредные для здоровья человека колебания зданий от движущегося транспорта	20—30
Колебания в спокойно движущихся экипажах, тягостные для людей колебания от движения транспорта и машин, легкие повреждения жилых зданий	30—40
Колебания экипажей, ускорения пассажирских лифтов, значительные повреждения жилых зданий	40—50
Колебания, воспринимаемые человеком без физических нарушений только короткое время, сильные колебания экипажей, разрушения в жилых домах	50—60
Колебания, вызывающие физические нарушения у человека, морскую болезнь	60—80

[1] См. предложения НСО ТК-108 на стр. 17.

$v_0 = 0{,}0316$ *см/сек* — скорость колебаний на границе восприятия; $v(t)$ — функция, характеризующая изменение скорости колебаний во времени; T — период изменения $v(t)$.

В немецких нормах 1958 г. DIN 4025 для фундаментов молотов степень физиологического воздействия колебаний на людей оценивается коэффициентом K (табл. 1.3). При частоте колебаний более 5 *гц* величина коэффициента K определяется максимальной скоростью колебаний v в *мм/сек*; $K = 0{,}8\ v$ для вертикальных и $K = 0{,}64\ v$ для горизонтальных колебаний.

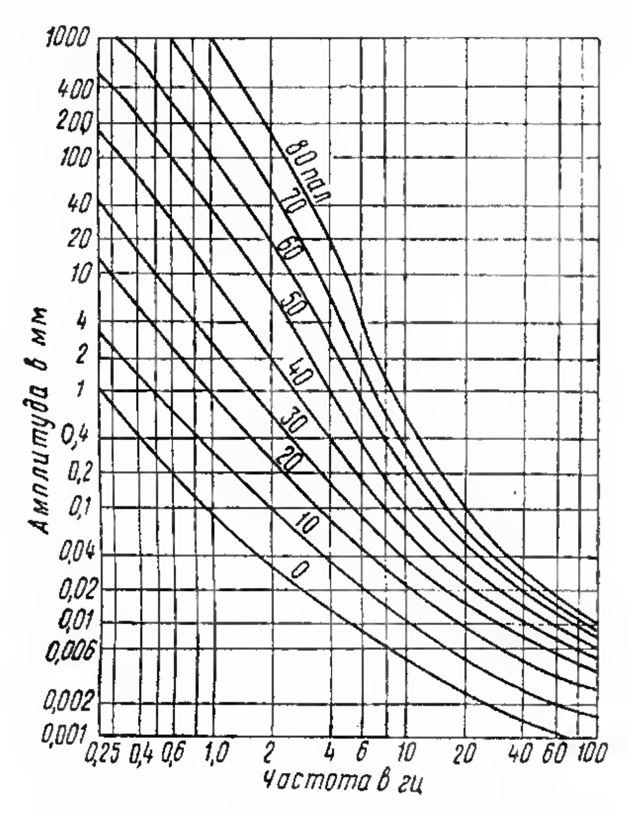


Рис. 1.3. Зависимость восприятия колебаний человеком в единицах измерения «пал» от частоты и амплитуды колебаний

Интересные предложения по допускаемым пределам воздействия механических колебаний и ударов на человека разработаны в 1968 г. техническим комитетом международной организации по стандартизации (ИСО ТК-108). Для частотного диапазона от 1 до 90 *гц* в предложениях комитета указываются допустимые пределы периодических и непериодических или случайных колебаний с дискретным и распределенным спектром частот. Рассматриваются три допустимых предела колебаний: а) безопасные для здоровья; б) не снижающие производительность труда; в) не нарушающие комфортных условий. В качестве основного принимается предел, обеспечивающий нормальную работу без снижения производительности труда для людей с нормальным здоровьем.

Таблица 1.3

Степень физиологического воздействия колебаний на людей (по DIN 4025)

K	Характер воздействия колебаний	Возможность работы
0,1	Начало ощущения колебаний	Беспрепятственна
0,1—0,3	Едва ощутимо, слегка неприятно, переносится хорошо	Беспрепятственна
0,3—1	Хорошо ощутимо, при воздействии в течение часов умеренно неприятно, переносимо	Еще не затруднена
1—3	Сильно ощутимо, при воздействии в течение часа довольно неприятно, однако переносимо	Затруднена, но возможна
3—10	Неприятно, при длительном воздействии непереносимо. Допустимо в течение не более 1 *ч*	Сильно затруднена, но еще возможна
10—30	Очень неприятно. Допустимо в течение не более 10 *мин*	Едва возможна
30—100	Крайне неприятно. Допустимо не более 1 *мин*	Невозможна
Более 100	Непереносимо	Невозможна

Безопасные для здоровья предельные параметры в два раза превышают параметры производительной работы (предел длительной терпимости), а пределы комфортных условий в 3,15 раза меньше пределов производительной работы. При этом предполагается, что указанные пределы подчиняются одинаковым временным и частотным зависимостям.

Основной величиной, характеризующей предельное значение колебаний, служит среднеквадратичное ускорение

$$W_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^T [w(t)]^2\,dt}\,, \qquad (1.4)$$

где $w(t)$ — функция, характеризующая изменение ускорения во времени; T — период изменения функции $w(t)$.

В предложениях приведены среднеквадратичные значения предельных ускорений для синусоидальных колебаний (рис. 1.4), колебаний с дискретным и распределенным частотными спектрами в зависимости от времени воздействия и частотного диапазона.

При колебаниях с дискретным частотным спектром каждый частотный компонент сравнивается с соответствующим пределом, установленным для частоты этого компонента. Однако при определении допустимой продолжительности воздействия учитывается взаимное влияние колебаний со всеми дискретными частотами.

При широкополосном или случайном спектре колебаний применяется метод октавного анализа с октавными полосами (табл. 1.4). При этом, если частоты колебаний не выходят за пределы одной октавной полосы, то среднеквадратичное значение ускорения в этой полосе сравнивается с соответствующим пределом для среднего значения данной частотной октавы. Если же частоты попадают в две или несколько октавных полос, то учитывается совместное действие колебаний приведением среднеквадратичного значения ускорения данной октавной полосы к октавной полосе с частотами 4—8 *гц*, к которым человек наиболее чувствителен

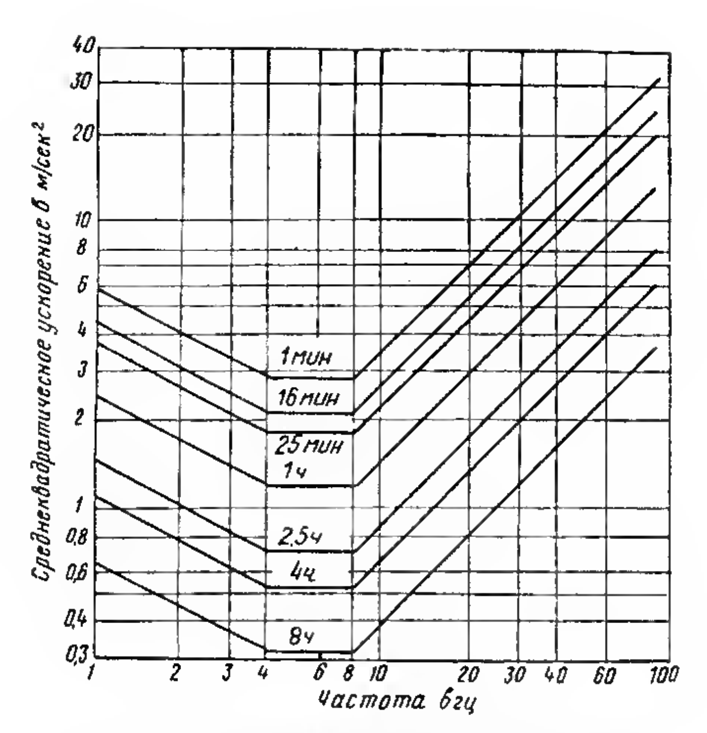


Рис. 1.4. График зависимости среднеквадратичного ускорения синусоидальных колебаний от частоты, превышение которого приводит к снижению производительности труда вследствие усталости (предел длительной терпимости)

Таблица 1.4

Октавные полосы при широкополосном или случайном спектре колебаний

Граничные частоты октавной полосы в *гц*		Среднегеометрическая частота октавной полосы в *гц*	Коэффициенты приведения относительно октавной полосы 4÷8 *гц*
нижняя	верхняя		
1	2	1,4	0,6
2	4	2,8	0,85
4	8	5,6	1
8	16	11,2	0,71
16	31,5	22,5	0,355
31,5	63	45	0,18
63	90	75	0,106

Не описывая других предложений по нормированию допустимого уровня колебаний, отметим предложения об исследованиях теоретических моделей, представляющих модели организма человека, с помощью многомассовых механических систем. Однако исследования таких моделей связаны с большими трудностями по определению характеристик системы (жесткостей, масс, их взаимных связей и т. п.).

1.4. Ограничение колебаний предельно допустимым динамическим прогибом

В случае, если к колебаниям промышленного здания не предъявляются требования, определяемые санитарными нормами или технологией производственных процессов, то, помимо ограничения колебаний по несущей способности, должны предъявляться требования по ограничению динамических прогибов.

В настоящее время требования по ограничению динамических прогибов не являются обязательными. Однако в Инструкции [7] даны рекомендации по ограничению динамического прогиба конструкций покрытий промышленных зданий. В табл. 1.5 приводятся эти рекомендации.

Таблица 1.5

Амплитуды колебаний конструкций покрытия, соответствующие предельно допустимому динамическому прогибу

Частота в *гц*	Амплитуда в *мм*	Частота в *гц*	Амплитуда в *мм*
1	10	10	0,1
2	2,5	15	0,067
3	1,111	20	0,05
4	0,625	25	0,04
5	0,4	50	0,02
6	0,278	75	0,013
8	0,156	100	0,01

Примечание. Для промежуточных значений частот колебаний амплитуды определяются формулами:

а) для частот колебаний от 1 до 10 *гц* $a_0 = 10/n_0^2$;

б) для частот колебаний от 10 до 100 *гц* $a_0 = 1/n_0$.

Здесь n_0 — частота вынужденных колебаний в *гц*; a_0 — амплитуда колебаний конструкции от нормативной нагрузки в *мм*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреева-Галанина Е. Ц. Вибрации и их гигиеническое значение и меры борьбы с ними. Труды Ленинградского института гигиены труда и профзаболеваний, 1940.
2. Временные санитарные правила и нормы по ограничению вибраций рабочего места (№ 280-59). Министерство здравоохранения СССР, 1959.
3. Грацианская Л. Н. Вибрационная болезнь. Изд. Ленинградского дома санитарного просвещения, 1961.
4. Инструкция по проектированию и расчету несущих конструкций зданий под машины с динамическими нагрузками (И 200-54). Министерство строительства предприятий металлургической и химической промышленности, 1955.
5. Инструкция по устранению вредных воздействий вибраций рабочих мест на предприятиях железобетонных изделий (СН 190-61). Госстрой СССР. Стройиздат, 1962.
6. Инструкция по расчету перекрытий на импульсивные нагрузки. ЦНИИСК им. Кучеренко. Стройиздат, 1966.
7. Инструкция по расчету покрытий промышленных зданий, воспринимающих динамические нагрузки. ЦНИИСК им. Кучеренко. Стройиздат, 1967.
8. Инструкция по расчету несущих конструкций промышленных зданий и сооружений на динамические нагрузки. ЦНИИСК им. Кучеренко. Стройиздат, 1970.
9. Коренев Б. Г. О Временных санитарных правилах и нормах по ограничению вибраций рабочего места. «Строительная механика и расчет сооружений», 1959, № 4.
10. Санитарные нормы проектирования промышленных предприятий (СН 245-71). Госстрой СССР. Стройиздат, 1972.
11. Санитарные нормы и правила по ограничению вибрации рабочих мест (№ 627-66). Министерство здравоохранения СССР, 1966.
12. Soliman J. I. Criteria for permissible levels of industrial vibrations with regard to their effect on human beings and buildings. Proceedings of the symposium RILEM, Budapest, 1963, bd. I, pp. 111—147.
13. Сорокин Е. С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. Госстройиздат, 1956.

РАЗДЕЛ 2

ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ ОТ МАШИН

(В. И. Сысоев)

Различают два основных типа машин, развивающих динамические нагрузки:

машины с конструктивно неуравновешенными движущимися частями (машины с кривошипно-шатунными и кривошипно-кулисными механизмами: поршневые компрессоры, металлообрабатывающие строгальные, плоскошлифовальные и тому подобные станки, дробилки, вибрационные центрифуги, ткацкие станки, штампмашины, поршневые насосы, плоскопечатные типографские машины и т. п.);

машины с номинально уравновешенными, а фактически неуравновешенными движущимися частями (центрифуги, грохоты, металлообрабатывающие токарные, точильные, шлифовальные и тому подобные станки с вращающимися шпинделями и камнями, вентиляторы и т. п.).

Для машин с конструктивно неуравновешенными движущимися частями динамические нагрузки определяют расчетным путем на основе рассмотрения кинематической схемы машины. В машинах второго типа неуравновешенность носит случайный характер и вызвана неточностью балансировки, разработкой подшипников, влиянием обрабатываемого материала и т. д. Поэтому динамические нагрузки от машин второго типа определяют на основе экспериментальных данных.

2.1. Общие принципы определения динамических нагрузок от машин

Динамические нагрузки от машин определяются направлением действия и законами изменения во времени их главного вектора и главного момента. Динамические нагрузки, развиваемые большинством машин, изменяются по гармоническому закону, а в отдельных случаях являются некоторыми периодическими негармоническими функциями времени. Эти функции могут быть разложены в тригонометрические ряды, из которых для целей динамического расчета используют первую, а иногда и высшие гармоники.

Рассмотрим равномерное движение масс машины в системе координат, жестко связанной с корпусом машины. Обозначим массу элементарной частицы m_i, а ее координаты x_i, y_i, z_i. Приводя силы и моменты сил инерции элементарных масс машины к началу координат, получаем в проекциях на оси координат следующие составляющие динамических нагрузок:

$$R_x = -\sum_i m_i \ddot{x}_i; \quad R_y = -\sum_i m_i \ddot{y}_i; \quad R_z = -\sum_i m_i \ddot{z}_i; \qquad (2.1)$$

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\sum_i m_i (y_i \ddot{z}_i - z_i \ddot{y}_i); \\ M_y &= -\sum_i m_i (z_i \ddot{x}_i - x_i \ddot{z}_i); \\ M_z &= -\sum_i m_i (x_i \ddot{y}_i - y_i \ddot{x}_i), \end{aligned}\right\} , \qquad (2.2)$$

где $\ddot{x}_i$, $\ddot{y}_i$, $\ddot{z}_i$ — вторые производные от координат по времени; R_x, R_y, R_z — проекции главного вектора инерционных сил; M_x, M_y, M_z — составляющие главного момента этих сил относительно центра приведения.

Машина рассматривается как система с одной степенью свободы, положение звеньев которой определяется одной обобщенной координатой, например углом поворота φ ведущего звена. Декартовы координаты любой точки машины могут быть выражены тогда некоторыми функциями обобщенной координаты:

$$x_i = x_i(\varphi); \quad y_i = y_i(\varphi), \quad z_i = z_i(\varphi). \qquad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.1) и (2.2), при равномерном вращении главного вала машины получаем:

$$R_x = -\omega^2 M \frac{d^2 x_c}{d\varphi^2}; \quad R_y = -\omega^2 M \frac{d^2 y_c}{d\varphi^2}; \quad R_z = -\omega^2 M \frac{d^2 z_c}{d\varphi^2}; \qquad (2.4)$$

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \omega^2 \frac{d}{d\varphi} \sum_i m_i \left(z_i \frac{dy_i}{d\varphi} - y_i \frac{dz_i}{d\varphi}\right); \\ M_y &= \omega^2 \frac{d}{d\varphi} \sum_i m_i \left(x_i \frac{dz_i}{d\varphi} - z_i \frac{dx_i}{d\varphi}\right); \\ M_z &= \omega^2 \frac{d}{d\varphi} \sum_i m_i \left(y_i \frac{dx_i}{d\varphi} - x_i \frac{dy_i}{d\varphi}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

где $M = \sum_i m_i$ — масса движущихся частей; x_c, y_c, z_c — координаты центра масс движущихся частей; ω — угловая скорость вращения главного вала машины.

Для ротора, вращающегося вокруг оси x с постоянной угловой скоростью ω, имеем:

$$R_{0y} = M y_c \omega^2; \quad R_{0z} = M y_c \omega^2; \qquad (2.6)$$

$$M_{0y} = \omega^2 I_{xz}; \quad M_{0z} = -\omega^2 I_{xy}. \qquad (2.7)$$

Уравнения (2.6) показывают, что центр масс ротора смещен относительно оси вращения и имеет координаты x_c, y_c, z_c. Уравнения (2.7) означают, что ось вращения ротора не является главной центральной осью инерции.

При вращении ротора неуравновешенность приводится к центробежной силе $R = me\omega^2$ и к моменту $M = meb\omega^2$ ($e = \sqrt{y_c^2 + z_c^2}$ — эксцентриситет масс; $b = x_c$ — плечо пары сил), постоянных по величине, но переменных по направлению.

Возвратно-поступательно движущаяся масса создает динамическую нагрузку, действующую в направлении движения и равную:

$$\left.\begin{aligned}&0 \text{ при } 0 \leqslant t < \alpha_1 T; \quad f(t) \text{ при } \alpha_1 T \leqslant t < \alpha_2 T;\\ &0 \text{ при } \alpha_2 T \leqslant t < \alpha_3 T; \ f(t) \text{ при } \alpha_3 T \leqslant t < \alpha_4 T;\\ &0 \text{ при } \alpha_4 T \leqslant t \leqslant T, \quad (\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < 1).\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Эта нагрузка может быть представлена в виде

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \tag{2.9}$$

где a_k и b_k есть коэффициенты ряда Фурье функции (2.8), вычисляемые по формулам:

$$\left.\begin{aligned}a_k &= \frac{2}{T}\int_{\alpha_1 T}^{\alpha_2 T} f(t)\cos k\omega t dt + \frac{2}{T}\int_{\alpha_3 T}^{\alpha_4 T} f(t)\cos k\omega t dt;\\ b_k &= \frac{2}{T}\int_{\alpha_1 T}^{\alpha_2 T} f(t)\sin k\omega t dt + \frac{2}{T}\int_{\alpha_3 T}^{\alpha_4 T} f(t)\sin k\omega t dt,\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

где $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ — период изменения динамической нагрузки, выражающейся формулой (2.8).

Кратковременно действующие (импульсивные) нагрузки по характеру действия во времени делятся на кратковременный импульс и мгновенный импульс. Кратковременный импульс определяется величиной импульса, формой импульса и продолжительностью действия; мгновенный импульс определяется только величиной импульса.

Главный вектор и главный момент динамических нагрузок приводятся к точке, относительно которой вращается кривошип первого цилиндра. В эту точку помещается начало прямоугольных координат, ось x направлена вдоль оси коленчатого вала, ось y — горизонтально в перпендикулярном направлении и ось z — вертикально.

2.2. Определение динамических нагрузок от машин с конструктивно неуравновешенными движущимися частями

Машины с кривошипно-шатунными механизмами

В машинах с кривошипно-шатунными механизмами проекция главного вектора на ось x и момент относительно оси x равны нулю. Остальные составляющие динамических нагрузок определяются по формулам:

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} (Q_i \sin\varphi_i - P_i \cos\varphi_i); \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} (Q_i \cos\varphi_i + P_i \sin\varphi_i); \tag{2.11}$$

$$\left.\begin{aligned}M_y &= \sum_{i=1}^{n} \left[(Q_i \cos\varphi_i + P_i \sin\varphi_i) \sum_{j=1}^{i-1} l_j\right];\\ M_z &= \sum_{i=1}^{n} \left[(Q_i \sin\varphi_i - P_i \cos\varphi_i) \sum_{j=1}^{i-1} l_j\right],\end{aligned}\right\}, \tag{2.12}$$

где Q_i и P_i — составляющие динамической нагрузки от i-го цилиндра, действующие по направлению скольжения поршия (Q_i) и перпендикулярно ему (P_i), определяемые по формулам:

$$Q_i = r\omega^2 \left[(m_{a_i} + m_{b_i}) \cos(\omega t + \beta_i - \varphi_i) + \alpha_i m_{b_i} \cos 2(\omega t + \beta_i - \varphi_i)\right];$$

$$P_i = r\omega^2 m_{a_i} \sin(\omega t + \beta_i - \varphi_i). \quad (2.13)$$

В формулах (2.11)—(2.13) приняты следующие обозначения (рис. 2.1): i — номер кривошипно-шатунного механизма; r — радиус кривошипа; ω — круговая частота вращения главного вала машины в $сек^{-1}$; β_i — угол заклинивания (в *рад*) i-го цилиндра, т. е. угол между кривошипом первого цилиндра и кривошипом рассматриваемого i-го цилиндра, отсчитываемый по направлению вращения коленчатого вала; φ_i — угол оси i-го цилиндра с вертикалью, отсчитываемый по направлению вращения коленчатого вала; $\alpha = r/L$ — характеристическое число кривошипно-шатунного механизма; l_j — расстояние между осями j-го и $j+1$-го цилиндров; n — число цилиндров; t — время; m_a — масса частей кривошипно-шатунного механизма, приведенная к пальцу кривошипа и определяемая по формуле

$$m_a = \frac{1}{g}\left[\frac{r_1}{r} G_1 + \left(1 - \frac{L_1}{L}\right) G_3 - \frac{r_п}{r} G_п\right]; \quad (2.14)$$

m_b — масса частей кривошипно-шатунного механизма, приведенная к крейцкопфу (или к поршневому пальцу), определяемая по формуле

$$m_b = \frac{1}{g}\left(G_2 + \frac{L_1}{L} G_3\right); \quad (2.15)$$

r_1 — расстояние от оси вращения до центра тяжести кривошипа; L — длина шатуна; L_1 — расстояние от центра тяжести шатуна до пальца кривошипа; $r_п$ — расстояние от оси вращения до центра тяжести противовеса; G_1 — вес кривошипа; G_2 — вес возвратно-поступательно движущихся частей; G_3 — вес шатуна; $G_п$ — вес противовеса; g — ускорение силы тяжести.

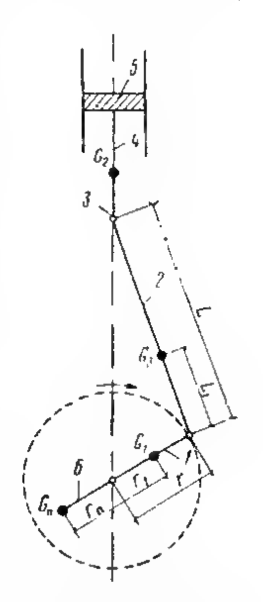


Рис. 2.1. Схема кривошипно - шатунного механизма

1 — кривошип; *2* — шатун; *3* — крейцкопф; *4* — шток; *5* — поршень; *6* — противовес

В случае, если все механизмы в машине номинально одинаковы и взаимно уравновешены, динамические нагрузки вычисляют по формулам (2.11)—(2.12), в которых величины Q_i и P_i имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} Q_i &= r\omega^2 \,[\,(m_a + m_b)(1 + k_i)\cos(\omega t + \beta_i - \varphi_i) + \\ &\quad + \alpha m_b \cos 2(\omega t + \beta_i - \varphi_i); \\ P_i &= r\omega^2 m_a (1 + k_i)\sin(\omega t + \beta_i - \varphi_i). \end{aligned}\right\} \quad (2.16)$$

При этом коэффициенты k_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) принимают значения 0 или k в различных сочетаниях. Из всех сочетаний, число которых равно $\sum\limits_{i=1}^{n} c_n^i$, выбираются такие, при которых получаются наибольшие амплитуды составляющих динамической силы и момента; при этом берутся соответствующие фазовые углы.

Коэффициент k, учитывающий разницу в весе одноименных движущихся частей номинально одинаковых кривошипно-шатунных механизмов, принимается по табл. 2.1.

Таблица 2.1

Значение коэффициента k

Вес машины в *тс*	Число цилиндров	k
До 1	2 и больше	0,1
1—5	2—8 Больше 8	0,2 0,1
5—10	2 Больше 2	0,3 0,2
10—20	2—6 Больше 6	0,3 0,2
Больше 20	2—8 Больше 8	0,3 0,2

Для машин с линейным расположением цилиндров принимается $\varphi_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) и вычисляются составляющие:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i; \quad P = \sum_{i=1}^{n} P_i; \tag{2.17}$$

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n} \Big(Q_i \sum_{j=1}^{i-1} l_j\Big); \quad M_2 = -\sum_{i=1}^{n} \Big(P_i \sum_{j=1}^{i-1} l_j\Big), \tag{2.18}$$

где Q_i и P_i вычисляют по формулам (2.13) или (2.16).

Подставляя (2.13) в (2.17) и (2.18), получим:

$$\left.\begin{aligned} Q &= r\omega^2 \left[A_1 \cos(\omega t + \psi_1) + A_2 \cos(2\omega t + \psi_2)\right]; \\ P &= r\omega^2 A_3 \sin(\omega t + \psi_3); \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= r\omega^2 \left[B_1 \cos(\omega t + \chi_1) + B_2 \cos(2\omega t + \chi_2)\right]; \\ M_2 &= r\omega^2 B_3 \sin(\omega t + \chi_3), \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_1^2 &= \Big[\sum_{i=1}^{n} \big(m_{a_i} + m_{b_i}\big) \cos\beta_i\Big]^2 + \Big[\sum_{i=1}^{n} \big(m_{a_i} + m_{b_i}\big) \sin\beta_i\Big]^2; \\ A_2^2 &= \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{b_i} \cos 2\beta_i\Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{b_i} \sin 2\beta_i\Big)^2; \\ A_3^2 &= \Big(\sum_{i=1}^{n} m_{a_i} \cos\beta_i\Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n} m_{a_i} \sin\beta_i\Big)^2; \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
B_1^2 &= \left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(m_{a_i}+m_{b_i}\right)\cos\beta_i\sum_{j=1}^{i-1}l_j\right]\right\}^2+\\
&+\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(m_{a_i}+m_{b_i}\right)\sin\beta_i\sum_{j=1}^{i-1}l_j\right]\right\}^2;\\
B_2^2 &= \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i m_{b_i}\cos 2\beta_i\sum_{j=1}^{i-1}l_j\right)\right]^2+\\
&+\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i m_{b_i}\sin 2\beta_i\sum_{j=1}^{i-1}l_j\right)\right]^2;\\
B_3^2 &= \left[\sum_{i=1}^{n}\left(m_{a_i}\cos\beta_i\sum_{j=1}^{i-1}l_j\right)\right]^2+\\
&+\left[\sum_{i=1}^{n}\left(m_{a_i}\sin\beta_i\sum_{j=1}^{i-1}l_j\right)\right]^2.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (2.22)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\operatorname{tg}\psi_1 &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(m_{a_i}+m_{b_i}\right)\sin\beta_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(m_{a_i}+m_{b_i}\right)\cos\beta_i}; \qquad \operatorname{tg}\psi_2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i m_{b_i}\sin 2\beta_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i m_{b_i}\cos 2\beta_i};\\
\operatorname{tg}\psi_3 &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_{a_i}\sin\beta_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_{a_i}\cos\beta_i};
\end{aligned}
\right\}
\qquad (2.23)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\operatorname{tg}\chi_1 &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\left(m_{a_i}+m_{b_i}\right)\sin\beta_i\sum\limits_{j=1}^{i-1}l_j\right]}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\left(m_{a_i}+m_{b_i}\right)\cos\beta_i\sum\limits_{j=1}^{i-1}l_j\right]};\\
\operatorname{tg}\chi_2 &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\alpha_i m_{b_i}\sin 2\beta_i\sum\limits_{j=1}^{i-1}l_j\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\alpha_i m_{b_i}\cos 2\beta_i\sum\limits_{j=1}^{i-1}l_j\right)};\\
\operatorname{tg}\chi_3 &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(m_{a_i}\sin\beta_i\sum\limits_{j=1}^{i-1}l_j\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(m_{a_i}\cos\beta_i\sum\limits_{j=1}^{i-1}l_j\right)}.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (2.24)
$$

Подставляя (2.16) в (2.17) и (2.18), получим:

$$\left.\begin{aligned} Q &= r\omega^2\left[(m_a+m_b)A_1^*\cos\left(\omega t+\psi_1^*\right)+\alpha m_b A_2^*\cos\left(2\omega t+\psi_2^*\right)\right];\\ P &= r\omega^2 m_a A_1^*\sin\left(\omega t+\psi_1^*\right);\end{aligned}\right\} \quad (2.25)$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= r\omega^2\left[(m_a+m_b)B_1^*\cos\left(\omega t+\chi_1^*\right)+\alpha m_b B_2^*\cos\left(2\omega t+\chi_2^*\right)\right],\\ M_2 &= r\omega^2 m_a B_1^*\sin\left(\omega t+\chi_1^*\right),\end{aligned}\right\} \quad (2.26)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_1^{*2} &= \left[\sum_{l=1}^{n}(1+k_l)\cos\beta_l\right]^2+\left[\sum_{l=1}^{n}(1+k_l)\sin\beta_l\right]^2;\\ A_2^{*2} &= \left(\sum_{l=1}^{n}\cos 2\beta_l\right)^2+\left(\sum_{l=1}^{n}\sin 2\beta_l\right)^2;\end{aligned}\right\} \quad (2.27)$$

$$\left.\begin{aligned} B_1^{*2} &= \left\{\sum_{l=1}^{n}\left[(1+k_l)\cos\beta_l\sum_{j=1}^{l-1}l_j\right]\right\}^2+\left\{\sum_{l=1}^{n}\left[(1+k_l)\sin\beta_l\sum_{j=1}^{l-1}l_j\right]\right\}^2;\\ B_2^{*2} &= \left[\sum_{l=1}^{n}\left(\cos 2\beta_l\sum_{j=1}^{l-1}l_j\right)\right]^2+\left[\sum_{l=1}^{n}\left(\sin 2\beta_l\sum_{j=1}^{l-1}l_j\right)\right]^2;\end{aligned}\right\} \quad (2.28)$$

$$\operatorname{tg}\psi_1^* = \frac{\sum_{l=1}^{n}(1+k_l)\sin\beta_l}{\sum_{l=1}^{n}(1+k_l)\cos\beta_l}; \qquad \operatorname{tg}\psi_2^* = \frac{\sum_{l=1}^{n}\sin 2\beta_l}{\sum_{l=1}^{n}\cos 2\beta_l}; \quad (2.29)$$

$$\operatorname{tg}\chi_1^* = \frac{\sum_{l=1}^{n}\left[(1+k_l)\sin\beta_l\sum_{j=1}^{l-1}l_j\right]}{\sum_{l=1}^{n}\left[(1+k_l)\cos\beta_l\sum_{j=1}^{l-1}l_j\right]}; \qquad \operatorname{tg}\chi_2^* = \frac{\sum_{l=1}^{n}\left(\sin 2\beta_l\sum_{j=1}^{l-1}l_j\right)}{\sum_{l=1}^{n}\left(\cos 2\beta_l\sum_{j=1}^{l-1}l_j\right)}; \quad (2.30)$$

Для машин с угловым расположением цилиндров проекции главного вектора R и момента M вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} R_y &= r\omega^2\left[A_1\cos(\omega t+\psi_1)+A_3\cos(2\omega t+\psi_3)\right];\\ R_z &= r\omega^2\left[A_2\cos(\omega t+\psi_2)+A_4\cos(2\omega t+\psi_4)\right];\\ M_y &= r\omega^2\left[B_2\cos(\omega t+\chi_2)+B_4\cos(2\omega t+\chi_4)\right];\\ M_z &= r\omega^2\left[B_1\cos(\omega t+\chi_1)+B_3\cos(2\omega t+\chi_3)\right],\end{aligned}\right\}, \quad (2.31)$$

где

$$A_k^2 = \left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl}c_{kl}\right)^2+\left(\sum_{l=k}^{n} b_{kl}\frac{dc_{kl}}{d\beta_l}\right)^2; \quad (2.32)$$

$$B_k^2=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(b_{ki}\,c_{ki}\sum_{j=1}^{i-1} l_j\right)\right]^2+\left[\sum_{i=1}^{n}\left(b_{ki}\,\frac{dc_{ki}}{d\beta_i}\sum_{j=1}^{i=1} l_j\right)\right]^2; \qquad (2.33)$$

$$\operatorname{tg}\psi_k=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ki}\,\frac{dc_{ki}}{d\beta_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ki}\,c_{ki}};\qquad \operatorname{tg}\chi_k=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(b_{ki}\,\frac{dc_{ki}}{d\beta_i}\sum\limits_{j=1}^{i-1} l_j\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(b_{ki}\,c_{ki}\sum\limits_{j=1}^{i-1} l_j\right)}; \qquad (2.34)$$

($k=1\div4$; $b_{ki}=1$ при $k=1$ и 2, $b_{ki}={}^1/_2$ при $k=3$ и 4). В формулах (2.32) — (2.34) коэффициенты c_{ki} равны:

$$\left.\begin{aligned} c_{1i}&=-m_{a_i}\sin(\beta_i-2\varphi_i)+m_{b_i}\sin\varphi_i\cos(\beta_i-\varphi_i);\\ c_{2i}&=m_{a_i}\cos(\beta_i-2\varphi_i)+m_{b_i}\cos\varphi_i\cos(\beta_i-\varphi_i);\\ c_{3i}&=\alpha_i\,m_{b_i}\sin\varphi_i\cos2(\beta_i-\varphi_i);\quad c_{4i}=\alpha_i\,m_{b_i}\cos\varphi_i\cos2(\beta_i-\varphi_i).\end{aligned}\right\}\qquad (2.35)$$

В случае, если все механизмы номинально одинаковы и уравновешивают друг друга, в формулах (2.35) принимается $m_{a_i}=m_a\ (1+k_i)$; $m_{b_i}=m_b\,(1+k_i)$; $m_{b_i}=m_b$ и в формулах (2.31) — (2.34) величины m_a и m_b выносятся за знак суммы. При этом коэффициенты k_i принимаются такими же, как и при линейном расположении цилиндров.

Машины с кривошипно-кулисными механизмами

Сила инерции P_1 ползуна, приложенная в его центре тяжести, и составляющие силы инерции кулисы P_2 и Q, приложенные в центре тяжести кулисы и действующие соответственно в направлении движения ползуна и в перпендикулярном направлении, определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} P_1&=\alpha\omega^2\,dm_1\,\mu\,(\sin\omega t-2\alpha\sin2\omega t);\\ P_2&=\alpha\omega^2\,d\sqrt{1-\alpha^2}\,m_2\,(\sin\omega t-2\alpha\sin2\omega t);\\ Q&=\alpha^2\,\omega^2\,d_1\,m_2\sin\omega t,\end{aligned}\right\}\qquad (2.36)$$

где приняты следующие обозначения (рис. 2.2): $\alpha=r/h$ — характеристическое число кривошипно-кулисного механизма; r — радиус кривошипа; h — расстояние от оси главного вала до оси качания кулисы; d — длина кулисы; d_1 — расстояние от оси качания до центра тяжести кулисы; m_1 — масса ползуна с серьгой; m_2 — масса кулисы; μ — коэффициент, учитывающий влияние серьги как кинематической связи, определяемый по формуле

$$\mu=1+\frac{\alpha\left(H-d\sqrt{1-\alpha^2}\right)}{b\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\left(\frac{H-d\sqrt{1-\alpha^2}}{b}\right)^2}};\qquad (2.37)$$

b — длина серьги; H — расстояние от оси качания до центра тяжести ползуна.

Составляющие динамической нагрузки и динамический момент, приложенные в точке, расположенной на оси вращения кривошипа в плоскости кривошипно-кулисного механизма, равны:

$$\left.\begin{aligned} R&=\alpha\omega^2\,\delta_1\,(\sin\omega t-2\alpha\sin2\omega t);\quad Q=\alpha^2\,\omega^2\,d_1\,m_2\sin\omega t;\\ M&=\alpha\omega^2\,\delta_2\,(\sin\omega t-2\alpha\sin2\omega t),\end{aligned}\right\}\qquad (2.38)$$

где

$$\delta_1 = m_1 d\mu + m_2 d_1 \sqrt{1-\alpha^2}; \quad \delta_2 = m_1 d\mu (H - h) + $$
$$+ m_2 d_1 \left(d + h\sqrt{1-\alpha^2}\right). \tag{2.39}$$

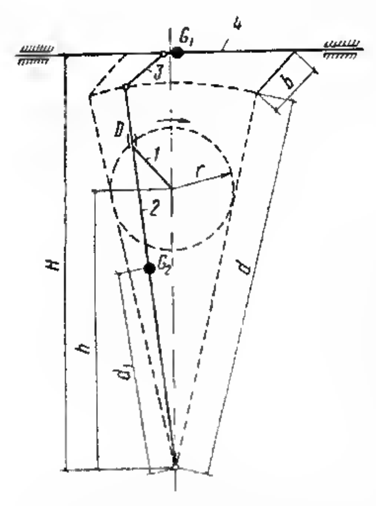


Рис. 2.2. Схема кривошипио-кулисиого мехвнизма

1 — кривошип; *2* — кулиса; *3* — серьга; *4* — ползун

Составляющая R действует по линии, перпендикуляриой оси вращения кривошипа, в направлеиии движения ползуна; Q — по линии, перпеидикуляриой оси вращения кривошипа и продольиой оси ползуна; вектор момента M направлен вдоль оси вращения кривошипа.

Щековые и гирационные дробилки

Динамическая нагрузка от щековых (челюстиых) дробилок раскладывается в плоскости действия механизма дробилки на вертикальиую R_z и горизонтальиую R_y составляющие, приложеииые к оси главиого вала. Величины R_z и R_y определяются по формулам табл. 2.2 в зависимости от кииематических схем механизмов, изображенных ив рис. 2.3.

В формулах табл. 2.2 прииятьы следующие обозначения: r — эксцентрицитет (расстояние между осью главиого ввла и осью шарнира шатуна или расстояние между осью главиого вала и осью эксцентрика), принимаемый по кинематическим схемам дробилок; m_1, m_2, m_3, $m_п$ — массы соответственно подвижной дробящей плиты, эксцентрика или 50% массы кривошипа, шатуна и противовеса.

Таблица 2.2

Неуравновешенные силы инерции щековых дробилок

Схема дробилки	$R_z = m_z r\omega^2 \sin \omega t$; $R_y = m_y r\omega^2 \cos \omega t$			
	Дробилки без противовеса		Дробилки с противовесом	
	m_z	m_y	m_z	m_y
Рис. 2.3, *а*, *г*, *ж*	$m_2 + m_3$	$m_2 + 0,8m_3$	$m_2+m_3-m_п r_п/r$	$0,25m_1$
Рис. 2.3, *б*	$m_1 + m_2$	$0,5m_1 + m_2$	$m_1+m_2-m_п r_п/r$	$0,5m_1 + m_2 - m_п r_п/r$
Рис. 2.3, *в*, *д*	$m_2 + 0,7m_3$	$0,5m_1 + m_2 + m_3$	0	$0,5m_1+m_2+m_3-m_п r_п/r$
Рис. 2.3, *е*	$0,5m_1 + m_2 + m_3$	$0,5m_1+m_2+0,7m_3$	$0,5m_1+m_2+m_3-m_п r_п/r$	$0,5m_1 + m_2 + 0,7m_3 - m_п r_п/r$

Величина амплитуды равнодействующей всех динамических сил от гирациоиных (конусиых) дробилок

$$R = (m_1 r - m_2 r_1)\,\omega^2, \tag{2.40}$$

где r — расстояние от оси дробилки до центра тяжести главиого вала и дробящего конуса; r_1 — расстояние от оси дробилки до центра тяжести вала эксцент-

рика и других соединенных с ним элементов (шестерен, противовесов и т. д.); m_1 — масса главного вала и соединенного с ним конуса; m_2 — масса вала эксцентрика и соединенных с ним элементов.

Равнодействующая динамических нагрузок постоянна по величине и действует в горизонтальной плоскости, в которой вращается с постоянной угловой

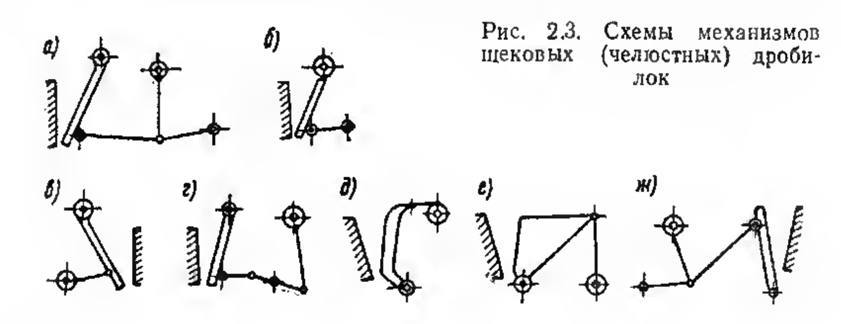


Рис. 2.3. Схемы механизмов щековых (челюстных) дробилок

скоростью ω. Она приложена: в дробилках с крутым конусом — посредине длины главного вала, в дробилках с пологим конусом — в неподвижной точке — центре массы m_1.

Беспоршневые отсадочные машины

Динамические нагрузки от секции отсадочной машины приводятся к двум составляющим: горизонтальной и вертикальной, которые могут быть представлены в виде рядов, содержащих гармоники с частотами $i\omega$ ($i=1, 2, \ldots$):

$$\left.\begin{aligned} R_y &= \sum_{i=1}^{\infty} Q_{yi} \sin\left(i\omega t - \frac{i\alpha}{2} - \varphi_i\right); \\ R_z &= \sum_{i=1}^{\infty} Q_{zi} \sin\left(i\omega t - \frac{i\alpha}{2} - \varphi_i\right). \end{aligned}\right\} \quad (2.41)$$

Амплитуды гармонических составляющих

$$Q_{yi} = A_i \sin\frac{i\alpha}{2}; \quad Q_{zi} = A_i \frac{p}{\gamma L_y} \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \sin\frac{i\alpha}{2}, \quad (2.42)$$

где

$$A_i = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{L_y}{L} \frac{i f_{\text{в}} p \omega^2}{\sqrt{\left[\frac{g}{L}\left(1+\frac{f_{\text{в}}}{f_{\text{c}}}\right) - i^2\omega^2\right]^2 + \left(\xi \frac{f_{\text{в}}}{f_{\text{c}}} \cdot \frac{g}{L} i\omega\right)^2}}, \quad (2.43)$$

p — давление в ресивере машины (избыточное); $f_{\text{в}}$ — площадь поверхности жидкости в воздушном отделении секции; f_{c} — площадь поверхности жидкости в ситовом отделении секции; L — приведенная к воздушному отделению длина средней линии тока для профиля проточной части секции машины; L_y — расстояние между осями ситового и воздушного отделений; γ — удельный вес жидкости; ξ — коэффициент гидравлических сопротивлений, величину которого рекомендуется принимать равной 3 *сек*; α — угол поворота вала золотника,

на протяжении которого воздушное отделение сообщается с ресивером машины; g — ускорение силы тяжести.

Фазовые углы φ_i вычисляются по формуле

$$\varphi_i = \operatorname{arctg} \frac{\xi \dfrac{g}{L} \cdot \dfrac{f_{\text{в}}}{f_{\text{с}}} i\omega}{\dfrac{g}{L}\left(1+\dfrac{f_{\text{в}}}{f_{\text{с}}}\right) - i^2\omega^2} . \qquad (2.44)$$

В тех случаях, когда величина угла α не задана, ее следует принимать такой, чтобы динамическое воздействие на несущие строительные конструкции оказалось наибольшим.

Так как на действие нагрузки R_y проверяются конструкции каркаса здания, а на действие нагрузки R_z — конструкции перекрытия, то величины α при вычислении амплитуд составляющих этих нагрузок могут приниматься различными.

При вычислении R_y принимается: $\alpha=\pi$, если собственная частота здания

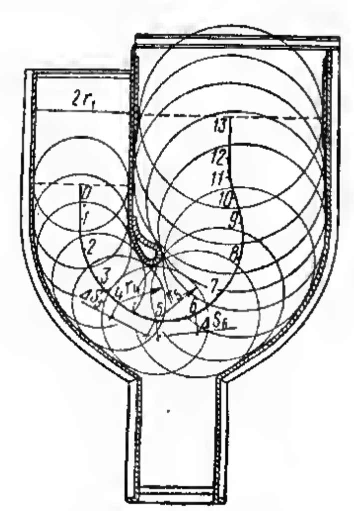


Рис. 2.4. Построение средней линии тока

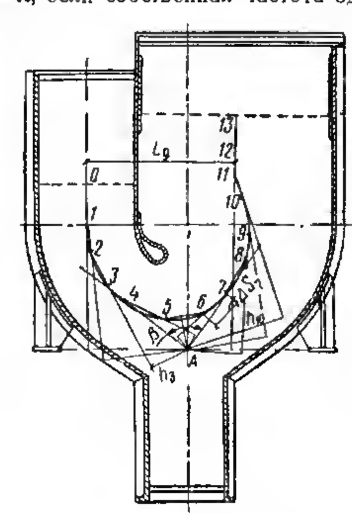


Рис. 2.5. К определению величины F



близка к частоте одной из нечетных гармоник силы; $\alpha=\pi/2$, если собственная частота здания близка к частоте одной из четных гармоник силы.

При вычислении R_z: $\alpha=\pi$, если частота нечетной гармоники находится в пределах одной из частотных зон перекрытия; $\alpha = \dfrac{j}{1+j}\pi$, если частота четной гармоники находится в пределах одной из частотных зон перекрытия (j — номер гармонической составляющей, частота которой $j\omega$ находится в пределах частотной зоны).

Приведенная длина L определяется следующим образом.

На вычерченном в определенном масштабе профиле проточной части секции машины строится средняя линия тока (рис. 2.4), представляющая собой геометрическое место центров окружностей, вписанных в профиль.

Средняя линия разбивается на k участков ($k \geqslant 10$). Измеряется длина каждого участка Δs_j ($j=1, 2, \ldots, k$) и радиусы вписанных окружностей r_j ($j=1, 2, \ldots, k$), средние для каждого из участков. Приведенная длина будет

$$L = \sum_{j=1}^{k} \frac{r_1}{r_j} \Delta s_j, \qquad (2.45)$$

где r_1 — половина ширины проточной части в воздушном отделении секции машины.

Динамические нагрузки от секции равномерно распределены по ее длине (вдоль оси x). Плоскость действия горизонтальных нагрузок совпадает с плоскостью опор секции. Плоскость действия вертикальных нагрузок смещена от оси машины в сторону ситового отделения на расстояние

$$H = \frac{360 \gamma F}{p \alpha}. \qquad (2.46)$$

В тех случаях, когда угол α не задан, при вычислении H можно принимать $\alpha/360 = 0{,}5$.

Для определения величины F криволинейные участки средней линии тока заменяются хордами (рис. 2.5). Из точки A пересечения оси секции с прямой, лежащей в плоскости опор секции, опускаются перпендикуляры на прямые, являющиеся продолжением хорд. По чертежу и масштабу определяются длины хорд Δs_j и отрезков перпендикуляров h_j ($j = 1, 2, \ldots, k$). Величина F вычисляется как сумма произведений $\Delta s_j h_j$:

$$F = \sum_{j=1}^{k} \Delta s_j h_j. \qquad (2.47)$$

При вычислении F по формуле (2.47) должны учитываться знаки величин h_j. Знак определяется положением соответствующего перпендикуляра относительно угла β, образованного двумя касательными к средней линии тока, проведенными из точки A. Отрезки h_j перпендикуляров, расположенных вне угла β, считаются положительными, а отрезки перпендикуляров, расположенных внутри угла β, — отрицательными. Если точка A находится с вогнутой стороны средней линии тока, то все отрезки h_j положительны.

Металлорежущие станки с гидроприводом

Горизонтальная динамическая нагрузка металлорежущих станков с гидроприводом в интервале времени от 0 до T определяется по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
&R_x = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)\frac{T}{4};\\
&R_x = 2pf \sin\frac{\pi}{\alpha}\omega t \ \text{при} \ \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)\frac{T}{4} \leqslant t < \left(1 + \frac{\alpha}{\pi}\right)\frac{T}{4};\\
&R_x = 0 \ \text{при} \left(1 + \frac{\alpha}{\pi}\right)\frac{T}{4} \leqslant t < \left(3 - \frac{\alpha}{\pi}\right)\frac{T}{4};\\
&R_x = -2pf \sin\frac{\pi}{\alpha}\omega t \ \text{при} \ \left(3 - \frac{\alpha}{\pi}\right)\frac{T}{4} \leqslant t < \left(3 + \frac{\alpha}{\pi}\right)\frac{T}{4};\\
&R_x = 0 \ \text{при} \left(3 + \frac{\alpha}{\pi}\right)\frac{T}{4} \leqslant t \leqslant T,
\end{aligned}\right\} \qquad (2.48)$$

где

$$\alpha = 0{,}07 \frac{QG}{f^2 p} \omega. \qquad (2.49)$$

В формулах (2.48) и (2.49) обозначено: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — период возвратно-поступательного движения; p — давление в гидросистеме; f — площадь поршня гидроцилиндра; Q — производительность насоса гидропривода в *л/мин*; G — вес возвратно-поступательно движущихся частей.

Функция, определяемая формулами (2.48), может быть разложена в тригонометрический ряд:

$$R_x = b_1 \sin \omega t + b_3 \sin 3\omega t + b_5 \sin 5\omega t + \ldots, \quad (2.50)$$

где

$$b_{2n+1} = \frac{8}{\pi} pf \times$$

$$\times \left\{ \frac{\cos\left[\left(\frac{\pi}{\alpha} - n - \frac{5}{4}\right)\pi + \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}\right] \sin\left[\frac{\pi}{4} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}\right]}{\frac{\pi}{\alpha} - 2n - 1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos\left[\left(\frac{\pi}{\alpha} + n - \frac{1}{4}\right)\pi - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}\right] \sin\left[\frac{\pi}{4} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}\right]}{\frac{\pi}{\alpha} + 2n + 1} \right\} \quad (2.51)$$

$$\text{при} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 \neq (2n+1)^2$$

и

$$b_{2n+1} = 2\frac{\alpha}{\pi} pf \left[\cos\frac{\pi(\pi - \alpha)}{2\alpha} - \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi(3\pi - 2\alpha)}{2\alpha}\right] \quad (2.52)$$

$$\text{при} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 = (2n+1)^2, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Плоскопечатные типографские машины

Горизонтальная динамическая нагрузка, приложенная к центру тяжести возвратно-поступательно движущихся частей, определяется по следующим формулам.

а) Для машин типа ДП и ПД:

$$R_x = \frac{27\sqrt{3}}{4\pi} mr\omega^2 \left[-\sin \omega t + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}} \sin 3\omega t - \frac{1}{2} \sin 5\omega t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5} \sin 7\omega t \ldots - \frac{16 \cos \frac{n\pi}{6} \sin \frac{n\pi}{2}}{(3^2 - n^2)\sqrt{3}} \sin n\omega t + \ldots \right], \quad (2.53)$$

где r — эксцентриситет пальца ведущей шестерни.

б) Для машин типа АПМ:

$$R_x = 2r\omega m \frac{h}{q} \cdot \frac{d\Omega(\omega t)}{dt}; \quad (2.54)$$

$$\left.\begin{aligned}
\Omega(\omega t) = \frac{\cos[\omega t + \arccos(A - B\cos\omega t) - \delta_1]}{\sqrt{1-(A-B\cos\omega t)^2}} \times \\
\times \left(\sin\delta - \alpha k\cos\delta + \frac{\alpha}{2}\sin 2\delta\right); \\
\delta_1 = \arcsin\frac{h\sin\omega t}{\sqrt{C+D\cos\omega t}} - \arcsin\frac{e\sqrt{1+(A-B\cos\omega t)^2}}{\sqrt{C+D\cos\omega t}}; \\
\delta = \delta_1 + \psi - \tau; \\
A = \frac{e^2+q^2-h^2-p^2}{2eq}; \quad B = \frac{hp}{eq}; \\
C = h^2 + p^2; \quad D = 2hp.
\end{aligned}\right\} \quad (2.55)$$

Здесь приняты следующие обозначения: r — радиус кривошипа кривошипно-шатунного механизма; L — длина шатуна; e, p, q, h — длины элементов четырехзвенного механизма (рис. 2.7); d — расстояние от оси вращения криво-

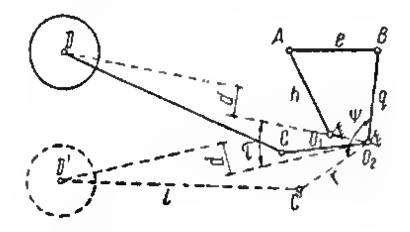


Рис. 2.6. Схема механизмов машины типа АПМ

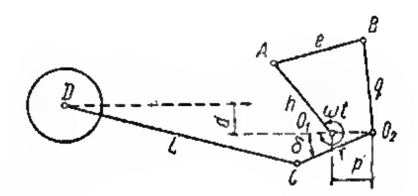


Рис. 2.7. Расчетная схема механизмов машины типа АПМ

шипа кривошипно-шатунного механизма до оси перемещения подвижной шестерни; $\alpha = r/L$ — характеристическое число кривошипно-шатунного механизма; $k = d/r$; ψ — угол между кривошипом кривошипно-шатунного механизма и ведомым кривошипом четырехзвенного механизма; τ — угол, на который необходимо повернуть кривошипно-шатунный механизм O_2CD (рис. 2.6) вместе с подвижной шестерней вокруг оси O_2 для того, чтобы точка O_1 оказалась на горизонтальной линии, соединяющей точки O_1 и O_2, т. е. чтобы основной шарнирный механизм привода талера мог быть представлен схемой, изображенной на рис. 2.7.

Функция $\Omega(\omega t)$, определяемая формулами (2.55), может быть разложена в тригонометрический ряд. Коэффициенты ряда вычисляются численными методами на основе исходных данных по кинематике механизма.

в) Для машин типа МП:

$$R_x = 2r\omega^2 m(\cos\omega t + \alpha k\sin\omega t + \alpha\cos 2\omega t), \qquad (2.56)$$

где r — радиус кривошипа; $\alpha = r/L$ — характеристическое число кривошипно-шатунного механизма; L — длина шатуна; $k = d/r$; d — расстояние от оси вращения кривошипа до оси перемещения подвижной шестерни.

В формулах (2.53) — (2.56) приняты следующие обозначения: ω — круговая частота возвратно-поступательных движений талера в $сек^{-1}$; m — масса возвратно-поступательно движущихся частей; t — время.

Штампмашины

Работа штампмашин характеризуется возможным неустановившимся режимом штампования и появлением ударов при соединении вала механизма неавтоматических прессов с валом непрерывно вращающегося маховика. Кривошипные и эксцентриковые неавтоматические прессы имеют в качестве основных движущихся частей кривошипный вал или эксцентрик, шатун и ползун; пресс-автоматы — кривошипный вал и шатун с одной стороны и ползун, колонки и траверзу — с другой.

Для штампмашин определяются следующие динамические нагрузки.

1. Момент от внезапного присоединения к маховику дополнительных масс

$$M_1 = \frac{J_1 \omega}{t_1}, \qquad (2.57)$$

где ω — круговая частота вращения маховика в $сек^{-1}$; t_1 — время, в течение которого происходит присоединение дополнительных масс к маховику; J_1 — максимальный момент инерции кривошипного вала, шатуна и ползуна, внезапно присоединяющихся к маховику, приведенный к оси маховика.

При $t_1 < 0{,}02$ *сек* определяется импульс момента

$$S_{M_1} = J_1 \omega. \qquad (2.58)$$

В пресс-автоматах момент M_1 невелик и возникает только при пуске машины.

2. Момент от замедления вращения маховика при выполнении штамповочной операции

$$M_2 = Pr \sin \alpha - 974 \frac{W}{N}, \qquad (2.59)$$

где P — максимальное усилие штампмашины; r — радиус кривошипа или эксцентриситет эксцентрика; α — угол, образованный вертикалью и линией, соединяющей ось вала с осью эксцентрика, при встрече пуансона штампа с деталью; W — мощность двигателя в киловаттах; N — число оборотов главного вала машины в 1 *мин*.

Если привод пресса от асинхронного двигателя, то время, в течение которого действует момент M_2, определяется по формуле

$$t_2 = \frac{J\omega}{M_2} \cdot \frac{S_k - S_n}{1 - S_n}, \qquad (2.60)$$

где J — момент инерции всех движущихся частей, приведенный к валу маховика; S_k — критическое скольжение двигателя, которое можно вычислить по формуле

$$S_k = S_n \left(k + \sqrt{k^2 - 1}\right); \qquad (2.61)$$

S_n — номинальное скольжение двигателя; k — отношение величины максимального момента на валу двигателя к номинальному.

Для пресс-автоматов момент M_2 часто является основной динамической нагрузкой.

3. Момент, возникающий при торможении отключенного кривошипного или эксцентрикового вала,

$$M_3 = \frac{2J_1 \omega}{t_3}, \quad (2.62)$$

где t_3 — время торможения.

В пресс-автоматах этот момент не возникает.

4. Вертикальная нагрузка, возникающая при движении неуравновешенных масс,

$$R_z = r\omega^2 m_z \cos \omega t, \quad (2.63)$$

где m_z — масса частей, участвующих в вертикальном движении, определяемая по формуле

$$m_z = \frac{r_1}{r} m_1 + m_2 + m_3, \quad (2.64)$$

r_1 — расстояние от оси вращения до центра тяжести кривошипа; m_1 — масса кривошипа; m_2 — масса возвратно-поступательно движущихся частей; m_3 — масса шатуна.

Для пресс-автоматов сила R_z часто является основной динамической нагрузкой.

5. Горизонтальная нагрузка, возникающая при движении неуравновешенных масс,

$$R_x = r\omega^2 m_x \sin \omega t, \quad (2.65)$$

где m_x — масса частей, участвующих в горизонтальном движении, определяемая по формуле

$$m_x = m_2 + \frac{L_1}{L} m_3, \quad (2.66)$$

L_1 — расстояние от центра тяжести шатуна до пальца кривошипа; L — длина шатуна.

6. Момент и вертикальная нагрузка, возникающие при освобождении пуансона от реакции детали в конце штамповочной операции, должны определяться экспериментально. Для всех видов штампмашин эти нагрузки обычно наибольшие из всех указанных.

2.3. Определение динамических нагрузок от машин с номинально уравновешенными, а фактически неуравновешенными движущимися частями

В таких машинах возникают динамические нагрузки, определяемые величиной центробежной силы,

$$R = me\omega^2, \quad (2.67)$$

где R — нормативная амплитуда динамической силы; m — масса движущихся частей машины; e — амплитуда перемещения центра масс; ω — круговая частота вращения главного вала машины.

Величина m представляет собой полную массу вращающихся частей: в центрифугах — масса барабана и вала вместе с заполнением; для металлорежущих станков с главным вращательным движением (токарные, сверлильные и т. п.) — масса вращающейся заготовки или инструмента со шпинделем; в вентиляторах, электромашинах и турбинах — масса ротора и вала, а в грохотах это масса коробов и 25% массы обрабатываемого материала, находящегося одновременно на ситах грохота.

Поскольку эксцентрицитеты e носят случайный характер и вызваны неточностью балансировки, разработкой подшипников, влиянием обрабатываемого материала и т. п., то нормирование их производится на основе результатов экспериментальных исследований. В табл. 2.3 приводятся значения величины e для некоторых машин.

Таблица 2.3

Значение эксцентрицитета e для некоторых машин

Машина	e	Примечание
Грохот	$\frac{a}{5}$	a — амплитуда колебаний коробов в соответствующем направлении
Центрифуга	$\frac{D}{1000}$	D — диаметр ротора. Для вычисления нормативного динамического момента берется плечо силы, равное половине длины ротора
Молотковая дробилка	1 *мм*	За расчетную динамическую силу от молотковых дробилок принимается увеличенная в 4 раза центробежная сила, возникающая при отрыве одного молотка. Для вычисления нормативного динамического момента (при рабочем режиме дробилки) берется плечо силы, равное половине расстояния между осями подшипников; для вычисления расчетного динамического момента (в аварийном режиме) следует принимать плечо силы, равное половине расстояния между крайними рядами молотков
Металлорежущий станок с главным вращательным движением	$\frac{d}{10}$	d — диаметр обрабатываемой детали или вращающегося инструмента. Сила считается приложенной к центру тяжести вращающихся частей, динамический момент не учитывается
Вентилятор с горизонтальной осью, располагаемый на междуэтажных перекрытиях	0,5 *мм*	В вентиляторах, рабочие колеса которых подвергались лишь статической балансировке, учитывается нормативный динамический момент, вычисляемый при эксцентрицитете, равном $e_1=0{,}3+0{,}001\,D$, где D — диаметр ротора в *мм*, и при плече пары, равном половине ширины ротора b.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аникин С. Г. Определение расчетной величины динамической нагрузки, действующей на фундаменты турбогенераторов. Сборник информационных материалов Мосэнерго, ч. I. Госэнергоиздат, 1946.
2. Артоболевский И. И., Артоболевский С. И., Эдельштейн В. В. Теория и методы уравновешивания щековых дробилок. ОНТИ НКТП СССР, 1937.
3. Баркан Д. Д. Динамика оснований и фундаментов. Стройвоенмориздат, 1948.
4. Безухов К. И. Фундаменты металлорежущих станков. Свердловск, Машгиз, 1947.
5. Инструкция по расчету несущих конструкций промышленных зданий и сооружений на динамические нагрузки. Стройиздат, 1970.
6. Инструкция по проектированию и расчету виброизоляции машин с динамическими нагрузками и оборудования, чувствительного к вибрациям (И 204-55/МСПМХП). Госстройиздат, 1956.
7. Инструкция по определению динамических нагрузок от машин, устанавливаемых на перекрытиях промышленных зданий. Стройиздат, 1966.

8. Кобринский А. Е. Динамические нагрузки в кулачковых механизмах с упругим толкателем. Труды семинара по теории машин и механизмов, т. VI, вып. 24. Изд-во АН СССР, 1949.

9. Коренев Б. Г., Мартышкин В. С., Сысоев В. И., Шейнин И. С. Динамические нагрузки и виброизоляция центрифуг. В сб.: «Центрифугостроение в СССР», 1963.

10. Корчинский И. Л. Динамические нагрузки машин с вращающимися частями. Сб. ЦНИПС «Исследования по динамике сооружений». Стройиздат, 1951.

11. Муйземнек Ю. А. Усилия и нагрузки в конусных гирационных дробилках. «Машиностроение», 1964.

12. Колебания зданий и сооружений. Сб. ЦНИИСК. Под ред. Б. Г. Коренева. Стройиздат, 1963.

13. Сорокин Е. С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. Госстройиздат, 1956.

14. Технические условия проектирования фундаментов под машины с динамическими нагрузками (СН 18-58). Госстройиздат, 1958.

15. Технические условия проектирования фундаментов под машины с динамическими нагрузками (ТУ 60-49). Стройиздат, 1949.

16. Штейнвольф Л. И. Динамические расчеты машин и механизмов. Машгиз, 1961.

РАЗДЕЛ 3

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

(Е. С. Сорокин)

В этом разделе рассматриваются основные динамичсеике характеркстики строителькых матеркалов и конструкций (упругие, неупругие к прочносткые) к способы их учета в динамических расчетах сооружений ка периодические к импульсивкые нагрузкк. К ким откосятся: 1) диномическая жесткость при циклическом процессе деформирования; 2) вкутреннее трение, обусловливающее рассеяние энергии циклических деформаций во внешнюю среду; 3) выносливость или динамическая прочность при циклическом процессе деформирования.

Все характеристики даются при умеренном уровне динамических деформаций и их скоростей. Ударная жесткость и ударная прочность, т. е. жесткость и прочность при высокоскоростном процессе деформировакия, вызваиком приложением мощных однократных импульсов (взрывов и т. п.), исключаются из рассмотрения. Объясняется это тем, что эксплуатационные динамические нагрузки, действующие ка промышленные конструкции и сооружения, обычно невелики по сравнению со статическкми[1].

3.1. Динамическая жесткость

Фактическая жесткость элементов строительных конструкций, в отличие от жесткости воображаемых кокструкций из идеального линейко-упругого изотропного однородного материала, не может быть определена как некоторая постоянная величина, так как она может зависеть от скорости и закона изменения напряжений во времени, уровня статических и динамических напряжений, температуры, влажности и т. д.

Различаются понятия «статической» и «динамической» жесткости элементов строителькых конструкций. Под «статической» понимается жестиость, определяемая при медлекных процессах деформирования конструкций, которая вводится в расчет сооружений ка статические нагрузки. Под «динамической» будем понимать жесткость, определяемую при достаточко быстрых циклических процессах деформкрования коиструкций (обычно по частотам собственкых колебаний), которая вводктся в расчет сооружений на динамические нагрузки.

Статкческая жесткость при длителькои действии нагрузки меньше динамической вследствие влияния деформацкй ползучести и релаксации напряжений и зависит от времени, отсчитываемого после начала нагружения. Динамическая жесткость завксит от периода колебаний, но для традиционных строительных материалов (сталь, дерево, железобетон, кирпичная кладка) в пределах обычных частот периодических нагрузок она меняется слабо, приближаясь к статической жесткости, определяемой из кратковременных испытаний при низком уровне капряжений.

---

[1] Исключение представляют динамические нагрузки на сооружения в сейсмических районах, правила расчета и проектирования которых предусмотрены соответствующими нормами, инструкциями и руководствами.

При назначении расчетного значения статической жесткости исходят из предельного состояния по прочности или по деформациям, достигаемого при полной расчетной статической нагрузке. Поэтому расчетному значению статической жесткости соответствуют верхние пределы статических напряжений или деформаций.

При действии же динамических нагрузок нижним значениям жесткостей элементов конструкции необязательно соответствуют верхние значения амплитуд колебаний и динамических напряжений; часто бывает наоборот, и это объясняется тем, что амплитуды зависят в большой степени от отношения основного периода собственных колебаний конструкции к периоду циклической нагрузки или к продолжительности действия импульсивной нагрузки. Поэтому расчетное значение динамической жесткости должно быть по возможности ближе к ее фактическому значению и, следовательно, должно назначаться как наиболее вероятное ее значение при данных эксплуатационных условиях. Фактические же значения жесткостей элементов конструкции обычно выше значений, принимаемых в статических расчетах, вследствие того, что фактическая статическая нагрузка обычно не достигает расчетной величины, а в конструкции имеются неучтенные запасы жесткости (обусловленные пространственной работой монолитной конструкции, влиянием жесткости пола или заполнений и т. п.). Кроме того, динамическая жесткость выше статической вследствие того, что при циклической нагрузке исключаются деформации ползучести, влияние трещин сказывается меньше, а модуль упругости с повышением частоты циклов возрастает.

Хотя из сказанного следует, что при назначении расчетного значения динамической жесткости в целях приближения его к фактическому значению следует учитывать влияние многих факторов, тем не менее учет их влияния встречает большие затруднения. Эти затруднения можно обойти, вводя в динамический расчет некоторое среднее значение динамической жесткости и наряду с этим возможные пределы отклонения фактического значения динамической жесткости от этого среднего расчетного значения в ту и другую сторону. Относительные пределы этих отклонений задаются как двузначные погрешности определения частот собственных колебаний конструкции, определяемые путем сравнения расчетных и опытных значений частот [4]. Опыты в натурных условиях [4] показывают, что эти средние значения динамической жесткости близки к статической жесткости, определенной в предположении упругой работы материала.

Следовательно, динамическую жесткость элементов строительных конструкций при расчете на умеренные динамические нагрузки (периодические и импульсивные) можно определять исходя из упругой стадии работы материала и считать равной произведению динамического модуля упругости на соответствующую геометрическую характеристику поперечного сечения элемента. Исключение представляют случаи мощных динамических нагрузок, вызывающих появление макропластических деформаций, которые здесь не рассматриваются [1].

При динамическом расчете стальных и деревянных конструкций динамические модули упругости можно принимать равными статическим, определяемым без учета последействия (при кратковременных испытаниях). При расчете кирпичных зданий на горизонтальные колебания модуль сдвига принимается равным 0,3E, где E — модуль упругости кирпичной кладки на сжатие.

При динамическом расчете изгибаемых элементов железобетонных каркасных зданий, а также монолитных железобетонных конструкций перекрытий и покрытий, плит и балок, лежащих на упругом основании, днищ и стенок резервуаров расчетные динамические жесткости можно принимать равными жесткости сплошного бетонного сечения (без учета арматуры), при этом динамический модуль упругости бетона принимается равным нормативному значению $E_б$ в соответствии с действующими нормами проектирования железобетонных конструкций. Отклонения расчетного значения динамической жестко-

[1] Во избежание недоразумений отметим, что в расчете конструкций на периодические нагрузки так называемым «методом динамических жесткостей» в термин «динамическая жесткость» вкладывается совершенно другой смысл.

сти изгибаемых железобетонных элементов от ее фактического значения, которые могут быть существенными вследствие зависимости динамической жесткости от уровня статических напряжений и других факторов, учитываются назначением больших относительных погрешностей определения частот собственных колебаний железобетонных конструкций [4].

3.2. Внутреннее трение

Определения

При циклических деформациях (колебаниях) конструкции часть энергии этих деформаций необратимо поглощается и рассеивается в виде тепла во внешнюю среду вследствие внутреннего трения в материале, трения проскальзывания в соединениях элементов конструкции («конструкционного гистерезиса»), внутреннего трения в деформируемом основании, а также внешних сопротивлений (трения скольжения в опорах и аэродинамического сопротивления). Аэродинамическое сопротивление для обычных конструкций незначительно (вследствие их большой жесткости), и главную роль в общем рассеянии энергии колебаний конструкции играют обычно три первых фактора, объеди-

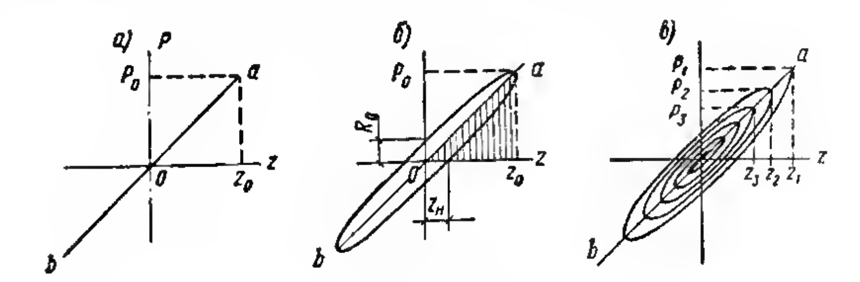


Рис. 3.1. Зависимости силы P от перемещения z

а — для идеально упругой системы; *б* — для системы с внутренним трением при гармонических колебаниях; *в* — для системы с внутренним трением при свободных колебаниях

няемые под общим названием «внутреннее трение в конструкции». В сборных железобетонных конструкциях, выполненных по разрезной схеме, заметную роль в общем рассеянии энергии может играть также сухое трение в опорах, которое по способу его учета как диссипативного фактора в задачах динамики может быть отнесено условно к внутреннему трению[1].

Объяснение природы внутреннего трения в традиционных строительных материалах следует искать в неоднородности структуры материала.

Внутреннее трение в строительных конструкциях играет важную благоприятную роль, являясь причиной быстрого затухания свободных колебаний конструкции, возбуждаемых ударами, и ограничения амплитуд резонансных колебаний при действии периодических нагрузок.

При циклических деформациях идеально упругой линейной системы действующая на нее внешняя циклическая сила P прямо пропорциональна упругому перемещению z системы и зависимости P (z) при нагрузке и разгрузке совпадают, представляя собой прямую линию ab (рис. 3.1, *а*). Для реальной же системы, обладающей внутренним трением, эта зависимость нелинейна и двузначна и представляет собой при установившихся циклах нагрузки и разгрузки замкнутую кривую, называемую петлей гистерезиса. При гармонических

---

[1] Кроме того, сухое трение в опорах может влиять на условия их закрепления, повышая общую динамическую жесткость конструкции.

колебаниях петля представляет эллипс (рис. 3.1, *б*) с центром в начале координат P, z, а при свободных колебаниях зависимость $P(z)$ представляет собой эллиптическую спираль (рис. 3.1, *в*).

Площадь замкнутой петли гистерезиса пропорциональна работе ΔW, совершаемой силами внутреннего трения за один цикл деформации, а площадь заштрихованного треугольника (рис. 3.1, *б*) пропорциональна работе W упругих сил за четверть цикла при возрастании деформации от 0 до максимума. Отношение

$$\psi = \frac{\Delta W}{W} = 2\pi \frac{z_н}{z_0} = 2\pi \frac{R_0}{S_0}, \tag{3.1}$$

характеризующее величину рассеянной за цикл энергии в долях энергии W, называется коэффициентом поглощения энергии. Здесь z_0 и $z_н$ — амплитуды упругой и неупругой деформации, а $S_0 = P_0$ и R_0 — амплитуды упругой и неупругой силы соответственно (рис. 3.1, *б*). При свободных колебаниях, когда амплитуда деформации переменна и изменяется по монотонно снижающейся кривой $z_0 = z_0(t)$ (рис. 3.2), по определению

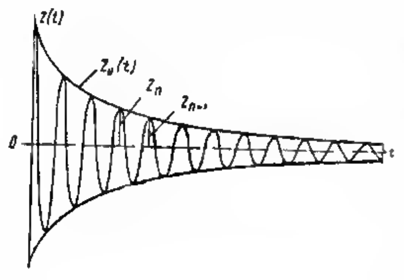


Рис. 3.2. Свободные затухающие колебания $z(t)$ и их огибающая $z_0(t)$

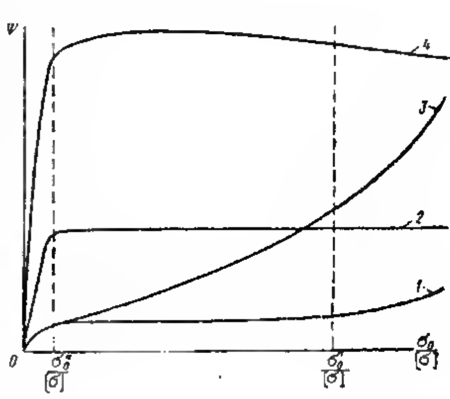


Рис. 3.3. Зависимости коэффициента поглощения ψ от амплитуды напряжения σ_0 для строительных материалов

1 — Ст.3, алюминий; *2* — дерево, стекло, резина; *3* — машиностроительные стали; *4* — бетон, железобетон, кирпичная кладка

$$\psi = -\int_t^{t+T} \frac{dW}{W}, \tag{3.2}$$

где T — период цикла. Подставляя сюда

$$W = \frac{c}{2} z_0^2(t),$$

где c — коэффициент упругости системы, получим:

$$\psi = -2 \int_t^{t+T} \frac{dz_0}{z_0} = 2 \ln \frac{z_n}{z_{n+1}} = 2\delta, \tag{3.3}$$

где $\delta = \ln z_n - \ln z_{n+1}$ — логарифмический декремент колебаний; z_n и z_{n+1} — ординаты огибающей $z_0(t)$ и $z_0(t+T)$ соответственно в n-м и $(n+1)$-м циклах.

Соотношения (3.1) и (3.3) справедливы для неупругих сопротивлений любой природы и любого закона затухания во времени.

Если коэффициент ψ или δ меняется с изменением амплитуды z_0, он должен определяться как функция амплитуды наибольшего напряжения (нормального σ_0 — при колебаниях изгиба и сжатия-растяжения и касательного τ_0 — при колебаниях кручения), соответствующей амплитуде перемещения z_0 при установившихся колебаниях и ординате огибающей

$$z_0 = \sqrt{\frac{z_n^2 - z_{n+1}^2}{2(\ln z_n - \ln z_{n+1})}} \approx \frac{z_n + z_{n+1}}{2} \qquad (3.4)$$

при свободных затухающих колебаниях.

Опытные данные

Как показывают опыты, коэффициент внутреннего поглощения ψ зависит от амплитуды напряжения, но зависимость эта различна для разных материалов и разных уровней напряжений. На рис. 3.3 показан характер этой зависимости для некоторых строительных материалов при колебаниях изгиба; на оси абсцисс отложены отношения $\sigma_0/[\sigma]$, где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение (для железобетона — $[\sigma]$ арматуры). Общим для всех материалов является почти линейный рост коэффициента ψ с ростом σ_0 в области очень малых амплитуд напряжений. В этой области ψ возрастает от 0 до некоторого более или менее стабильного значения ψ_0, соответствующего малой амплитуде напряжения σ_0^* (приблизительно $\sigma_0^* = 0{,}025\ [\sigma]$). При дальнейшем увеличении σ_0 коэффициент ψ для дерева, целлулоида, стекла, резины остается постоянным, для стали марки Ст. 3 и алюминия он медленно возрастает в области средних и быстрее в области больших амплитуд напряжений; для бетона и железобетона он слабо возрастает, а затем начинает медленно снижаться. Для многих машиностроительных сталей и цветных металлов коэффициент ψ непрерывно быстро возрастает с увеличением амплитуды напряжения, начиная с $\sigma_0 = 0$. Все эти зависимости $\psi(\sigma_0)$, имеющие одну или две точки перегиба, можно удовлетворительно аппроксимировать аналитическим выражением

$$\psi = \psi_0 \left(\frac{\sigma_0}{\alpha + \sigma_0} + \beta\sigma_0^k\right), \qquad (3.5)$$

где ψ_0, α, β и k — постоянные параметры. Аналогичные зависимости $\psi(\sigma_0)$ наблюдаются и для натурных конструкций из соответствующих материалов.

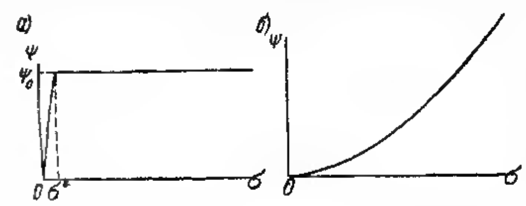


Рис. 3.4. Расчетные зависимости коэффициента поглощения от амплитуды напряжения σ_0

а — для строительных материалов и конструкций; *б* — для машиностроительных материалов и конструкций

Для строительных конструкций промышленных зданий, где динамические нагрузки обычно малы по сравнению со статическими (исключением являются сейсмические нагрузки), практический интерес представляет область напряжений от 0 до σ_0', для которой зависимость $\psi(\sigma_0)$ можно заменить более простой приближенной зависимостью (рис. 3.4, *а*). Тогда для области малых напряжений (от 0 до σ_0^*), важной в тех случаях, когда уровень колебаний следует ограничивать, исходя из требований санитарных норм и технологии точных производственных процессов, ψ можно считать линейно возрастающим от 0 до ψ_0 и представлять зависимостью (3.5), полагая $\alpha = \infty$, $\beta = \sigma_0^{*-1}$, $k = 1$:

$$\psi = \psi_0 \frac{\sigma_0}{\sigma_0^*} \left(0 < \sigma_0 \leqslant \sigma_0^*\right). \quad (3.6)$$

При среднем уровне напряжений по рис. 3.3 (от σ_0^* до $\sigma_0' \approx 0{,}5\,[\sigma]$), а в случае кривой 2 — для всей области напряжений от σ_0^* до $[\sigma]$, ψ можно принимать постоянным [полагая в (3.5) $\alpha = \beta = 0$]:

$$\psi = \psi_0, \ \left(\sigma_0 > \sigma_0^*\right). \quad (3.7)$$

Для задач машиностроения, где динамические нагрузки на элементы машин могут быть большими и область малых напряжений не имеет обычно практического значения, зависимость $\psi(\sigma_0)$ можно заменить при расчете приближенной (рис. 3.4, *б*), получающейся из (3.5) при $\alpha = \infty$, $\beta_0 = \psi_0\beta$:

$$\psi = \beta_0\,\sigma_0^k. \quad (3.8)$$

Коэффициент ψ зависит от вида напряженного состояния материала при колебаниях (сжатия-растяжения изгиба, кручения), однако установить связь между значениями ψ при разных видах колебаний пока не удалось.

Для традиционных строительных и машиностроительных материалов ψ практически не зависит от скорости деформации (и, следовательно, от частоты колебаний)[1], а также от температуры в пределах ее естественных колебаний (от —30° С до +40° С). Для некоторых типов пластмасс ψ может зависеть от частоты колебаний и от температуры; для таких материалов ψ следует считать функцией амплитуды напряжения σ_0, круговой частоты ω и температуры $T° : \psi = \psi(\sigma_0, \omega, T°)$.

Для всех материалов ψ не зависит от размеров образца, но зависит от его формы (в частности, от формы поперечного сечения); зависимость ψ от формы можно учесть аналитическим путем.

Колебания строительных конструкций происходят около положения статического равновесия, соответствующего обычно значительным статическим напряжениям σ_c, т. е. при существенно несимметричных циклах напряжений. Коэффициент ψ с увеличением показателя динамичности цикла напряжения $s = \sigma_0/\sigma_c$ при $\sigma_0 = \text{const}$ обычно несколько возрастает, однако для большинства материалов зависимость $\psi(\sigma_c)$ слабая и в практических расчетах можно принимать $\psi(\sigma_c) = \text{const}$.

В формулы динамического расчета коэффициент поглощения ψ всегда входит в виде отношения к числу 2π, характеризующему цикличность процесса деформаций, поэтому в расчетах вводится коэффициент

$$\gamma = \frac{\psi}{2\pi} = \frac{\delta}{\pi}, \quad (3.9)$$

называемый коэффициентом неупругого сопротивления. Величина $1/\gamma$ при гармонических колебаниях системы с одной степенью свободы равна отношению $z_{рез}/z_c$, где $z_{рез}$ — максимальная амплитуда колебаний системы при резонансе; z_c — перемещение системы при статическом действии силы, равной амплитуде гармонической возмущающей силы.

В табл. 3.1 приведены средние значения $\psi_{ср}$ и $\gamma_{ср}$ для некоторых строительных конструкций, полученные различными авторами при разных условиях опытов и разными методами. Там же указаны диапазоны изменения значений ψ, полученные для каждой конструкции. Широта этих диапазонов объясняется сильным возрастанием ψ с увеличением амплитуд напряжений в области их малых значений (см. рис. 3.3), при которых обычно и производились испытания натурных конструкций. При этом уровень амплитуд напряжений экспериментаторами, как правило, не фиксировался.

[1] Этот факт установлен многочисленными опытами, описанными в отечественной и зарубежной литературе [5].

Таблица 3.1

Значения коэффициента поглощения ψ для строительных конструкций (поперечный изгиб)

Конструкция	Значение ψ от	Значение ψ до	Значение ψ среднее	Значение $\gamma_{ср}$	Автор исследования
Стальные мосты	0,04	0,3	0,17	0,027	С. А. Бернштейн
	0,02	0,29	0,17	0,027	С. А. Ильясевич
» дымовые трубы	0,08	0,16	0,11	0,0175	М. Ф. Барштейн
Железобетонные ребристые перекрытия	0,39	0,78	0,57	0,091	Е. С. Сорокин
Железобетонные безбалочные перекрытия	—	—	0,56	0,089	Хорт
Железобетонные крупнопанельные перекрытия высотных зданий:					
а) до замоноличивания стыков	0,2	0,24	0,22	0,035	О. И. Томсон
б) после замоноличивания стыков	0,44	0,6	0,52	0,083	О. И. Томсон
Железобетонные перекрытия	0,32	0,57	0,44	0,07	М. Росен
Железобетонные своды по стальным балкам	0,36	1	0,68	0,108	М. Ф. Барштейн
Кирпичные своды по стальным балкам	0,47	0,9	0,68	0,108	Е. С. Сорокин
Железобетонные подкрановые балки:					Е. С. Сорокин
а) до замоноличивания стыков	0,24	0,4	0,32	0,051	Е. С. Сорокин
б) после замоноличивания стыков	0,38	0,56	0,47	0,075	Е. С. Сорокин
Железобетонные балки . .	0,35	0,78	0,56	0,089	Н. П. Павлюк
» рамы . .	0,35	0,45	0,38	0,061	Н. П. Павлюк
	0,16	0,33	0,25	0,04	О. А. Савинов
» мосты .	—	—	0,63	0,1	М. Росен
Деревянные клееные балки	—	—	0,12	0,019	И. Л. Корчинский, В. С. Мартышкин
Деревянные балки на гвоздях с перекрестной стенкой	0,17	0,41	0,3	0,048	Р. О. Мелик-Адамян
Деревянное перекрытие по коробчатым клееным балкам	0,23	0,43	0,33	0,053	Р. О. Мелик-Адамян
Перекрытие по деревоплите	0,38	0,47	0,42	0,067	Р. О. Мелик-Адамян
Обычное деревянное перекрытие	—	—	0,35	0,056	Р. О. Мелик-Адамян
Модели самонесущих кирпичных стен толщиной в 0,5 кирпича	0,2	0,55	0,37	0,059	А. И. Рабинович
Кирпичная кладка (сжатая) на сложном растворе марки 30	—	—	0,24	0,038	Б. К. Карапетян
Каменная кладка (сжатая):					Б. К. Карапетян
а) на цементном растворе марки 100	—	—	0,19	0,03	Б. К. Карапетян
б) на сложном растворе марки 30	—	—	0,22	0,035	Б. К. Карапетян
в) на известковом растворе марки 4	—	—	0,33	0,053	Б. К. Карапетян

В табл. 3.2 даны значения $\gamma_0 = \frac{\psi_0}{2\pi}$ для различных материалов, которые рекомендуется принимать в динамических расчетах строительных конструкций, выполненных из этих материалов, при средних значениях амплитуд напряжений, соответствующих обычно действию машин III и IV категорий по динамичности [4]. Здесь ψ_0 — постоянный коэффициент поглощения, соответствующий области средних амплитуд напряжений (рис. 3.4, *а*), определяемой неравенством в (3.7). Если полученная в результате расчета амплитуда напряжения σ_0 попадает в область малых амплитуд напряжений ($\sigma_0 \leqslant \sigma_0^*$), следует расчет повторить, принимая значение γ, определяемое по формуле, соответствующей (3.6):

$$\gamma = \gamma_0 \frac{\sigma_0}{\sigma_0^*}, \ \left(0 < \sigma_0 \leqslant \sigma_0^*\right). \tag{3.10}$$

Таблица 3.2

Расчетные коэффициенты неупругого сопротивления γ_0 материала в конструкциях для области средних напряжений ($\sigma_0 > \sigma_0^*$)

Материал	Бетон и железобетон	Кирпичная кладка	Дерево	Сталь прокатная
Коэффициент γ_0	0,1	0,08	0,05	0,025

Если же конструкция находится под воздействием машин I или II категорий по динамичности, то амплитуды напряжений в конструкции обычно не превышают σ_0^* и γ следует определять по формуле (3.10). Но поскольку амплитуда напряжений σ_0 заранее неизвестна, так как сама зависит от γ, рекомендуется в этом случае принимать для γ в предварительном динамическом расчете постоянное значение

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{2} \tag{3.11}$$

и затем в уточненном расчете принимать значение γ либо по формуле (3.10), либо $\gamma = \gamma_0$ в зависимости от значения σ_0, найденного предварительным расчетом.

Значения коэффициента γ_0 в табл. 3.2 близки к средним значениям коэффициента $\gamma_{ср}$ для соответствующих конструкций в табл. 3.1. Исключение представляет кирпичная кладка, поскольку для нее значения $\gamma_{ср}$ определялись для малых амплитуд напряжений.

Способ учета внутреннего трения

Для учета влияния внутреннего трения на напряженное состояние конструкций при колебаниях устанавливается зависимость в системе с внутренним трением между полным переменным напряжением и полной переменной деформацией, состоящей из упругой и неупругой. Очевидно, закон Гука здесь уже неприменим. Эта зависимость рассматривается на примере одноосного напряженного состояния образца материала, находящегося в процессе гармонического деформирования. Она формулируется на основе опытных данных следующим образом.

Вектор переменной деформации отстает по фазе от вектора переменного напряжения на угол χ, зависящий от коэффициента неупругого сопротивления γ [5]:

$$\chi = \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{1 - \gamma^2/_4}. \qquad (3.12)$$

Эту зависимость наиболее удобно выразить в комплексной форме, поскольку, как известно из теории комплексных функций действительного переменного, сдвиг вектора по фазе на угол χ достигается умножением этого вектора на $e^{i\chi}$. Таким образом, можно записать:

$$\sigma^* (t) = E_0 e^{i\chi} \varepsilon^* (t), \qquad (3.13)$$

где σ^* и ε^* — соответственно комплексные напряжение и относительная деформация (звездочкой здесь и в дальнейшем обозначаются комплексные величины); t — время; E_0 — нормальный модуль упругости материала; i — мнимая единица.

Переход от показательной формы числа $e^{i\chi}$ к алгебраической с заменой χ выражением (3.12) приводит к следующей зависимости:

$$\sigma^* (t) = E_0 (a + ib) \varepsilon^* (t) = (a + ib) \sigma^*_{у} (t), \qquad (3.14)$$

где $\sigma^*_{у} = E_0 \varepsilon^*$ — напряжение в идеально упругой системе ($\gamma = 0$);

$$a = \frac{4 - \gamma^2}{4 + \gamma^2}; \quad b = \frac{4\gamma}{4 + \gamma^2}{}^{*}. \qquad (3.15)$$

Очевидно, $|\sigma^*(t)| = E_0|\varepsilon^*(t)|$ или $\sigma_0 = E\varepsilon_0$, т. е. между амплитудами переменного напряжения и переменной деформации сохраняется закон Гука Представив зависимость (3.14) в виде:

$$\sigma^* (t) = E_{у} \varepsilon^* (t) + E_{н} \varepsilon^* (t) e^{i\frac{\pi}{2}} = \widetilde{\sigma}^*_{у} (t) + \sigma^*_{н} (t), \qquad (3.16)$$

где $E_{у} = aE_0$; $E_{н} = bE_0$; $\widetilde{\sigma}^*_{у}$, $\sigma^*_{н}$ — соответственно упругие и неупругие модули и комплексные напряжения в системе с внутренним трением, можно дать ей иную формулировку: вектор неупругого напряжения отстает по фазе от вектора упругого напряжения на угол $\pi/2$. При малых значениях γ можно принимать $a = 1$, $b = \gamma$. С возрастанием γ увеличивается пластичность материала и при $\gamma = 2$, когда в (3.15) $a = 0$, $b = 1$ и, следовательно, $E_{у} = 0$, $E_{н} = E_0$ материал становится абсолютно неупругим (пластичным).

Если γ не зависит от уровня напряжений, выражение (3.14), вследствие его линейности, справедливо не только для гармонических, но и для периодических и квазигармонических[1] процессов деформирования. Этот наиболее простой случай важен потому, что для многих строительных материалов γ можно считать постоянным почти на всем диапазоне напряжений (за исключением узкой области очень малых напряжений).

В общем виде уравнение колебаний любой упругой системы можно записать как условие равновесия в смысле Даламбера всех действующих на систему сил. Для линейных систем (при линейной упругой силе) его удобнее записывать в комплексной форме, используя комплексную зависимость (3.16)

$$J^* (t) + \widetilde{S}^* (t) + R^* (t) + Q^* (t) = 0. \qquad (3.17)$$

Здесь J^*, $\widetilde{S}^*$, R^* и Q^* — соответственно комплексные силы инерции, упругости, внутреннего трения и внешнего возмущения. При постоянном γ зависимость суммарной внутренней силы $\widetilde{S}^* + R^*$ в системе с внутренним трением

---

* В теории внутреннего трения [5] величины (3.15) обычно обозначались через u и v. Переход к обозначениям (3.15) связан с необходимостью использования этих зависимостей в динамической теории упругости, где через u и v обозначают перемещения деформируемого тела.

[1] С медленно меняющимися амплитудой и частотой.

от упругой силы S^* в идеально упругой системе ($\gamma=0$) будет такой же, как и зависимость (3.14) суммарного напряжения σ^* от напряжения σ_y^*:

$$\widetilde{S}^* + R^* = (a + ib) S^*. \qquad (3.18)$$

Если же γ является функцией амплитуды напряжения, зависимость (3.18) будет точной для однородного напряженного состояния и приближенной для неоднородного напряженного состояния. В последнем случае точное выражение для суммарной внутренней силы можно получить из (3.14) по правилам теории упругости [3].

Из (3.18) видно, что сила внутреннего трения $R^*=ibS^*$ отстает по фазе на угол $\pi/2$ от упругой силы $\widetilde{S}^*=aS^*$. Подстановка (3.18) в (3.17) дает:

$$J^* + (a + ib) S^* + Q^* = 0. \qquad (3.19)$$

Из (3.19) следует удобное правило составления уравнения колебаний любой линейной системы с внутренним трением. Для этого надо составить уравнение колебаний соответствующей идеально упругой системы, считать все силы комплексными и умножить упругую силу на комплексный коэффициент ($a+$ $+ib$). Например, для системы с одной степенью свободы с массой m, коэффициентом упругости c, на которую действует гармоническая возмущающая сила с амплитудой Q_0, круговой частотой ω и начальной фазой μ, дифференциальное уравнение колебаний с учетом внутреннего трения в комплексной форме будет иметь вид:

$$m\ddot{z}^* + (a + ib) cz^* = Q_0 e^{i(\omega t+\mu)}, \qquad (3.20)$$

где z^* — комплексное перемещение. Общее решение комплексного уравнения (3.20) содержит две комплексные (или четыре вещественные) произвольные постоянные, для которых одна (или пара вещественных) исключается из условия устойчивости решения:

$$0 \leqslant \lim_{t\to\infty} |z^*| \leqslant M(Q_0), \qquad (3.21)$$

где M — ограниченное положительное число, зависящее от амплитуды возмущающей силы Q_0. При $Q_0=0$ (свободные колебания) $M=0$. После удовлетворения условию (3.21) вещественная часть комплексного перемещения z^*, соответствующая вещественной части комплексной возмущающей силы, при заданных начальных условиях является общим решением поставленной задачи. Метод интегрирования уравнений типа (3.20) изложен, например, в [5]. Вещественные решения имеют следующий вид: для свободных колебаний ($Q_0=$ $=0$) после удовлетворения начальным условиям $z(0)=z_0$, $\dot{z}(0)=v_0$:

$$z=a_0 e^{-\frac{\gamma}{2}pt} \cos(pt + \alpha), \qquad (3.22)$$

где

$$a_0 = \sqrt{z_0^2 + \left(\frac{v_0}{p} + \frac{\gamma}{2} z_0\right)^2}; \quad \operatorname{tg}\alpha = -\left(\frac{v_0}{pz_0} + \frac{\gamma}{2}\right), \qquad (3.23)$$

и для установившихся вынужденных колебаний

$$z = \frac{Q_0 \cos(\omega t + \mu + \beta)}{mp^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2} - \frac{\gamma^2}{4}\right)^2 + \gamma^2}}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{-\gamma}{1 - \frac{\omega^2}{p^2} - \frac{\gamma^2}{4}}. \qquad (3.24)$$

Здесь p — круговая частота свободных затухающих колебаний

$$p = \frac{p_0}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}}; \quad p_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \qquad (3.25)$$

а p_0 — круговая частота незатухающих колебаний (при $\gamma=0$).

Из (3.22) логарифмический декремент колебаний получается равным $\delta = \pi\gamma$ в соответствии с его определением (3.9). Из (3.24) при $\omega \to 0$ получается амплитуда колебаний, равная статическому перемещению системы под действием силы Q_0: $z_0 = z_c = Q_0/c$, а при $\omega = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}\, p = \sqrt{a}\, p_0$ получается максимум амплитуды колебаний при резонансе, равный:

$$(z_0)_{\text{рез}} = \frac{z_c}{\gamma}. \qquad (3.26)$$

Эти выводы согласуются с опытными данными по колебаниям систем, упругим элементом которых служит образец из материалов, характеризующихся постоянным коэффициентом внутреннего трения γ. Напротив, выводы из решений, соответствующих гипотезе Фойгта о пропорциональности внутреннего трения скорости деформаций, не подтверждаются этими опытными данными. Так, декремент δ в соответствии с опытом и формулой $\delta = \pi\gamma$ не зависит от частоты колебаний, тогда как по гипотезе Фойгта он пропорционален ей. Из опыта и из формулы (3.25) не наблюдается критического затухания ни при каких значениях c и m, тогда как по гипотезе Фойгта такие значения c и m существуют. Резонансная амплитуда в соответствии с опытом и формулой (3.26) не зависит от резонансной частоты колебаний, а по гипотезе Фойгта она получается обратно пропорциональной этой частоте. Гипотеза Фойгта не учитывает также зависимость коэффициентв поглощения от напряжений.

Если коэффициент γ зависит от уровня амплитуд напряжений σ_0, то он должен вводиться в уравнения колебаний как соответствующая функция амплитуды перемещения $\gamma(z_0)$, которая согласно (3.5) и (3.6) в общем случае имеет вид:

$$\gamma = \gamma_0 \left(\frac{z_0}{\alpha_0 + z_0} + \beta_0 z_0^k\right). \qquad (3.27)$$

Уравнение (3.20) в этом случае становится нелинейным относительно амплитуды перемещения z_0, но остается линейным относительно искомой функции времени $z(t)$ и имеет постоянные коэффициенты в задачах об установившихся вынужденных колебаниях и переменные коэффициенты в задачах о свободных колебаниях. Способы интегрирования таких уравнений изложены в работах [3, 5].

Интегрирование уравнения (3.20) возможно также и в более общих случаях, когда γ является известной функцией нескольких параметров — амплитуды перемещения z_0, частоты ω, температуры $T°$, числа циклов n и т. п., что может представлять интерес при динамическом расчете конструкций из пластмасс некоторых типов, для которых коэффициент γ чувствителен к изменению указанных параметров.

3.3. Выносливость

Определения

Под усталостью материала понимается его состояние, характеризующееся возникновением локальных очагов разрушения (усталостных трещин) вследствие длительного воздействия переменного циклического напряжения данного вида. Наибольшая абсолютная величина такого напряжения может быть значительно меньше соответствующего предела статической прочности материала и тем меньше, чем больше амплитуда циклического напряжения в сравнении с его постоянной (статической) составляющей. Поэтому проверка конструкции на усталость приобретает первостепенное значение в тех случаях, когда конструкция подвергается систематическому воздействию циклических напряже-

ний, амплитуда которых не очень мала в сравнении со статическим напряжением в конструкции.

По современным воззрениям усталость, как и внутреннее трение, связывается с неоднородностью микроструктуры материала, которая, вызывая весьма неравномерное распределение напряжений по элементарным площадкам, обусловливающее появление микропластических деформаций в частицах материала, приводит к различным результатам в случаях длительного действия постоянной (статической) и переменной (динамической) нагрузок [1].

Способность материала противостоять усталости, т. е. выдерживать, не разрушаясь, определенный уровень переменного циклического напряжения при заданном числе циклов напряжений, называют выносливостью материала. Наибольшую абсолютную величину максимума циклического напряжения (равного сумме его среднего и амплитудного значений), которую материал способен выдерживать не разрушаясь при сколько угодно большом числе циклов напряжений, называют пределом выносливости материала.

В качестве циклического воздействия при испытаниях материалов на выносливость обычно применяют гармоническую нагрузку. В дальнейшем под циклической будет подразумеваться гармоническая нагрузка.

Предел выносливости материала зависит от показателя динамичности цикла напряжений s, равного отношению амплитуды циклического (динамического) напряжения σ_0 (величины существенно положительной) к среднему (статическому) напряжению цикла σ_c, относительно которого меняется циклическое напряжение и которое всегда считается положительным:

$$s = \frac{\sigma_0}{\sigma_c}. \tag{3.28}$$

Возможные значения s заключены в пределах $0 \leqslant s \leqslant \infty$. Максимальное $\sigma_{макс}$ и минимальное $\sigma_{мин}$ напряжения цикла связаны с напряжениями σ_c и σ_0 соотношениями:

$$\sigma_{макс} = \sigma_c + \sigma_0; \quad \sigma_{мин} = \sigma_c - \sigma_0 \tag{3.29}$$

или

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{макс} + \sigma_{мин}}{2}; \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_{макс} - \sigma_{мин}}{2}. \tag{3.30}$$

За $\sigma_{макс}$ принимается напряжение, наибольшее по абсолютной величине, которое считается положительным. Являются ли σ_c или $\sigma_{макс}$ напряжениями растяжения или сжатия, должно оговариваться особо.

Вместо показателя динамичности цикла напряжений s в литературе чаще вводится коэффициент асимметрии цикла напряжений ρ (или r):

$$\rho = \frac{\sigma_{мин}}{\sigma_{макс}}, \tag{3.31}$$

значения которого при оговоренном правиле знаков заключены в пределах $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$. Коэффициенты ρ и s связаны зависимостями:

$$\rho = \frac{1-s}{1+s}; \quad s = \frac{1-\rho}{1+\rho}. \tag{3.32}$$

Значениям $s=0$ или $\rho=1$ соответствует только статическое напряжение; значениям $s=\infty$ или $\rho=-1$ — только динамическое напряжение или симметричный цикл (рис. 3.5, *а*); значениям $s=1$ или $\rho=0$ — так называемый пульсирующий или односторонний цикл (рис. 3.5, *б*); значениям $0<s<1$ или $0<\rho<1$ соответствуют знакопостоянные несимметричные циклы (рис. 3.5, *в*), а значениям $1<s<\infty$ или $-1<\rho<0$ — знакопеременные несимметричные циклы (рис. 3.5, *г*) *.

* При обычном правиле знаков напряжений ($+\sigma$ для растягивающих, $-\sigma$ для сжимающих) s и ρ менялись бы в пределах $-\infty \leqslant s \leqslant +\infty$, $-\infty \leqslant \rho \leqslant 1$, а пульсирующему циклу отвечали бы значения $\rho=0$ при растяжении и $\rho=-\infty$ при сжатии, что было бы неудобным для расчетов.

Предел выносливости σ^* есть наибольшее значение суммы напряжений σ_c и σ_0, которое материал способен воспринимать, не разрушаясь при данной базе (числе циклов) испытаний n^*:

$$\sigma^* = \sigma_{макс} = \sigma_c + \sigma_0. \tag{3.33}$$

Из двух величин σ_c и σ_0 (или $\sigma_{макс}$ и $\sigma_{мин}$) одна является независимой (задаваемой в опыте), другая определяется из опыта в зависимости от заданной.

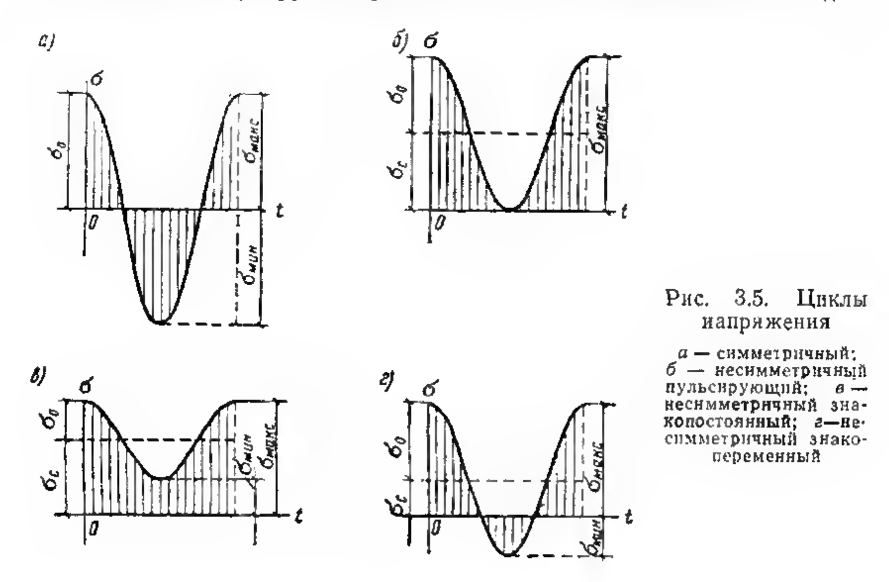


Рис. 3.5. Циклы напряжения

а — симметричный; *б* — несимметричный пульсирующий; *в* — несимметричный знакопостоянный; *г*—несимметричный знакопеременный

ной. В опытах и расчетах на выносливость за независимую величину, помимо указанных, принимают нередко их отношения s (3.28) или ρ (3.31); можно принимать также коэффициент динамичности цикла напряжений, равный:

$$\beta = \frac{\sigma_0}{\sigma_c + \sigma_0} = \frac{\sigma_{макс} - \sigma_{мин}}{2\sigma_{макс}} = \frac{s}{1+s} = \frac{1-\rho}{2}, \tag{3.34}$$

значения которого заключены в пределах $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Этим пределам отвечает действие только статических ($\beta = 0$) или только динамических ($\beta = 1$) напряжений, а значению $\beta = 0{,}5$ соответствует пульсирующий цикл. Из (3.33) и (3.34) следует, что $\sigma_0 = \beta\sigma^*$. Предел выносливости σ^* при выбранной базе испытаний n^* является искомой функцией любой из величин β, σ_c, $\sigma_{мин}$, s, ρ. Будем для определенности считать его функцией β: $\sigma^* = f(\beta)$, зная которую можно определить σ^* как функцию любой из остальных переменных с помощью соотношений (3.34).

В опытах о величине σ^* можно судить только определив величину предела усталости σ^*_y, т. е. наименьшего разрушающего циклического напряжения, и приняв $\sigma^* \approx \sigma^*_y$. Но поскольку в одном опыте невозможно предугадать величину σ^*, вводится понятие частных или ограниченных пределов усталости σ^*_n, отвечающих числу циклов $n < n^*$ и являющихся функцией уже двух переменных β и n: $\sigma^*_n = \varphi(\beta, n)$. Из опытов определяют именно ограниченные пределы усталости σ^*_n. Для этого производят серию опытов над образцами-близнецами, доводя каждый из них до разрушения при различных напряжениях.

уменьшаемых ступенями, начиная с временного сопротивления и измеряя число циклов n в момент разрушения, которое увеличивается с уменьшением напряжения. Таким образом, искомое число циклов, при котором образец разрушается, является функцией $n=F(\sigma_n^*, \beta)$.

По результатам опытов над серией образцов обычно строятся кривые $\sigma_n^* = \varphi(n)$ либо $\sigma_n^*=\varphi(\lg n)$, вид которых показан на рис. 3.6. Из рис. 3.6 видно,

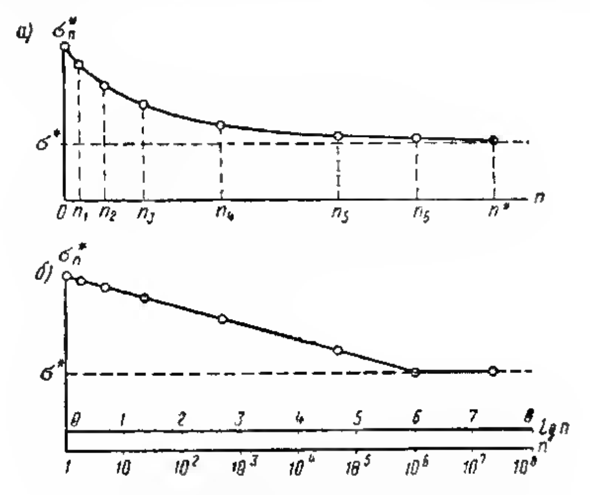


Рис. 3.6. Графики разрушающего напряжения

а — в зависимости от числа циклов n; *б* — в зависимости от $\lg n$

что предел усталости σ^*, отвечающий значению $n=n^*$, практически совпадает с ординатой «асимптоты» кривой $\sigma_n^*(n)$ или прямой $\sigma_n^*(\lg n)$, параллельной оси n.

Опытные данные

Влияние статической составляющей напряжения σ_c. Результаты опытов по изучению пределов выносливости σ^* для различных материалов — сталей, цветных металлов, бетона, железобетона, дерева, пластмасс и др. — показывают, что при любом виде напряженного состояния предел выносливости существенно зависит от величины σ_c и, следовательно, должен рассматриваться как функция σ_c или любого другого параметра (β, ρ, s, $\sigma_{мин}$), выраженного через σ_c. На рис. 3.7—3.9 даны зависимости σ^* (σ_c), соответствующие опытным данным различных авторов, систематизированным в работах [2, 4]*. Опытные точки хорошо ложатся на плавные кривые и только для бетона наблюдается разброс точек, требующий проведения корреляционной прямой [2]. По осям координат отложены значения σ^* и σ_c в долях временного сопротивления $\sigma_в$ при действии статической нагрузки, определяемого стандартным путем (кратковременным нагружением). Верхние концы всех кривых продолжены пунктиром до точки, соответствующей $\sigma_в$. В действительности кривые должны сходиться, очевидно, в точке, соответствующей временному сопротивлению $\sigma_в^д$ при

* В дальнейшем ссылки даются не на первоисточники, а на монографии [2, 4], в которых приведена соответствующая литература.

длительном действии статической нагрузки (в течение времени испытаний). Эта точка $\sigma_в^д/\sigma_в$ должна лежать немного ниже и левее точки (1,1), однако опытных данных для ее определения нет.

Опытные зависимости на рис. 3.7—3.9 представляются либо пологими кривыми, обращенными выпуклостью вверх, либо прямыми. Эти два типа за-

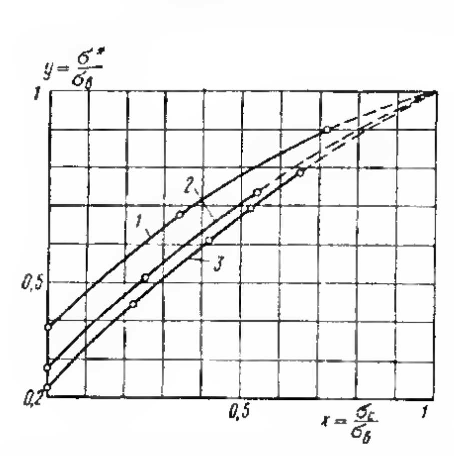


Рис. 3.7. Зависимости предела выносливости σ^* от статического напряжения σ_c по опытам Велера на изгиб сталей с различными временными сопротивлениями $\sigma_в$ (*кгс/мм²*)

1 — 37; 2 — 81,5; 3 — 90,5

Рис. 3.8. Зависимости предела выносливости σ^* от статического напряжения σ_c при растяжении-сжатии сталей с различными временными сопротивлениями $\sigma_в$ (*кгс/мм²*)

1 — 50; 2 — 36; 3 — 62; 4 — 41,5; 5 — 63; 6 — 48,7 (алюминиевый сплав)

висимостей $\sigma^*(\sigma_c)$ (рис. 3.10) хорошо аппроксимируются одним уравнением, содержащим два параметра — пределы усталости σ_0^* и σ_1^* соответственно при симметричном и каком-либо несимметричном цикле напряжений, отвечающие значениям $\sigma_c=0$ и $\sigma_c=\sigma_{c1}$:

$$y=a+(1-a)\,x+b\sqrt{x(1-x)}\,, \tag{3.35}$$

где обозначено

$$y=\frac{\sigma^*}{\sigma_в};\quad x=\frac{\sigma_c}{\sigma_в};\quad a=\frac{\sigma_0^*}{\sigma_в}; \tag{3.36}$$

$$b=\frac{y_1-a-(1-a)\,x_1}{\sqrt{x_1(1-x_1)}};\quad y_1=\frac{\sigma_1^*}{\sigma_в};\quad x_1=\frac{\sigma_{c1}}{\sigma_в}.$$

При $b=0$ получается уравнение прямой (рис. 3.10):

$$y=a+(1-a)\,x,\quad (0\leqslant x\leqslant 1), \tag{3.37}$$

для определения которой достаточно знать один параметр a. В случае материалов, для которых вид кривой $\sigma^*(\sigma_c)$ не изучался и значение σ_1^* неизвестно, можно в запас выносливости пользоваться уравнением (3.37).

Помимо σ_c, по оси абсцисс можно откладывать значения других переменных — $\sigma_{мин}$, ρ, β и s (наиболее употребительны из них $\sigma_{мин}$ и ρ), для перехода к которым служат соотношения при обозначениях (3.36) и $\xi = \sigma_{мин}/\sigma_в$:

$$x = \frac{y + \xi}{2} = y\,\frac{1 + \rho}{2} = y\,(1 - \beta) = \frac{y}{1 + s}\,. \tag{3.38}$$

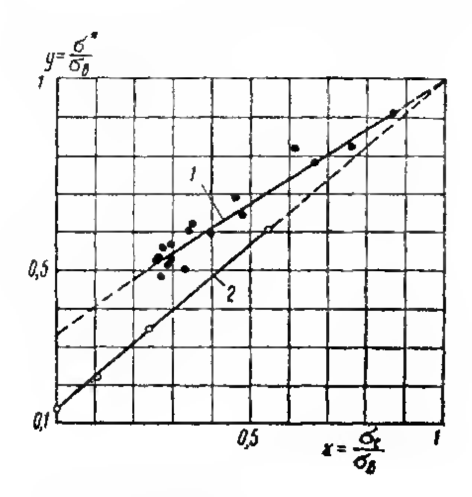


Рис. 3.9. Зависимости предела выносливости σ^* от статического напряжения σ_c

1 — бетон на сжатие (опыты многих авторов); *2* — стеклопластик ВФТ-С ($\sigma_в$ = =14,6 *кгс/мм²*, опыты Ф. П. Белянкина и др.) [2]

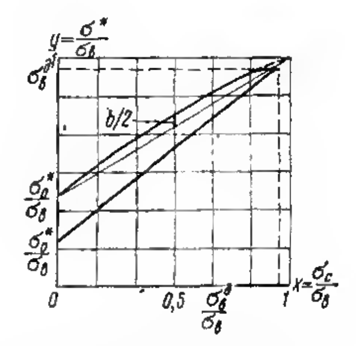


Рис. 3.10. Типичные зависимости предела выносливости σ^* от статического напряжения σ_c

В новых переменных ξ, ρ, β и s уравнение прямой (3.37) преобразуется в уравнения следующих видов:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{2a}{1 + a} + \frac{1 - a}{1 + a}\,\xi, \quad (-a \leqslant \xi \leqslant 1); \\ y &= \frac{2a}{1 + a - (1 - a)\,\rho}\,, \quad (-1 \leqslant \rho \leqslant 1); \\ y &= \frac{a}{a + (1 - a)\,\beta}\,, \quad (0 \leqslant \beta \leqslant 1); \\ y &= \frac{a\,(1 + s)}{a + s}\,, \quad (0 \leqslant s \leqslant \infty). \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

В тех же переменных можно написать группу уравнений, соответствующих (3.35), которые здесь не приводятся. На рис. 3.11 линиями *1* и *2* показаны зависимости (3.37) и (3.35) от различных переменных при значениях $a = 0{,}25$ и $b = 0{,}2$*. Наиболее удобна, по-видимому, зависимость $y(x)$ (3.37)

Пределы выносливости материалов при $\sigma_c = 0$. Из сказанного следует, что предел выносливости σ_0^* при симметричном цикле напряжений ($\sigma_c = 0$) явля-

* Для s принята неравномерная шкала $s/1+s$.

ется важной характеристикой, позволяющей определить предел выносливости при любой величине статического напряжения точно, если зависимость σ^* (σ_c) линейна, и в запас выносливости, если эта зависимость нелинейна. В табл. 3.3 приведены значения σ_0^* в долях $\sigma_в$ для некоторых материалов при растяжении

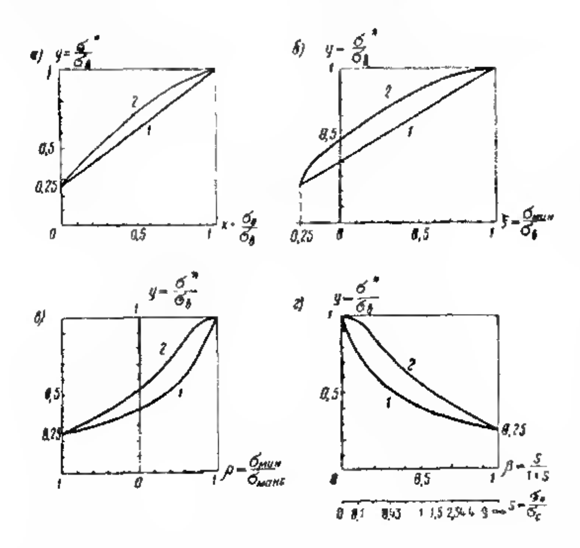


Рис. 3.11. Зависимости предела выносливости σ^* от разных аргументов

а — σ^* (σ_c); *б* — σ^* ($\sigma_{мин}$); *в* — σ^* (ρ); *г* — σ^* (β); *1* — для линейной зависимости σ^* (σ_c); *2* — для нелинейной зависимости σ^* (σ_c)

и сжатии, а также предела текучести $\sigma_т$, предельного удлинения ε и базы n^* [2]. Среднее значение σ_0^* составляет для сталей $0{,}26\sigma_в$, для дерева и стеклопластиков $0{,}30\sigma_в$, наименьшее и наибольшее значения σ_0^* для сталей в табл. 3.3 отличаются между собой вдвое ($0{,}22\sigma_в$ и $0{,}45\sigma_в$).

Влияние вида напряженного состояния. Предел выносливости материала при циклических деформациях существенно зависит от вида напряженного состояния. В табл. 3.4 [2] для некоторых материалов даны пределы выносливости в долях $\sigma_в$ при симметричных циклах напряжений изгиба, растяжения-сжатия и кручения. Сведения о химическом составе и термообработке сталей приведены в работе [2]. Для полимеров пределы усталости отнесены к временным сопротивлениям, соответствующим данному виду деформаций, которые указаны в знаменателях дробей. Средние значения $\sigma_0^*/\sigma_в$ для некоторых материалов, полученные путем обработки более ранних опытных данных [4], приведены в табл. 3.5. Из табл. 3.4 и 3.5 видно, что для металлов минимум $\sigma_0^*/\sigma_в$ соответствует кручению, максимум — изгибу; пределы усталости сталей при изгибе, сжатии-растяжении и кручении относятся приблизительно как числа 1,8 : 1,3 : 1.

Влияние размеров и формы образца. Предел усталости снижается с увеличением размеров образца, причем степень снижения тем меньше, чем больше размеры и чем однороднее напряженное состояние материала. Наиболее сильное влияние масштабного фактора получено в опытах Леера [4] на изгиб вращающихся валов из сталей семи различных марок (снижение σ_0^* на 35% с увеличением d с 15 до 100 *мм*). В опытах же на растяжение-сжатие круглых стальных образцов получено снижение σ_0^* всего на 5% с увеличением d с 7 до 35 *мм* [4]. Снижение σ_0^* с увеличением размеров образца имеет во всех случаях быстро затухающий характер. Аналогичные результаты получены для углеродистых и легированных сталей [2]. Эти закономерности тесно

Таблица 3.3 [2]

Пределы выносливости при симметричном цикле напряжений растяжения-сжатия

Материал	$\sigma_в$, *кгс/мм²*	$\sigma_т$, *кгс/мм²*	ε, %	$n^* \cdot 10^{-6}$	$a=\sigma_0^*/\sigma_в$
Ст.3	36—37	—	—	2	0,31—0,32
Ст.3 для сварочных мостов	45	—	—	2	0,31—0,33
Ст.5	54	—	—	2	0,3
Углеродистая сталь С—0,37%	52—50,8	28,6—23,7	21—21,5	10	0,27—0,31
Углеродистая сталь С — 0,93%	59,1—81	23,5—47,5	25—23	10	0,24—0,31
Углеродистая сталь С — 0,49%	64,3	33,1	27	10	0,22
Углеродистая сталь С—0,36%	73,4	49,6	28	10	0,38
Сталь 15ГС	63	43,1	23,2	2	0,29
Легированная сталь Ni—3,5%	71,4	45,5	26	10	0,355
Стали 35ХМ, 34ХНМ, 35ХЕЗМА	105—110	—	—	10	0,45
Алюминиевый сплав 75S-T	59,7	54,4	10	10	0,183—0,27
Алюминиевый сплав 24S-T	50,2	36,3	18	10	0,252—0,308
Сосна	9,72	—	—	—	0,3
Ель	10	—	—	—	0,3
Стеклотекстолит на смоле:					
фенольной	33	—	—	10	0,28
эпоксидной	30	—	—	10	0,39
кремнеорганической . .	26	—	—	10	0,22

Таблица 3.4 [2]

Пределы выносливости σ_0^* при разных видах деформаций

Материал	$\sigma_в$, *кгс/мм²*	Значения $a=\sigma_0^*/\sigma_в$		
		изгиб	растяжение-сжатие	кручение
Сталь марки:				
10	34—42	0,51	0,37	0,27
20	45—50	0,43	0,31	0,255
30	48—60	0,435	0,35	0,215
45	60—75	0,435	0,325	0,26
40ХН	90	0,44	0,32	0,28
12ХН3А	95	0,455	0,31	0,25
ГУТАП 5140	90—100	0,435	0,30	0,25
25ХНВА	110	0,455	0,305	0,265

Продолжение табл. 3.4 [2]

Материал	$\sigma_в$, *кгс/мм²*	Значения $a=\sigma_0^*/\sigma_в$		
		изгиб	растяжение-сжатие	кручение
Сталь марки 18ХНВА . .	115	0,49	0,33	0,30
Средние значения для сталей	—	0,454	0,324	0,261
Алюминий	—	0,367	—	0,221
Сосна	—	$\frac{1,87}{7,50}=0,25$	$\frac{2,89}{9,72}=0,30$	$\frac{0,081}{0,33}=0,245$
Ель	—	$\frac{2,11}{7,57}=0,28$	$\frac{2,96}{10}=0,30$	$\frac{0,094}{0,36}=0,26$
Стеклопластик на смоле:				
а) фенольной	—	$\frac{13,2}{60,8}=0,22$	$\frac{9,15}{33}=0,28$	—
б) эпоксидной	—	$\frac{12}{47,3}=0,25$	$\frac{11,8}{30}=0,39$	—
в) полиэфирной (на основе мата)	—	$\frac{6,8}{24,2}=0,28$	$\frac{2,56}{10,2}=0,25$	—

Таблица 3.5

Средние значения $\sigma_0^*/\sigma_в$ для некоторых материалов при разных видах деформаций

Материал	$a=\sigma_0^*/\sigma_н$		
	изгиб	растяжение—сжатие	кручение
Стали разных марок	0,5	0,38	0,27
Чугун серый	0,42	—	0,38
Цветные металлы	0,36	—	0,21
Сосна	0,33	0,29	0,24

связаны со статистическим характером распределения дефектов в материале.

Аналогичное влияние на предел усталости при неоднородном напряженном состоянии оказывает форма поперечного сечения образца: чем более однородно распределение напряжений по сечению, обусловленное его формой, при данном максимальном напряжении, тем ниже σ_0^*.

Снижают предел усталости также резкие переходы от одного сечения образца к другому, что связано с концентрацией напряжений в местах переходов [4].

Влияние частоты циклических напряжений. Влияние на предел усталости материала закона изменения напряжений за цикл не изучено. Что касается влияния частоты циклической нагрузки на величину предела усталости, то все известные опыты приводят к выводу, что в диапазоне частот колебаний 1—100 *гц*, обычных для конструкций (по крайней мере, строительных), такое влияние практически отсутствует [2, 4].

Отсутствие влияния частоты циклов на предел выносливости и на коэффициент неупругого сопротивления γ традиционных строительных материалов лишний раз свидетельствует о тесной связи между явлениями усталости и внутреннего трения.

Влияние других факторов. Коррозионная среда (вода, влажный воздух, пары агрессивных газов) существенно снижает предел выносливости металлов, подверженных коррозии. При этом снижение предела усталости оказывается тем значительнее, чем больше время испытания образца при заданной базе n^* [2, 4].

На величину предела усталости влияет также состояние поверхности образца (чем больше на ней царапин или надиров, тем ниже предел усталости), тренировка циклическими напряжениями (повышающая предел усталости), термическая обработка и температура [2, 4].

Пределы выносливости соединений. Пределы выносливости различных типов соединений элементов металлических и деревянных конструкций могут быть существенно ниже, чем целых элементов. Причина снижения заключается

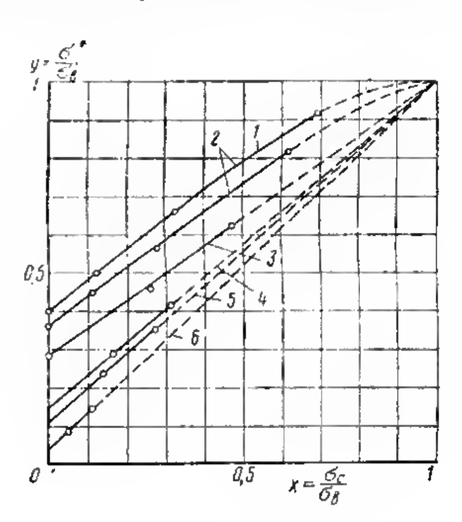


Рис. 3.12. Зависимости предела усталости соединений σ^* при растяжении-сжатии от статического напряжения σ_c

1 — St-57 ($\sigma_в$=50,5 *кгс/мм²*), эталонный образец основного металла; *2* — St-57, сварное соединение встык с обработкой шва; *3* — сталь 15ГС ($\sigma_в$=63 *кгс/мм²*), эталонный образец основного металла; *4* — сталь 15ГС, сварное соединение встык без обработки шва; *5* — сталь 15ГС, сварное соединение внахлестку с лобовыми швами 1 : 1,5; *6* — сталь 15ГС, сварное соединение внахлестку с фланговыми швами

в концентрации циклических напряжений в сварных швах, на контурах заклепочных отверстий, в местах скачкообразного перехода сечений в соединениях и т. д.

Снижение предела выносливости соединений можно характеризовать коэффициентом концентрации напряжений μ, учитывающим понижение предела выносливости σ_0^* при симметричном цикле, имея в виду, что временное сопротивление образцов с ослаблениями, как показывают опыты, не ниже, чем для тех же образцов, без ослаблений:

$$\mu = \frac{\sigma_0^*}{\tilde{\sigma}_0^*} = \frac{a}{\tilde{a}}, \tag{3.40}$$

где σ_0^* и $\tilde{\sigma}_0^*$ — пределы выносливости при симметричном цикле напряжений соответственно для основного металла и соединения; $a = \sigma_0^*/\sigma_в^*$, $\tilde{a} = \tilde{\sigma}_0^*/\sigma_в$.

С точки зрения расчета соединений на выносливость, важно отметить, что зависимости $\sigma^*(\sigma_c)$ для соединений и для цельного элемента конструкций по своему характеру аналогичны. На рис. 3.12 кривые *1* и *2* представляют эти

Таблица 3.6 [2]

Коэффициенты концентрации напряжений для соединений элементов и для ослабленных элементов конструкций

Конструкция	Тип соединения или ослабления	Характеристика типа соединения или ослабления	Коэффициент μ
Любая	Монолитный элемент без ослаблений, а также основной материал за пределами стыков и соединений		1
Стальная	Заклепочное	Горячая клепка	1,2
		Холодная клепка	1,35
		Пластины с отверстиями	1,4
	Ручная сварка встык	С обработкой швов	1,2
		Без обработки швов	1,5(2)*
		Элементы с приваренными фасонками	1,2
		Элементы с приваренными ребрами	1,7
	Ручная сварка внахлестку	С лобовыми швами 1 : 2** с их обработкой	1
		С лобовыми швами 1 : 2** без их обработки	1,1
		С лобовыми швами 1 : 3**	1,2
		С лобовыми швами 1 : 1,5** с их обработкой	1,7***
		С лобовыми швами 1 : 1** без их обработки	2,2***
		С лобовыми швами 1 : 1**	2,4
		С комбинированными швами — двумя фланговыми и одним лобовым	1,8
		С фланговыми швами	3,3(6,5)*
	Автоматическая сварка внахлестку	С дополнительными накладками	1,4
		С лобовыми швами 1 : 3** без их обработки	1,5
		С комбинированными швами — двумя фланговыми и одним лобовым	2,4
Из алюминиевых сплавов	Заклепочное	Из сплава Д1-Т с заклепками из сплава Д18-Т	1,72
		Из сплава АМ6I с заклепками из сплава В65-Т	1,77
		Пластины с отверстиями из сплавов АВ-Т1 и Д16-Т	1,4
	Полуавтоматическая аргоно-дуговая сварка пластин из сплава АМг6	Встык с наплавленным металлом	1,16
		Встык с обработанными швами	1,28
		Встык с необработанными швами	1,6
		Встык с промежуточной прокладкой	2,46
		Внахлестку с лобовыми швами	2,54
		Внахлестку с фланговыми швами	4,3
	Аргоно-дуговая сварка пластин из сплава АВ-ТУ	Автоматическая встык с обработанными швами	1,7

Конструкция	Тип соединения или ослабления	Характеристика типа соединения или ослабления	Коэффициент μ
Из алюминиевых сплавов	Аргоно-дуговая сварка пластин из сплава АВ — ТУ	Автоматическая встык с необработанными швами	2,5
		Ручная внахлестку с фланговыми швами	4,5
Составная деревянная	Ослабление по всей высоте изгибаемого сечения	Отверстие на всю высоту сечения	1,3
		Забивка гвоздей на всю высоту сечения	1,55
	Ослабление по наиболее напряженным волокнам изгибаемого сечения	Прямоугольная поперечная канавка	1,95
		Овальная поперечная вмятина	2,1

* Значение в скобках соответствует высокопрочным сталям ($\sigma_в > 60$ *кгс/мм²*).
** Отношение катетов шва.
*** Данные из работы [4].

зависимости соответственно для основного металла и сварного соединения встык с обработанным швом (опыты Рорра [2]). Прямые *3—6* построены по данным опытов Е. Е. Кочерговой [2]. Они сходятся в одной точке (*1,1*). Следовательно, уравнения (3.35), (3.37) и (3.39) справедливы и для соединений. Обычно для соединений принимается линейная зависимость:

$$y = \tilde{a} + (1 - \tilde{a})\,x, \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{3.41}$$

которая в случае, когда истинная функция $y(x)$ нелинейна, обеспечивает некоторый запас выносливости. Здесь, как видно из (3.40), $\tilde{a} = a/\mu$. Коэффициент μ вычисляется по формуле (3.40), если опытные данные соответствуют симметричному циклу напряжений ($x = 0$). Если же пределы выносливости основного металла и соединения определены при несимметричных циклах напряжений, соответствующих в первом случае значению $x = x_1$, а во втором — значению $x = x_2$, то коэффициент μ должен определяться по формуле, вытекающей из (3.37) при $x = x_1$ и из (3.41) при $x = x_2$:

$$\mu = \frac{a}{\tilde{a}} = \frac{(y_1 - x_1)(1 - x_2)}{(y_2 - x_2)(1 - x_1)}, \tag{3.42}$$

где y_1 и y_2 — относительные пределы выносливости для основного металла и соединения соответственно для значений x_1 и x_2.

Коэффициенты концентрации напряжений μ сведены в табл. 3.6 [2].

Расчетная проверка конструкций на выносливость. Для проверки конструкций на выносливость можно принять общую зависимость (3.35), хорошо согласующуюся с опытными данными, которая для соединений элементов конструкций после замены y и x их выражениями из (3.36) принимает вид:

$$\sigma^* = \sigma_в \tilde{a} + (1 - \tilde{a})\,\sigma_c + \tilde{b}\sqrt{\sigma_c(\sigma_в - \sigma_c)}, \quad (0 \leqslant \sigma_c \leqslant \sigma_в), \tag{3.43}$$

где $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ определяются по формулам (3.36) для a и b, в которых σ_0^* и σ_1^* соответствуют теперь соединениям. Для монолитных элементов конструкций без ослаблений $\tilde{a} = a$, $\tilde{b} = b$.

Обычно при проверке конструкций на выносливость принимается линейная зависимость $\sigma^*(\sigma_c)$, которая для одних материалов будет точной, а для дру-

гих — приближенной в запас выносливости. Эта зависимость получается из (3.43) при значении $\tilde{b}=0$. Если ввести для удобства записи характерную величину α, показывающую во сколько раз $\sigma_в$ больше σ_0^*:

$$\alpha = \frac{1}{a} = \frac{\sigma_в}{\sigma_0^*} > 1, \qquad (3.44)$$

так что на основании (3.40) $\tilde{a}=1/\mu\alpha$, можно эту зависимость записать в виде:

$$\sigma^* = \frac{\sigma_в}{\mu\alpha} + \frac{\mu\alpha - 1}{\mu\alpha}\sigma_c, \quad (0 \leqslant \sigma_c \leqslant \sigma_в). \qquad (3.45)$$

Ввиду разнообразия встречающихся в литературе формул для проверки на выносливость, причина которого в том, что разными авторами в качестве аргумента функции σ^* приняты разные переменные $\sigma_{мин}$, ρ, β и s, важно установить связь между этими формулами. Заменяя в (3.39) a на $\tilde{a}=(\mu\alpha)^{-1}$, получим для σ^* еще четыре выражения:

$$\sigma^* = \frac{\mu\alpha - 1}{\mu\alpha + 1}\sigma_{мин} + \frac{2\sigma_в}{\mu\alpha + 1}, \quad \left(-\frac{\sigma_в}{\mu\alpha} \leqslant \sigma_{мин} \leqslant \sigma_в\right); \qquad (3.46)$$

$$\sigma^* = \frac{2\sigma_в}{(\mu\alpha + 1) - (\mu\alpha - 1)\rho}, \quad (-1 \leqslant \rho \leqslant 1); \qquad (3.47)$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma_в}{1 + (\mu\alpha - 1)\beta}, \quad (0 \leqslant \beta \leqslant 1); \qquad (3.48)$$

$$\sigma^* = \frac{1 + s}{1 + \mu\alpha s}\sigma_в, \quad (0 \leqslant s \leqslant \infty). \qquad (3.49)$$

Представляет интерес еще формула особого вида, связывающая напряжения σ_c и σ_0, которая получается из (3.45) заменой σ^* его выражением (3.33):

$$\sigma_c + \mu\alpha\sigma_0 = \sigma_в \quad (0 \leqslant \sigma_c \leqslant \sigma_в). \qquad (3.50)$$

Все формулы (3.43), (3.45)—(3.50) с количественной стороны тождественны, однако с точки зрения удобства проверки на выносливость предпочтение следует отдать формулам (3.47)—(3.49). При проверке на выносливость вводится расчетный предел выносливости $\sigma^{вын}$, который получается из выражений для σ^* заменой $\sigma_в$ расчетным значением $\sigma_в^р$. Но так как по временному сопротивлению проверяются только хрупкие материалы (бетон, чугун и т. п.), а пластические материалы (стали, дерево и т. п.) проверяются по пределу текучести, то в последнем случае предел выносливости должен быть выражен через предел текучести путем замены $\sigma_в = \rho_0\sigma_т$.

Таким образом, расчетное сопротивление статической нагрузки $\sigma^р$ равно для хрупких материалов $\sigma^р = \sigma_в^р$, а для пластических $\sigma^р = \rho_0\sigma_т^р$, где $\rho_0 = \sigma_в/\sigma_т$. Проверка элементов конструкций на выносливость производится по формуле [4]

$$\sigma_c + \sigma_0 \leqslant \sigma^{вын}, \qquad (3.51)$$

где σ_c и σ_0 — статическое и динамическое напряжения, определяемые соответственно из статического и динамического расчетов конструкции. Расчетный предел выносливости, если для σ^* приняты выражения (3.47) — (3.49), можно представить удобной формулой

$$\sigma^{вын} = k^{вын}\sigma^р, \qquad (3.52)$$

где коэффициент выносливости $k^{вын}$ вычисляется по формулам:

$$k^{вын} = \frac{2}{\mu\alpha + 1 - (\mu\alpha - 1)\rho}, \quad (-1 \leqslant \rho \leqslant 1); \qquad (3.53)$$

$$k^{вын} = \frac{1}{1 + (\mu\alpha - 1)\beta}, \quad (0 \leqslant \beta \leqslant 1); \tag{3.54}$$

$$k^{вын} = \frac{1 + s}{1 + \mu\alpha s}, \; (0 \leqslant s \leqslant \infty). \tag{3.55}$$

Для получения же $\sigma^{вын}$ по формулам (3.45) и (3.46) в них следует произвести замену $\sigma_в$ на $\sigma^р$ и σ^* на $\sigma^{вын}$. Наконец, проверку на выносливость можно производить по формуле, соответствующей выражению (3.50):

$$\sigma_с + \mu\alpha\sigma_0 \leqslant \sigma^р. \tag{3.56}$$

В случае расчета по методике допускаемых напряжений во все предшествующие формулы следует вводить вместо расчетного сопротивления $\sigma^р$ допускаемое напряжение $[\sigma]$ (при статической нагрузке).

До сих пор все формулы для проверки на выносливость были выражены в напряжениях. Аналогичный вид будут иметь формулы, связывающие внутренние усилия. Обозначая через M внутреннее усилие любого вида (изгибающий момент, поперечную силу, продольную силу), через $M_с$ — внутреннее усилие от статической нагрузки, а через M_0 — амплитуду внутреннего усилия от динамической нагрузки, можно записать вместо (3.51)

$$M_с + M_0 \leqslant M^{вын}, \tag{3.57}$$

где

$$M^{вын} = k^{вын} M^р, \tag{3.58}$$

$k^{вын}$ определяется по формулам (3.53)—(3.55), а $M^р$ — допускаемое усилие, определяемое по расчетному сопротивлению $\sigma^р$ в предположении статического действия нагрузки. Формулу (3.56) также можно записать в усилиях:

$$M_с + \mu\alpha\, M_0 \leqslant M^р. \tag{3.59}$$

Что касается параметров α и μ, входящих во все эти формулы, то можно принимать для α значения, обратные числам a, приведенным в табл. 3.3—3.5, а для μ — значения из табл. 3.6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев Н. М. Статистическая теория усталостной прочности металлов. Киев, Изд. АН УССР, 1953.
2. Корчинский И. Л., Беченева Г. В. Прочность строительных материалов при динамических нагружениях. Стройиздат, 1966.
3. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. Физматгиз, 1960.
4. Сорокин Е. С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. Госстройиздат, 1956.
5. Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. Госстройиздат, 1960.
6. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Справочник. Изд. «Наукова думка», Киев, 1971.
7. Трощенко В. Г. Усталость и неупругость материалов. Изд. «Наукова думка», Киев, 1971.

РАЗДЕЛ 4

РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ НА ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ ОТ МАШИН

(А. И. Цейтлин)

В разделе рассматриваются практические методы расчета конструкций промышленных зданий и сооружений на действие эксплуатационных динамических нагрузок периодического характера. Основное внимание уделяется гармоническим нагрузкам — наиболее важному и часто встречающемуся случаю динамических воздействий, вызываемых работой машин и оборудования. Расчет сооружений на импульсивные нагрузки приведен в разделе 5.

В основу содержания раздела положены материалы нормативных документов по динамическому расчету строительных конструкций [1—3]*.

4.1. Динамические воздействия, передаваемые на несущие конструкции зданий и сооружений

Классификация динамических нагрузок

Промышленное оборудование периодического действия (машины, станки, установки и пр.), располагаемое в зданиях и сооружениях, а также вблизи них, является основным источником колебаний строительных конструкций. Эти колебания могут возбуждаться как в нормальном рабочем режиме работы оборудования, так и при его пуске, остановке или аварии. Уровень возбуждаемых колебаний зависит от характера передаваемого на конструкцию динамического воздействия (сила, момент) и закона изменения его во времени; расположения машин и способа их крепления к несущим конструкциям; направления передаваемых динамических воздействий; числа машин, работающих одновременно, и соотношений между характеристиками развиваемых ими нагрузок; статической схемы конструкций и распределения масс; динамических свойств материалов.

Основным видом динамических нагрузок, развиваемых промышленным оборудованием, являются периодические, в частности гармонические, нагрузки. Если возбуждаемая нагрузка имеет сложный закон изменения во времени, то при расчете конструкций ее раскладывают в ряд Фурье и ограничиваются одной-двумя первыми гармониками, т. е. рассматривают нагрузку как полигармоническую. Определение динамических нагрузок от машин, располагаемых на жестком основании, см. в разделе 2.

Динамические воздействия в зависимости от продолжительности вызываемых ими колебаний и периодичности действия можно разделить на эпизодические и систематические. К эпизодическим воздействиям относятся кратковременные перегрузки в аварийных режимах, нагрузки, возникающие при пуске и остановке машин во время перехода через резонанс, и т. д. К систематическим воздействиям относятся периодические нагрузки, связанные с регулярной работой машин и установок в рабочем режиме, при действии которых необходимо учитывать усталостные эффекты.

* См. также «Инструкцию по проектированию и расчету несущих конструкций зданий под машины с динамическими нагрузками» (И 200-54). Госстройиздат, 1955.

В зависимости от частоты развиваемой динамической нагрузки машины периодического действия делятся в нормативной литературе на три группы по частотности (табл. 4.1). Такое деление позволяет оценить характер воздействия нагрузки на конструкцию. Поскольку первые частоты собственных вертикальных колебаний конструкций промышленных зданий находятся обычно в диапазоне 8—20 *гц*, т. е. 480—1200 *цикл/мин*, то очевидно, что низкочастотные машины не могут в этом случае вызвать резонансных колебаний и их воздействие будет близко к статическому, а наибольшую опасность представляют среднечастотные машины (2-я группа). Для горизонтальных колебаний зданий, низшие собственные частоты которых обычно не превышают 2—3 *гц*, наоборот, наиболее опасны низкочастотные машины (1-я группа).

Таблица 4.1

Группы машин по частотности

№ группы	Число циклов в минуту	Характеристика машин
1	До 400	Низкочастотные
2	От 400 до 2000	Среднечастотные
3	Более 2000	Высокочастотные

Машины, развивающие динамические нагрузки, делятся на четыре категории по динамичности в зависимости от отношения вызываемых их работой динамических напряжений в наиболее напряженном сечении конструкции к соответствующему расчетному сопротивлению материала (табл. 4.2). Для ориентировочного определения категории машин, располагаемых в многоэтажных промышленных зданиях, можно пользоваться табл. 4.3, в которой приведены приближенные значения амплитуд инерционных сил. В случае периодической нагрузки в качестве амплитуды инерционной силы в табл. 4.3 принимается наибольшая из амплитуд гармоник.

Таблица 4.2

Категории машин по динамичности

Категория динамичности	Характеристика динамичности	Отношение динамического напряжения к расчетному сопротивлению материала конструкции
I	Малая	До 0,003
II	Средняя	» 0,03
III	Большая	» 0,3
IV	Очень большая	Свыше 0,3

Таблица 4.3

Ориентировочное деление машин на категории по динамичности

Категория динамичности	Характеристика динамичности	Амплитуда инерционной силы в *кг*
I	Малая	До 10
II	Средняя	От 10 до 100
III	Большая	» 100 » 1000
IV	Очень большая	Более 1000

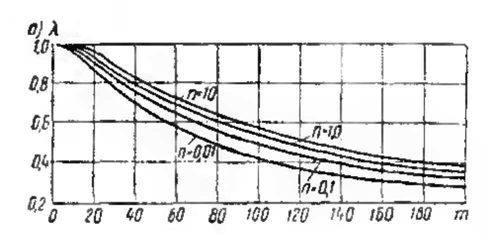
Во многих случаях установление категории динамических нагрузок может вызвать затруднение, например при расположении нескольких машин в одном пролете, при расчете зданий на действие горизонтальных возмущающих нагрузок и т. п. Учитывая, что ограничения, накладываемые на динамические перемещения, являются крайне жесткими и, следовательно, выполняются лишь при достаточно низком уровне напряжений, для ориентировочного определения категории динамических нагрузок при определении перемещений можно принимать I, II категорию. При определении динамических напряжений, наоборот, следует принимать III, IV категорию по динамичности, так как несущая способность конструкции может быть исчерпана лишь при сравнительно высоком уровне динамических напряжений, соответствующих III, IV категории.

Деление машин и развиваемых ими нагрузок по динамичности необходимо для определения уровня динамических напряжений в конструкции, от которого зависит интенсивность внутреннего поглощения энергии колебаний и назначение расчетной величины коэффициента внутреннего неупругого сопротивления.

Динамические воздействия при групповой установке машин

Если на перекрытиях здания установлено большое число однотипных машин периодического действия, развивающих гармонические нагрузки в горизонтальном направлении, то при определении суммарного воздействия, а также динамических перемещений и усилий в элементах конструкций необходимо учитывать случайный характер воздействия вследствие разброса фаз у машин с синхронными двигателями и небольших отклонений частот возмущения от номинального значения у машин с асинхронными двигателями.

Практически это учитывается умножением суммарного воздействия, т.е. суммы амплитуд динамических нагрузок от всех машин на коэффициент синфазности λ. Для определения коэффициента синфазности λ привлекаются методы теории надежности.



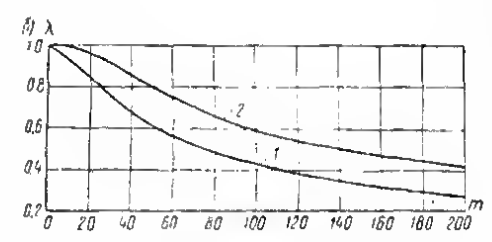


Рис. 4.1. Определение коэффициента синфазности λ

а — для машин с синхронными двигателями; *б* — для машин с асинхронными двигателями; *1* — для резонансных зон; *2* — для дорезонансной, межрезонансных и зарезонансной зон

В частности, в случае синхронных машин учет случайных фаз отдельных воздействий сводится к определению вероятности непревышения суммарной амплитудой некоторого значения $R = \lambda m P_0$, где P_0 — амплитуда воздействия от одной машины; m — число машин [20]. Такая задача аналогична известной проблеме «блужданий» в теории вероятностей, и ее решение — функция распределения вероятностей $F(R)$ — определяется по формуле

$$F(R) = R \int_0^\infty J_1(Rs) J_0^m(s)\, ds, \qquad (4.1)$$

где J_1, J_0 — цилиндрические функции первого рода. При больших m из (4.1) может быть получена следующая асимптотическая формула:

$$F(R) = 1 - e^{-\lambda^2 m}.$$

В связи с тем, что при каждом включении машин фазы составляющих воздействий принимают новые случайные значения, вероятность $F_T(R)$ непревышения суммарной амплитудой величины R за срок службы сооружения T может быть определена по формуле независимых испытаний:

$$F_T(R) = \left(\lambda - e^{-\lambda^2 m}\right)^N, \qquad (4.2)$$

где N — среднее число включений за срок службы сооружения. Задаваясь нормативной надежностью F_T, можно из формулы (4.2) определить значение коэффициента синфазности λ.

В случае асинхронных машин задача значительно осложняется. Ее приближенное решение может быть получено на основе использования корреляционной теории стационарных случайных процессов.

Для определения коэффициента синфазности λ в практических расчетах можно пользоваться графиками (рис. 4.1), при построении которых использовались результаты работ [1, 15].

При проверке влияния колебаний на людей и точные технологические процессы следует учитывать, что превышение суммарной амплитудой нагрузки или суммарной амплитудой перемещений некоторых предельных значений не вызовет катастрофических последствий и повышенный уровень колебаний может быть быстро ликвидирован переключением машин. Поэтому в отличие от расчета на прочность и выносливость следует принимать сравнительно невысокие значения нормативной надежности. Это обстоятельство можно учесть также путем снижения расчетного значения коэффициента λ. Так, инструкция [1] рекомендует при проверке динамических перемещений для числа машин $m \geqslant 10$ коэффициент λ умножать на величину $3/\sqrt{m}$.

При установке машин на различных этажах здания коэффициент синфазности λ для суммарных горизонтальных нагрузок на каждом этаже следует определять от всего числа машин данного типа, установленных на перекрытиях здания.

В случае вращательных колебаний суммарный момент, действующий в уровне данного этажа, определяется умножением наибольшего из возможных моментов, создаваемых инерционными силами машин, на коэффициент синфазности λ, также определяемый от полного числа машин данного типа, установленных на перекрытиях здания.

О расчетных и нормативных динамических нагрузках см. раздел 2.

Динамические воздействия от виброизолированных машин

Динамические нагрузки от виброизолированных машин периодического действия определяются для двух режимов работы машин (рабочего и пуско-остановочного) и рассматриваются как совокупность сил, передающихся на поддерживающую конструкцию через все виброизоляторы.

В рабочем режиме составляющие амплитуды возмущающей силы, изменяющейся по гармоническому закону и передающейся через каждый виброизолятор, определяются по формуле

$$P_x = a_x K_x, \quad (x = x, y, z), \tag{4.3}$$

где a_x — амплитуда вынужденных колебаний виброизолятора в направлении оси x, определяемая по рекомендациям раздела 15; K_x — жесткость виброизолятора в направлении оси x.

При периодической нагрузке составляющие амплитуд возмущающей силы по каждой учитываемой гармонике определяются по формуле (4.3), в которой под a_x понимается амплитуда колебаний виброизолятора по соответствующей гармонике. Если амплитуда основной гармоники является наибольшей, то при определении нагрузки, передающейся через виброизоляторы, высшие гармоники можно не учитывать.

Если расстояние между крайними виброизоляторами составляет менее 1/5 пролета несущей конструкции, на которую опирается виброизолированная машина, то передающуюся динамическую нагрузку можно приближенно представить сосредоточенной возмущающей силой P и возмущающим моментом M, приложенными в точке конструкции, соответствующей центру жесткости виброизоляторов. Составляющие амплитуды сосредоточенной возмущающей силы P в направлении осей координат определяют по формуле (4.3), в которой a_x есть амплитуда колебаний центра жесткости виброизоляторов в направлении оси x.

Составляющие амплитуды возмущающего момента M в направлении осей координат, проходящих через центр жесткости виброизоляторов, определяются по формуле

$$M_x = \varphi_{0x} K_{\varphi x}, \quad (x = x, y, z),$$

где φ_{0x} — амплитуды вращательных колебаний установки относительно координатных осей; $K_{\varphi x}$ — угловые жесткости всех виброизоляторов относительно тех же осей (см. раздел 15).

При пуске или остановке виброизолированной машины, развивающей гармоническую нагрузку, на поддерживающую конструкцию во время прохождения через резонанс может передаваться увеличенная по сравнению с рабочим режимом нагрузка. Для приближенной оценки воздействия этой нагрузки на поддерживающую конструкцию можно в запас прочности и жесткости считать, что нагрузка является гармонической с частотой и амплитудой, равными мгновенным значениям частоты и амплитуды при наибольшем смещении виброизолированной установки. Используя результаты работы [8], можно получить выражение для амплитуды:

$$P = \overline{\mu} R \frac{\overline{\omega}^2}{\omega^2} \tag{4.4}$$

и круговой частоты

$$\overline{\omega} = p_у \left[1 \pm \frac{2,171}{(1 + 0,14\,\gamma_в q)^2 q}\right]; \quad q = \frac{p_у}{\sqrt{\varepsilon}},$$

где R, ω — амплитуда и круговая частота нагрузки в рабочем режиме; $\overline{\mu}$ — коэффициент увеличения, определяемый по графикам (рис. 4.2); $\gamma_в$ — коэффи-

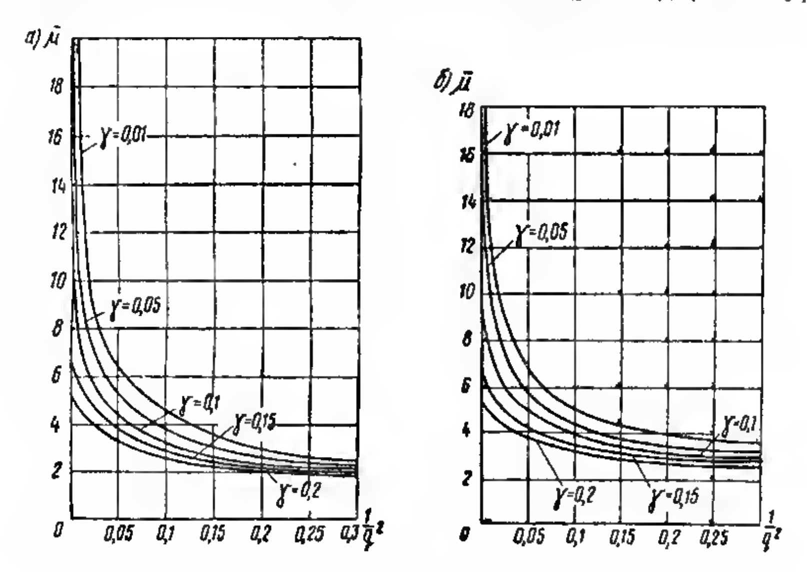


Рис. 4.2. График коэффициента передачи $\overline{\mu}$ при переходе через резонанс

а — во время пуска машины; *б* — во время остановки машины

циент неупругого сопротивления виброизоляторов; ε — абсолютная величина постоянного углового ускорения; $p_у$ — круговая частота собственных колебаний установки.

Верхний знак в последней формуле относится к пусковому режиму, нижний — к остановочному. Расчет выполняется на тот режим, при котором абсолютная величина углового ускорения, а следовательно, и скорость прохожде-

ния через резонанс меньше. При равных или близких скоростях остановочный режим более опасный.

Если виброизолированная машина или установка развивает периодическую нагрузку, то расчет при переходе через резонанс производится на преобладающую гармонику.

4.2. Основные расчетные положения

Цель динамического расчета несущих конструкций

Цель динамического расчета несущих конструкций промышленных зданий и сооружений — не только обеспечить несущую способность конструкций при совместном действии статических и динамических нагрузок, но и ограничить уровень колебаний конструкций такими пределами, которые исключают возможность вредного влияния на людей и технологический процесс.

Эксплуатационные динамические нагрузки в промышленных зданиях и сооружениях, как правило, не велики и вызываемые ими напряжения значительно меньше напряжений от статической нагрузки. Поэтому динамический расчет обычно проводится для проверки допустимости перемещений и внутренних усилий конструкции, рассчитанной на статические нагрузки, при совместном действии статических и динамических нагрузок с точки зрения выполнения требований: прочности и выносливости (а в некоторых случаях и деформативности) конструкций; санитарно-гигиенических норм; технологии производственных процессов.

Если в результате динамического расчета на эксплуатационные нагрузки установлено, что уровень колебаний конструкций превышает допустимые пределы, то прежде всего необходимо использовать специальные меры (применение виброизоляции, изменение расположения машин, балансировку, уравновешивание и изменение числа оборотов машин, и т. д.), позволяющие уменьшить колебания.

Существенное увеличение поперечных сечений и армирования, а также изменение конструктивных схем элементов в целях понижения уровня колебаний целесообразно производить только в тех случаях, когда перечисленные меры оказываются невыполнимыми или недостаточно эффективными.

Динамический расчет несущих конструкций обычно проводится в такой последовательности:

1) определяются динамические нагрузки и классифицируются по частотности и динамичности;

2) определяются амплитуды динамических перемещений и проверяется выполнение физиологических и технологических требований по ограничению уровня колебаний;

3) устанавливается необходимость расчета на прочность;

4) определяются амплитуды внутренних усилий в конструкциях (изгибающих моментов, поперечных сил) и производится расчет на прочность и выносливость.

Расчет на прочность

Несущая способность конструкций при совместном действии статических и динамических нагрузок обеспечивается расчетом на прочность (выносливость) и устойчивость. Конструкции промышленных зданий, как правило, рассчитываются только на статическую устойчивость; для отдельных элементов сооружений может понадобиться проверка на динамическую устойчивость (см. раздел 7).

Расчет изгибаемых элементов на прочность производится по формулам

$$M_{с}^{р} + M_{д}^{р} \leqslant M^{р}; \quad Q_{с}^{р} + Q_{д}^{р} \leqslant Q^{р}, \qquad (4.5)$$

где $M_с^р$, $Q_с^р$ — изгибающий момент и поперечная сила от расчетной статической нагрузки; $M_д^р$, $Q_д^р$ — изгибающий момент и поперечная сила от расчетной динамической нагрузки (с теми же знаками, что и $M_с^р$, $Q_с^р$); $M^р$, $Q^р$ — предельный изгибающий момент и предельная поперечная сила, воспринимаемые сечением и определяемые в предположении статического действия нагрузки.

При расчете сжато-изогнутых и сжатых элементов на прочность и статическую устойчивость к расчетной статической нагрузке прибавляется расчетная динамическая нагрузка и расчет производится по обычным формулам статики сооружений.

Расчет изгибаемых элементов на выносливость производится по формулам:

$$M_с^н + M_д^р \leqslant M_{вын}; \quad Q_с^н + Q_д^р \leqslant Q_{вын}, \qquad (4.6)$$

где $M_с^н$, $Q_с^н$ — изгибающий момент и поперечная сила от нормативной статической нагрузки; $M_{вын}$, $Q_{вын}$ — предельный изгибающий момент и предельная поперечная сила при расчете на выносливость, определяемые по расчетному пределу выносливости (см. раздел 3).

Во многих случаях проверка прочности и выносливости несущих конструкций может не потребоваться. В частности, многие машины развивают небольшие динамические нагрузки, вызывающие весьма малые дополнительные напряжения в конструкциях. Кроме того, выполнение очень жестких санитарно-гигиенических и технологических требований по ограничению уровня колебаний конструкций, на которых находятся люди или чувствительное к вибрациям оборудование, в большинстве случаев является достаточным и для обеспечения несущей способности конструкций. Это обстоятельство может быть использовано для грубой оценки несущей способности конструкций, подверженных действию эксплуатационных динамических нагрузок: колебания, не опасные для людей, обычно не опасны и для несущих конструкций зданий.

В качестве более точных критериев могут быть приняты категории нагрузок по динамичности и отношение наибольшего перемещения конструкции к ее пролету. Так, например, при проверке несущей способности конструкций можно не учитывать динамические нагрузки от машин и установок I категории по динамичности, а также II категории — при использовании виброизоляции.

Можно не рассчитывать на прочность и выносливость элементы несущих конструкций, наибольшее расчетное перемещение которых за вычетом перемещений опор составляет не более 1/50 000 пролета. Эта цифра обобщает многолетний опыт проведения динамических расчетов и исследований колебаний промышленных зданий. При колебаниях по сравнительно невысоким тонам она является достаточно надежным критерием.

Если частота возмущающей гармонической нагрузки больше одной или нескольких частот собственных колебаний конструкции, то необходимо произвести дополнительный расчет на прочность при прохождении через резонанс конструкции во время пуска и остановки машины, развивающей указанную нагрузку. Расчет на выносливость при переходе через резонанс следует производить только для тех машин, которые включаются и останавливаются по нескольку раз в сутки.

Наиболее опасен режим, при котором скорость перехода через резонанс меньше; при близких скоростях в остановочном режиме развиваются бо́льшие колебания конструкций. Поэтому обычно расчет на переход через резонанс производится по остановочному режиму. Исключение могут составить лишь те случаи, когда для сокращения продолжительности выбега машины используется специальное торможение.

Приближенный расчет конструкции перекрытия при переходе через r-й собственный резонанс можно производить как расчет на гармоническую нагрузку с частотой p_r и амплитудой

$$P = R\bar{\mu}\gamma \frac{p_r^2}{\omega^2}. \qquad (4.7)$$

где R — амплитуда инерционной силы в рабочем режиме; $\bar{\mu}$ — коэффициент увеличения, определяемый по графикам (рис. 4.3 и 4.4).

Формула (4.7) относится к случаю, когда машина, развивающая динамическую нагрузку, жестко соединена с несущей конструкцией. Для виброизолированных машин расчет на переход через резонанс конструкции можно не производить, однако требуется расчет на нагрузки, возникающие при переходе через резонанс самой виброизолированной установки. Эти нагрузки можно приближенно считать гармоническими с параметрами, определяемыми в п. 4.1.

Из формулы (4.7) следует, что амплитуда гармонической нагрузки, на которую рассчитывается конструкция, при переходе через резонанс быстро убывает с уменьшением частоты собственных колебаний. Поэтому в практических расчетах обычных конструкций достаточно рассмотреть переход через резонанс только по одной или двум высшим из всех собственных частот, проходимых при пуске и остановке машины.

Расчет конструкций на прочность и выносливость при прохождении через резонанс можно не производить, если рабочий режим машины является резонансным, т. е. если частота возмущающей нагрузки в рабочем режиме совпадает с одной из частот собственных колебаний конструкции. В этом случае амплитуды колебаний и внутренних усилий в рабочем режиме, как правило, будут больше, чем в переходном. Можно также не учитывать переход через резонанс, если $\sqrt{\varepsilon}>0{,}5p$ (здесь p — частота собственных колебаний; ε — абсолютная величина углового ускорения, принимаемого постоянным).

Проверка воздействия колебаний на людей и технологический процесс

Наибольшие перемещения, скорости и ускорения несущих конструкций, на которых находятся люди или размещено технологическое оборудование, чувствительное к колебаниям, не должны превышать допускаемых величин, определяемых физиологическими требованиями и требованиями технологии производства.

Физиологические требования по ограничению колебаний регламентируются действующими санитарными нормами (см. раздел 1). Технологические требования устанавливаются технологами в зависимости от чувствительности оборудования к колебаниям основания. С этой целью машины и оборудование разделяют на четыре класса по чувствительности к гармоническим колебаниям основания. Допускаемые амплитуды скорости и ускорения для этих классов приведены в табл. 4.4 (при амплитудах перемещений не более 1 *мм*). Если нет технологических данных для определения класса чувствительности, можно пользоваться табл. 4.5, в которой приведено ориентировочное деление на классы некоторых основных машин и приборов [3].

Таблица 4.4

Классы машин и приборов по чувствительности к гармоническим колебаниям основания

Класс машин и приборов	Характеристика машин и приборов по чувствительности к гармоническим колебаниям	Допускаемая амплитуда	
		ускорения в *мм/сек²* для частот 1—10 *гц*	скорости в *мм/сек²* для частот 10—100 *гц*
I	Высокочувствительные	6,3	0,1
II	Среднечувствительные	63	1
III	Малочувствительные	250	4
IV	Нечувствительные	Более 250	Более 4

Если колебания поддерживающих конструкций не являются гармоническими, то допускаемые значения основных параметров (перемещений, скоростей, ускорений) также должны задаваться технологами. При отсутствии данных

Таблица 4.5

Ориентировочное деление машин и приборов на классы по чувствительности к колебаниям

Класс машин по чувствительности к колебаниям	Машины и приборы
I	Особо точные делительные машины и автоматы. Установки для выверки оптических приборов и для тарировки точных измерительных приборов. Микроскопы и измерительные микроскопы. Интерферометры, оптиметры и другие точные оптические приборы. Механические контрольно-измерительные приборы при допусках порядка несколько микрон. Установки для динамической балансировки роторов и т. п., тяжелые высокоточные станки, мастер-станки и т. п.
II	Шлифовальные станки для шарикоподшипников. Зубо- и резьбошлифовальные станки. Координатно-расточные автоматы. Доводочные станки. Прецизионные фрезерные и токарные станки с допусками в несколько сотых миллиметра; автоматы для точки лезвий бритв и другие точные автоматы.
III	Токарные, фрезерные, сверлильные, шлифовальные и другие металлообрабатывающие станки обычного класса точности. Прядильные машины. Ткацкие станки. Типографские машины. Швейные машины и т. п.
IV	Вентиляторы. Центрифуги. Электромоторы. Штампы и прессы металлообрабатывающей и легкой промышленности. Долбежные станки. Сотрясатели. Вибростолы. Виброгрохоты. Рассевы и т. п.

можно пользоваться указаниями табл. 4.4, причем в этом случае регламентируется наибольшее значение скорости колебаний основания, на котором устанавливаются машины и приборы, согласно последней графе табл. 4.4.

Проверка на вредное воздействие колебаний конструкций на людей и технологическое оборудование не обязательна для машин всех категорий динамичности, когда на конструкциях нет машин, станков и приборов I, II и III класса чувствительности к колебаниям и не требуется длительное присутствие людей, а также для машин I категории динамичности, устанавливаемых на виброизоляторы.

Кроме того, такая проверка не производится в случае машин и установок, создающих эпизодические нагрузки малой продолжительности (непродолжительные периодические нагрузки, нагрузки при переходных режимах, в частности при переходе через резонанс, и т. п.).

В случае необходимости (если это оговорено технологическими требованиями) должна производиться проверка динамических перемещений для обеспечения нормальной работы оборудования, чувствительного к вибрациям, при прохождении через резонанс.

Расчетные схемы

Выбор расчетных схем при проведении практических расчетов строительных конструкций определяется следующими обстоятельствами: точностью исходных данных; многообразием факторов, влияющих на характер и уровень колебаний конструкций; требованием к точности расчета; способом расчета. Точность исходных данных, как правило, невелика, так как характеристики динамических нагрузок и динамические свойства материалов могут изменяться в широких пределах. Вместе с тем очень трудно бывает оценить и влияние различных факторов, самым существенным образом сказывающихся на результатах расчета, например распределение полезных нагрузок, совместность

работы различных конструктивных элементов, жесткость соединения стыков, внутреннее и внешнее сопротивление и т. д. Наконец, при использовании «ручного» счета расчетная схема конструкций должна быть настолько упрощена, чтобы объем вычислений ограничивался разумными пределами.

Все это заставляет для практических расчетов обычных конструкций на действие динамических нагрузок выбирать приближенные, по возможности наиболее простые расчетные схемы.

Основные упрощения расчетных схем состоят в расчленении конструкций здания на отдельные элементы (балки, плиты, рамы) и в раздельном рассмотрении вертикальных и горизонтальных колебаний. При этом передача динамических нагрузок с одного конструктивного элемента на другой осуществляется либо по правилу рычага, т. е. так же, как и в статических расчетах, либо путем загружения поддерживающей конструкции ее динамическими реакциями.

Для динамических расчетов особо ответственных зданий и сооружений, а также расчетов на электронных вычислительных машинах используются уточненные расчетные схемы, в которых максимально учитываются все особенности работы конструкций.

При расчетах зданий и сооружений из сборных железобетонных конструкций на действие эксплуатационных динамических нагрузок необходимо учитывать влияние сухого трения в соединениях сборных элементов [13]. Если силы трения преодолеваются, то соединения в стыках и на опорах можно считать нежесткими. При малых амплитудах колебаний (до 0,1 *мм*) силы трения могут не преодолеваться, и соединения в этом случае следует считать жесткими. Поэтому соединения сборных железобетонных элементов принимаются жесткими в тех случаях, когда допускаемые перемещения или наибольшие перемещения, вычисленные в результате предварительного расчета по схеме с жесткими соединениями, не превышают 0,1 *мм*. В противном случае расчет ведется по двум различным схемам: с учетом жесткости соединений вследствие сухого трения и без него.

При расчете перекрытий и покрытий, т. е. при рассмотрении вертикальных колебаний, жесткость балок и ригелей определяется с учетом жесткости плиты. Для монолитных ребристых перекрытий и покрытий момент инерции поперечного сечения балок принимается как для таврового сечения с шириной полки, равной расстоянию между осями балок, но не более половины пролета плиты, а для балочных плит принимается момент инерции поперечного сечения плиты.

При определении жесткости элементов сборных железобетонных перекрытий и железобетонных перекрытий по металлическим балкам следует рассматривать две расчетные схемы, связанные с влиянием сил сухого трения. Если вследствие сухого трения соединения элементов принимаются жесткими, то момент инерции поперечного сечения определяется так же, как и для монолитных перекрытий, т. е. по тавровому сечению. Если же сухое трение не учитывается, то для железобетонных и металлических балок при уложенном по балкам сборном настиле берется момент инерции поперечного сечения балки, а для тех же балок при уложенной по ним монолитной железобетонной плите — сумма моментов инерции поперечных сечений балки и плиты, при этом расчетная ширина сечения плиты принимается равной расстоянию между осями балок, но не более половины пролета плиты.

При расчете неразрезных конструкций перекрытий и покрытий обычно принимается фактическое число пролетов конструкции, но во всяком случае не более пяти. Ригели рам можно рассчитывать как неразрезные балки, если обобщенная жесткость ригелей на изгиб вдвое и более превосходит обобщенную жесткость колонн. В остальных случаях рекомендуется применять схему рамы с несмещающимися узлами или неразрезной балки на упруго-вращающихся опорах, жесткость которых определяется жесткостью на изгиб примыкающих к ригелю колонн верхнего и нижнего этажей.

Приближенные расчетные схемы перекрытий и покрытий, а также возможные погрешности в определении частот приведены в табл. 4.6.

При рассмотрении горизонтальных колебаний зданий в качестве расчетной схемы может быть принята система с числом степеней свободы, соответ-

Таблица 4.6

Типовые расчетные схемы для динамического расчета перекрытий и покрытий

Конструкция	Элемент, для которого определяются частоты	Расчетная схема	Возможная погрешность определения частот ε_0
Плиты и настилы по балкам железобетонным, стальным и деревянным	Главные и вспомогательные балки. Плиты с пролетом более 1,5 *м*	Однопролетные или неразрезные многопролетные балки; однопролетные или неразрезные балочные плиты (в зависимости от фактических условий)	0,25
Железобетонные ребристые перекрытия	Главные и вспомогательные балки. Плиты с пролетом более 2 *м*	Неразрезные многопролетные балки или рамы с несмещающимися узлами. Неразрезные балочные плиты	0,3
Железобетонные крупнопанельные плиты по стальным железобетонным ригелям	Прогоны. Плиты	Неразрезные многопролетные балки или рамы с несмещающимися узлами. Неразрезные многопролетные плиты по перекрестным балкам. Однопролетные плиты	0,35
Безбалочные перекрытия	Безбалочная плита	Плита, подпертая в точках с учетом жесткости колонн и капителей	0,35
Покрытия по фермам	Фермы	Система с конечным числом степеней свободы	0,15
Железобетонные покрытия по балкам и фермам	Плиты, балки	Многопролетные и однопролетные балки, однопролетные плиты	0,2

ствующим числу перекрытий и покрытий. Поскольку массы вертикальных элементов здания: колонн, стен, перегородок обычно значительно меньше масс горизонтальных элементов и расположенного на них оборудования, то, прибавляя к массе перекрытия полусумму масс примыкающих к нему вертикальных элементов, можно сосредоточить все массы здания в уровнях перекрытий и покрытия. Вследствие значительной жесткости колонн и стен здания вертикальными смещениями этих масс можно пренебречь.

Жесткость полученной многомассовой системы определяется путем вычисления единичных перемещений или единичных реакций в точках, где сосредоточены массы. При рассмотрении поступательных колебаний каркасное здание может быть заменено эквивалентной плоской рамой, жесткости элементов которой (стоек и ригелей) равны суммарным жесткостям соответствующих элементов здания в направлении колебаний (обычно рассматриваются колебания только в продольном и поперечном направлениях). Таким образом, жесткость каждой стойки эквивалентной плоской рамы равна сумме жесткостей всех стоек данного ряда, а жесткость каждого ригеля равна жесткости поперечного сечения соответствующего перекрытия плоскостью, перпендикулярной направлению колебаний. При этом моменты инерции поперечного сечения перекрытия определяются в необходимых случаях с учетом совместной работы ригелей и плит перекрытий, обеспечиваемой монолитностью сечения или силами сухого трения. Необходимо также учитывать влияние жестких участков консольных стыков в сборных железобетонных каркасах, увеличивая погонную жесткость примыкающих к стыку стоек и ригелей. При вычислении суммарной жесткости стоек и ригелей жесткость элементов с одним шарнирно закрепленным концом учитывается с коэффициентом $^1/_4$, а жесткость элементов с двумя шарнирно закрепленными концами принимается равной нулю. Если жесткость ригелей

каркаса втрое и более превышает жесткость стоек, то ригель эквивалентной рамы можно считать абсолютно жестким.

Большое влияние на общую жестиость каркасного здания могут оказывать ограждение, внутренние стены и перегородки, лестничные клетки. Навесное ограждение, не притянутое к колоннам каркаса, должно учитываться в тех случаях, когда жесткость соединений обеспечивается силами сухого трения (см. стр. 71). Стены из сплошного панельного ограждения при притяжке панелей непосредственно к колоннам каркаса считаются жестко связанными с каркасом. Предполагается, что наружные и внутренние стены и жесткие перегородки работают только на сдвиг в своей плоскости.

При рассмотрении вращательных колебаний каркасных зданий предполагается, что перекрытия образуют жесткие диски, а стойки работают только на изгиб. Влиянием кручения стоек в этих случаях можно пренебречь. Исключение составляют площадки под машины и этажерки, для которых влияние кручения стоек может быть существенным. Вращательные колебания при наличии жесткого заполнения или несущих стен не рассматриваются.

Промышленные здания с несущими стенами также можно рассчитывать как системы с конечным числом степеней свободы. При этом жесткость здания определяется жесткостью продольных и поперечных стен, работающих на сдвиг. Кроме того, для зданий с несущими стенами следует в отдельных случаях учитывать упругую податливость основания, вызывающую вертикальные и горизонтальные смещения здания и поворот его вокруг горизонтальной оси.

Приближенные расчетные схемы зданий при расчете на действие горизонтальных динамических нагрузок, а также возможные погрешности в определении частот собственных колебаний приведены в табл. 4.7.

Таблица 4.7

Типовые расчетные схемы для динамического расчета зданий при горизонтальных колебаниях

Здание	Расчетная схема	Возможная погрешность определения частот ε_0
1. Каркасное с нежестким стеновым заполнением (например, со сплошным остеклением окон) без внутренних несущих стен. Каркасные площадки под машины	Этажерка с неподвижным основанием и недеформируемыми перекрытиями, с которыми жестко связаны вертикальные стойки. Перекрытия могут поступательно перемещаться и поворачиваться в своей (горизонтальной) плоскости. При этом стойки считаются работающими на поперечный изгиб и кручение	0,25
2. Каркасное с жестким стеновым ограждением (например, с кирпичным заполнением) и внутренними стенами. Здания с несущими стенами и монолитными перекрытиями	Коробка на жестком или упруго податливом основании с недеформируемыми перекрытиями, с которыми жестко связаны вертикальные стойки. Перекрытия могут поступательно перемещаться в своей (горизонтальной) плоскости. При этом стойки считаются работающими на поперечный изгиб, а наружные и внутренние стены — на сдвиг в своей плоскости	0,3
3. Каркасное с навесным панельным ограждением	То же, что здания типов 1 или 2 в зависимости от влияния сухого трения	0,3

Жестиость несущих конструкций, воспринимающих динамичесие нагрузки, определяется по формулам, используемым в статических расчетах. Жесткость изгибаемых элементов монолитных и сборно-монолитных железобетонных конструкций, применяемых в промышленных зданиях под машины и установки с динамическими нагрузками, можно определять по целому сечению без учета трещин:

$$B = E_б J, \tag{4.8}$$

где $E_б$ — модуль упругости бетона; J — момент инерции поперечного сечения несущего элемента без учета арматуры.

Вопрос о влиянии трещинообразования на динамические характеристики изгибаемых железобетонных конструкций все еще мало изучен. Экспериментальные исследования показывают существенное уменьшение частот собственных колебаний при интенсивном трещинообразовании. Однако, учитывая, что при обычных эксплуатационных нагрузках на перекрытия трещины локализуются на сравнительно небольших участках и получающееся снижение жесткости во многом компенсируется имеющимися, как правило, запасами жесткости, нормативные документы рекомендуют определять жесткость железобетонных конструкций без учета трещин. Кроме того, в динамическом расчете учитывается возможная погрешность в определении частот собственных колебаний (см. п. 4.3), так что такое допущение не может привести к ощутимым ошибкам.

По формуле (4.8) можно также определять жесткость сборных железобетонных конструкций, рассчитываемых по расчлененным схемам.

Модуль упругости материалов E при динамических расчетах принимается в соответствии с действующими нормативными документами: для стали — модуль продольной упругости; для бетона и железобетона — модуль упругости бетона при сжатии; для каменной кладки (в том числе армированной) — начальный модуль упругости кладки; для дерева $E = 100\,000$ *кгс/см²*. При сравнительно невысоком уровне динамических напряжений, соответствующем эксплуатационным динамическим нагрузкам, для модуля сдвига каменной кладки и бетона можно приближенно принимать $G = 0{,}3E$.

В динамических расчетах строительных конструкций, регламентируемых действующими нормативными документами, учет внутреннего сопротивления, вызывающего затухание колебаний, производится в соответствии с комплексной теорией внутреннего трения. Значения коэффициента неупругого сопротивления $\gamma = \delta/\pi$ (где δ — логарифмический декремент колебаний) для различных материалов при изгибных колебаниях конструкций приведены в табл. 4.8.

Зависимостью коэффициента неупругого сопротивления от категории динамической нагрузки приближенно учитывается зависимость поглощения энергии вследствие внутреннего трения от уровня напряжений в конструкциях.

Таблица 4.8

Значения коэффициента γ

Материал	Коэффициент γ	
	при динамической нагрузке I и II категории	при динамической нагрузке III и IV категории
Железобетон ненапряженный	0,05	0,1
Железобетон предварительно напряженный	0,025	0,05
Прокатная сталь	0,01	0,025
Кирпичная кладка	0,04	0,08
Дерево	0,03	0,05

4.3. Определение расчетных параметров

Частоты и формы собственных вертикальных колебаний несущих конструкций

Частоты и формы собственных колебаний являются важнейшими динамическими характеристиками конструкций. Зная частоты и формы собственных

колебаний, а также возмущающую нагрузку, можно не только полностью провести динамический расчет конструкций, но и предусмотреть возможные мероприятия по уменьшению их колебаний. Частоты собственных колебаний конструкций рекомендуется определять при использовании любого метода динамического расчета.

При определении частот и форм собственных колебаний массы конструкций и полезных грузов вычисляются по нормативным значениям собственного веса и постоянных нагрузок. Если возможны различные варианты загружения конструкций (например, при отсутствии или наличии снега, значительном изменении нагрузок, предусмотренном технологией производства и т. д.), то они должны быть рассмотрены или, по крайней мере, должны быть учтены два варианта загружения, соответствующие максимальным и минимальным нагрузкам. Кратковременно действующие статические нагрузки (от скопления людей, оборудования и материалов и пр.) при определении масс не учитываются. Не учитываются также массы виброизолированных машин, устанавливаемых на перекрытиях, так как динамическая жесткость виброизоляторов обычно во много раз меньше динамической жесткости перекрытия и, следовательно, колебания виброизолированной установки и перекрытий могут рассматриваться раздельно.

Если для динамического расчета конструкций используется метод разложения по формам собственных колебаний, то точность расчета существенно зависит от числа учитываемых форм. Никакие априорные оценки здесь невозможны, однако можно указать ориентировочное число частот и форм собственных колебаний, которые необходимо определять и учитывать в расчете. Поскольку обычные для промышленных зданий динамические нагрузки имеют частоту не более 50 *гц* и возбуждают лишь несколько первых форм собственных колебаний, то практически оказывается достаточным определять следующее число частот и форм:

для однопролетных балок	2
» неразрезных »	$2N$ (N — число пролетов)
» однопролетных плит	4
» ферм	5

Эти цифры необходимы для ориентировочного определения усеченного спектра частот собственных колебаний при проведении динамического расчета. Однако окончательное число определяемых и учитываемых в расчете частот и форм может корректироваться в процессе расчета в зависимости от густоты спектра частот, определяемых параметров колебаний, характера приложения нагрузки и величины частоты возмущающего воздействия. Так, при определении динамических напряжений требуется учитывать большее число форм собственных колебаний, чем при определении перемещений, чтобы получить одинаковую точность.

Чем реже спектр частот собственных колебаний и чем более «гладкой» является нагрузка, тем меньше можно сохранять членов в разложении по формам собственных колебаний. Решение вопроса о числе учитываемых форм собственных колебаний может быть принято на основе анализа сходимости рядов для соответствующих расчетных величин. В случае гармонических нагрузок достаточную для практических целей точность можно получить, если учитывать в расчете n первых форм, где n — номер наименьшей собственной частоты, превышающей частоту вынужденных колебаний. В частности, если частота основного тона больше частоты возмущения, то можно учитывать только первую форму собственных колебаний конструкции.

При проведении расчетов на ЭЦВМ количество операций большого значения не имеет, и потому в этом случае следует учитывать возможно большее число форм.

В практических расчетах строительных конструкций, характеризующихся сравнительно густыми спектрами частот, основным расчетным случаем является расчет на резонанс. При этом главный вклад в решение вносит резонн-

рующая форма собственных колебаний, так что влиянием остальных форм можно пренебречь без большого ущерба для точности расчета. Это позволяет существенно упростить расчеты.

При определении частот собственных колебаний важно также принимать во внимание неточность исходных данных. Если на конструкцию действует периодическая нагрузка, частота одной из гармоник которой близка к какой-либо частоте собственных колебаний, то точность динамического расчета будет существенным образом зависеть от точности исходных данных. Исходные данные (расчетные схемы, нагрузки, жесткости элементов и их соединений, массы) для строительных конструкций обычно задаются со сравнительно невысокой точностью. В то же время результаты расчета на гармонические нагрузки при резонансе или вблизи резонанса очень чувствительны к малейшим изменениям характеристик рассчитываемой динамической системы, ибо даже небольшое изменение собственной частоты может во много раз увеличить или уменьшить амплитуды колебаний, особенно при малых значениях коэффициента внутреннего неупругого сопротивления.

Поэтому при расчете на периодические нагрузки обязательно должна учитываться возможная неточность в определении собственных частот, а также возможность изменения собственных частот конструкций в процессе эксплуатации здания или сооружения. Это обстоятельство учитывается вводом частотных зон, границы которых определяются по формулам:

$$p_r' = \left(1 - \varepsilon_0\right) p_r^0; \quad p_r'' = \left(1 + \varepsilon_0\right) p_r^0, \tag{4.9}$$

где p_r^0 — r-я частота собственных колебаний элемента, определенная в результате расчета; p_r' — нижняя граница частотной зоны; p_r'' — верхняя граница частотной зоны; ε_0 — погрешность в определении частот. Величина ε_0 для различных конструкций определяется по табл. 4.6 и 4.7.

При проведении расчетов на периодические нагрузки с помощью методов, не связанных с разложением по формам собственных колебаний, возможную погрешность в соотношении частот собственных и вынужденных колебаний можно приближенно учитывать путем изменения в некоторых пределах исходных данных (жесткостей и масс) либо, что более удобно, путем изменения частоты вынужденных колебаний в пределах от $(1-\varepsilon_0)\omega$ до $(1+\varepsilon_0)\omega$. При этом необходимо провести расчет для нескольких значений частоты вынужденных колебаний в пределах ее изменения или определить в указанном промежутке экстремумы перемещений и внутренних усилий.

Если частота гармонической нагрузки, создаваемой машиной или установкой, задается с указанием некоторого возможного отклонения ε_0' от ее среднего значения ω_0, т. е. $\omega = \omega_0(1 \pm \varepsilon_0')$, то за частоту вынужденных колебаний принимается среднее значение ω_0, а при определении границ частотных зон вместо погрешности ε_0 вводится погрешность $\varepsilon_0 + \varepsilon_0'$.

Учет возможной погрешности в определении собственных частот, необходимый в случае гармонических и периодических нагрузок, приводит к тому, что для конструкций с густым спектром, наиболее часто встречающихся в расчетах, частотные зоны пересекаются либо очень сближаются, и получается как бы непрерывный спектр. В этом непрерывном множестве следует выбрать дискретный спектр частот так, чтобы, с одной стороны, учесть наиболее неблагоприятное их расположение, а с другой, не оторваться от реальной конструкции.

Поэтому в резонансной зоне, т. е. при попадании частоты вынужденных гармонических колебаний (или частоты преобладающей гармоники возмущения) в одну из частотных зон конструкции, соответствующая частота собственных колебаний принимается равной частоте возмущения. При попадании частоты вынужденных колебаний в две или даже несколько пересекающихся частотных зон следует каждую из собственных частот поочередно приравнять частоте вынужденных колебаний. Если частота вынужденных колебаний попадает в дорезонансную зону, то для собственных частот принимаются ми-

нимальные значения. В межрезонансных зонах ($p''_r < \omega < p'_{r+1}$) собственные частоты принимаются наибольшими из возможных, если частота ω находится ближе к p''_r и наименьшими, если частота ω находится ближе к p'_{r+1}.

Таким образом, определенный в результате расчета спектр частот собственных колебаний может лишь сдвигаться в ту или иную сторону в пределах расширенных частотных зон. Одна из частот совмещается с частотой вынужденных колебаний или максимально приближается к ней, а все остальные изменяются пропорционально. В результате соотношение между частотами спектра все время остается постоянным, а возможная ошибка относится только к их величинам.

Такой подход представляется наиболее удобным и правильным, потому что соотношение между частотами в спектре гораздо менее чувствительно к погрешностям в значении масс, жесткостей элементов и их расчетных схем, чем величины частот, и в гораздо меньшей мере влияет на результаты расчета.

В расчетах на прохождение через резонанс для частот собственных колебаний принимаются их наибольшие значения, соответствующие верхним границам частотных зон, т. е. p'_r, так как при этом величины инерционных сил, зависящих от квадрата частоты, будут максимальны.

Поскольку балки перекрытий, как правило, несут не только распределенную, но и сосредоточенную нагрузки от оборудования, то при использовании в расчетах методов разложения по формам собственных колебаний требуется определение частот и форм собственных колебаний балок с дискретно-непрерывной массой. Это довольно сложная и трудоемкая задача. Для упрощения вычислений и возможности использования подробно табулированных балочных функций, т. е. форм собственных колебаний балок с постоянной жесткостью и массой, вводится понятие приведенной массы. Приведенная равномерно распределенная масса вычисляется для каждой формы собственных колебаний исходя из равенства соответствующих собственных частот для рассматриваемой балки и некоторой балки с постоянной массой μ_r, которая и принимается в качестве приведенной:

$$\mu_r = \mu_0 \lambda_r^4 \zeta_r, \qquad (4.10)$$

где μ_0 — равномерно распределенная погонная масса рассматриваемой балки; λ_r — собственные числа, определяемые по таблице раздела 7; ζ_r — решение системы уравнений:

$$\left(1 - \lambda_r^4 \zeta_r\right) a_r + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu}{\mu_0 l} X_r\left(\alpha_\nu\right) \sum_{j=1}^{k} a_j X_j\left(\alpha_\nu\right) = 0,$$

$$(r = 1, 2, \ldots, k). \qquad (4.11)$$

Здесь a_r, a_j — параметры, подлежащие исключению; k — количество определяемых частот колебаний; h — количество сосредоточенных масс на балке; l — длина пролета между смежными опорами; $X_r(\alpha)$ — балочные функции, таблицы которых приведены в [1, 3]; $\alpha_\nu = \frac{x_\nu}{l}$ — относительная координата точки, в которой находится масса m_ν.

В первом приближении формула (4.11) имеет вид:

$$\mu_r = \mu_0 + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{n} X_r^2\left(\alpha_k\right) m_k. \qquad (4.12)$$

Определение приведенных масс для плит с распределенной и сосредоточенными массами может производиться по аналогичной формуле:

$$\mu_{rs} = \mu_0 + \frac{1}{l_x l_y} \sum_{\nu=1}^{n} X_r^2(\alpha_\nu) Y_s^2(\beta_\nu) m_\nu, \qquad (4.13)$$

где l_x, l_y — длины пролетов плиты; $X_r(\alpha_\nu)$, $Y_s(\beta_\nu)$ — балочные функции; $\alpha_\nu = \frac{x_\nu}{l_x}$, $\beta_\nu = \frac{y_\nu}{l_y}$ — относительные координаты точек, в которых находятся сосредоточенные массы.

Частоты собственных колебаний балок и плит для каждого тона определяются с учетом соответствующей этому тону приведенной массы.

Об определении частот и форм собственных колебаний упругих систем см. разделы 7—9.

Частоты и формы собственных горизонтальных колебаний зданий

Частоты и формы собственных горизонтальных колебаний зданий определяются как для системы с конечным числом степеней свободы. При этом массы системы определяются, как указано в п. 4.2, а перемещения от единичных сил, приложенных в уровнях перекрытий и покрытия, вычисляются по общим правилам строительной механики.

В большинстве многоэтажных промышленных зданий центры масс и центры жесткостей всех этажей совпадают, и поэтому поступательные и вращательные колебания можно рассматривать раздельно. Обычно достаточно определить не более трех частот собственных поступательных колебаний в продольном и в поперечном направлении и двух частот вращательных колебаний. В общем случае можно определять все частоты собственных колебаний, меньше, чем частота возбуждения ω, и по одной собственной частоте, большей, чем ω.

Перемещения от единичных сил, приложенных в уровнях перекрытий и покрытий многоэтажных каркасов регулярной структуры с жесткими узлами, можно определять по приближенным формулам [14]:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_{11} = \frac{1}{12}(S_1 + R_1)\\
&\delta_{kk} = \frac{1}{12}\left(S_k + R_k + \frac{H_k^2}{4r_k}\right),\\
&(k = 2, 3, \ldots, n);\\
&\delta_{12} = \delta_{13} = \ldots = \delta_{1n} = \delta_{11} + \frac{H_1 H_2}{48 r_1};\\
&\delta_{kl} = \delta_{lk} = \delta_{k,k+1} = \ldots = \delta_{kn} = \delta_{kk} + \frac{H_k H_{k+1}}{48 r_k}, \quad (l > k),
\end{aligned}\right\} \qquad (4.14)$$

где

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{H_j^2}{s_j};$$

$$R_1 = \frac{H_1^2}{4r_1}; \quad R_2 = \frac{(H_1 + H_2)^2}{4r_1}; \quad R_k = R_{k-1} + \frac{(H_{k-1} + H_k)^2}{4r_{k-1}}, \quad (k > 2);$$

n — число этажей; s_j — суммарная погонная жесткость стоек j-го яруса; r_j — суммарная погонная жесткость ригелей j-го яруса; H_j — высота j-го яруса рамы.

Если ригели можно считать бесконечно жесткими ($r_j \geq 3s_j$), то

$$\delta_{kk} = \delta_{k,\,k+1} = \ldots = \delta_{kn} = \sum_{j=1}^{k} \frac{H_j^2}{12\, s_j}\,. \tag{4.15}$$

При этом формы собственных поступательных колебаний рамных каркасов определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
y_{r1} &= \frac{\delta_{1n}}{1 + p_r^2 m_1 \left(\delta_{1n} - \delta_{11}\right)}\,;\\
y_{rk} &= \frac{\delta_{kn} - p_r^2 \sum\limits_{i=1}^{k-1} m_i y_{ri} \left(\delta_{kn} - \delta_{in}\right)}{1 + p_r^2 m_k \left(\delta_{kn} - \delta_{kk}\right)}\,;\\
y_{rn} &= \delta_{nn} - p_r^2 \sum_{i=1}^{n-1} m_i y_{ri} \left(\delta_{nn} - \delta_{in}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

Если каркасное здание имеет регулярную структуру, а жесткости стоек и ригелей всех ярусов и массы, сосредоточенные в уровнях перекрытий и покрытий, отличаются не более чем на 20%, то круговые частоты собственных поступательных колебаний можно определять по формуле [7]

$$p_i = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\beta s}{m H^2}}\, \sin \frac{(i - 1/2)\, \pi}{2n + 1}\,, \tag{4.17}$$

где s — суммарная погонная жесткость стоек; m — среднее значение сосредоточенной массы; H — высота этажа; β — коэффициент, определяемый по графику (рис. 4.3); n — число этажей.

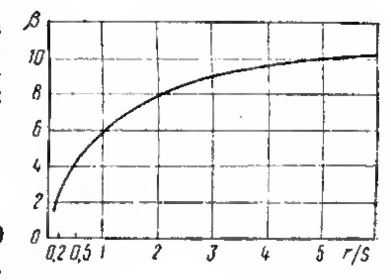


Рис. 4.3. График коэффициента β

При этом формы собственных колебаний имеют вид:

$$y_{ij} = (-1)^{j+n} \sin \frac{2\,\pi\, j (n + 1 - i)}{2n + 1}\,. \tag{4.18}$$

Эти формулы дают достаточную точность при $r > 2s$.

Для каркасных зданий с жестким заполнением перемещения от единичных сил можно определять по формуле:

$$\delta_{kk} = \delta_{k,\,k+1} = \ldots = \delta_{kn} = \sum_{j=1}^{k} \frac{H_j^2}{12\, s_j + H_j v_j}\,, \tag{4.19}$$

где

$$v_j = \frac{F_j^{\text{зап}} G_j}{1{,}2} \left(1 - \frac{F_j^{\text{пр}}}{0{,}85\, F_j^{\text{зап}}}\right); \tag{4.20}$$

$F_j^{зап}$ — площадь в плане заполнения, расположенного в направлении колебаний в пределах j-го этажа; G_j — модуль сдвига материала заполнения; $F_j^{пр}$ — площадь проемов j-го этажа в плане.

Эта формула справедлива при проемах средней высоты и $F_j^{пр} \leqslant \leqslant 0{,}7 F_j^{зап}$ [12].

Для зданий с несущими стенами, расположенными на плотных грунтах или свайном основании

$$\delta_{kk} = \delta_{k,k+1} = \ldots = \delta_{kn} = \sum_{j=1}^{k} \frac{H_j}{v_j}\,, \tag{4.21}$$

где v_j определяется по формуле (4.20), в которой под $F_j^{зап}$ следует теперь понимать площадь стен, расположенных вдоль направления колебаний.

Если продольные и поперечные стены образуют густую сетку с шагом не более 6—10 *м*, то жесткость стен v_j можно определять по формуле

$$v_j = \frac{F_j G_j}{2{,}4}\left(1 - \frac{F_j^{пр}}{0{,}85\,F_j}\right),$$

где F_j — площадь продольных и поперечных стен j-го этажа в плане.

При учете податливости основания:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{kk} &= \sum_{j=1}^{k} \frac{H_j}{v_j} + \frac{1}{K_x} + \frac{\overline{H}_k^2}{K_\varphi}\,; \\ \delta_{k,k+l} &= \sum_{j=1}^{k} \frac{H_j}{v_j} + \frac{1}{K_x} + \frac{\overline{H}_k \overline{H}_{k+l}}{K_\varphi}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

Здесь K_x, K_φ — жесткость основания здания при сдвиге и повороте; $\overline{H}_k$ — расстояние от поверхности основания до k-го этажа.

Для зданий с ленточными фундаментами можно приближенно принимать:

$$K_x = 2{,}5\,C_z\,F_ф; \quad K_\varphi = 5 C_z\,J_ф,$$

где C_z — коэффициент упругого равномерного сжатия грунта; $F_ф$, $J_ф$ — площадь и момент инерции подошвы фундаментов относительно центральной оси.

Частоты и формы собственных вращательных колебаний каркасных зданий определяются как для систем с конечным числом степеней свободы. При этом для регулярных каркасов, когда центры жесткости и масс всех этажей лежат на оси симметрии здания, углы поворота от единичных моментов, приложенных в уровнях перекрытий и покрытия, определяются по формулам

$$\delta_{ik} = \frac{\delta_{ik}^{(x)}\,\delta_{ik}^{(y)}}{l_y^2\,\delta_{ik}^{(y)}\,\xi_n + l_x^2\,\delta_{ik}^{(x)}\,\xi_m}\,. \tag{4.23}$$

Здесь l_x, l_y — расстояние между продольными и поперечными рамами; $\delta_{ik}^{(x)}$ — перемещение поперечной рамы каркаса в своей плоскости на уровне i-го перекрытия от единичной горизонтальной силы, приложенной к ней в уровне k-го перекрытия; $\delta_{ik}^{(y)}$ — перемещение продольной рамы каркаса

в своей плоскости на уровне i-го перекрытия от единичной горизонтальной силы, приложенной к продольной раме в уровне k-го перекрытия; m, n — число продольных и поперечных рам в каркасе;

$$\xi_m = \frac{m(m^2-1)}{12}; \quad \xi_n = \frac{n(n^2-1)}{12}.$$

Если шаг рам в продольном и поперечном направлении одинаков ($l_x = l_y = l$), то

$$\delta_{ik} = \frac{\delta_{ik}^{(x)}\,\delta_{ik}^{(y)}}{l^2\left(\xi_n\,\delta_{ik}^{(y)} + \xi_m\,\delta_{ik}^{(x)}\right)}. \qquad (4.24)$$

В общем случае единичные повороты относительно центральной оси вращения или оси вращения, проходящей через жесткую пристройку, лестничную клетку и т. п., могут быть определены по приближенным формулам

$$\delta_{k,k} = \delta_{k,k+1} = \ldots = \delta_{kn} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\beta_j + b_0^2\,\mu_j^x + a_0^2\,\mu_j^y}, \qquad (4.25)$$

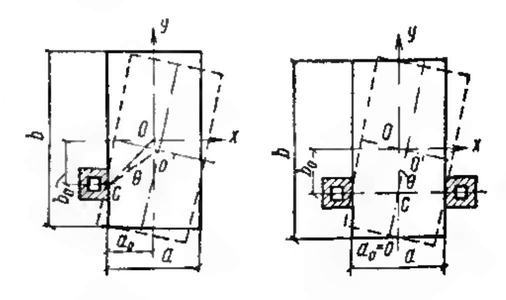


Рис. 4.4. Вращательные колебания здания, стесненного пристройками

где a_0, b_0 — координаты центра вращения относительно осей с началом координат в центре симметрии здания (рис. 4.4): $\mu_j^x = \frac{12E_1\,J_j^x\,mn}{h_j^3}$ — суммарная обобщенная жесткость j-го этажа на изгиб в направлении оси x силой, приложенной в плоскости j-го перекрытия (в предположении, что концы стоек защемлены); $\mu_j^y = \frac{12E_1\,J_j^y\,mn}{h_j^3}$ — то же, в направлении оси y; $\beta_j = b^2\lambda_n\mu_j^x + a^2\lambda_m\mu_j^y + \nu_j^{xy}$ — суммарная обобщенная жесткость j-го этажа на поворот относительно центра симметрии, обусловленная сопротивлением колонн изгибу и кручению; a, b — размеры здания в плане по осям крайних колонн или наружных стен в направлении осей x и y соответственно; E_1, G_1 — модуль упругости и модуль сдвига материала колонн; J_j^x, J_j^y — моменты инерции поперечного сечения одной колонны j-го этажа относительно главных осей, параллельных осям x и y соответственно; h_j — высота j-го этажа; $\nu_j^{xy} = \frac{G_1\,J_j^{xy}mn}{h_j}$ — суммарная обобщенная жесткость колонн j-го этажа на кручение; J_j^{xy} — полярный момент инерции поперечного сечения одной колонны относительно центра сечения;

$$\lambda_m = \frac{m+1}{12(m-1)}; \quad \lambda_n = \frac{n+1}{12(n-1)}.$$

В случае когда центры жесткости этажей и центры масс не лежат на одной оси, частоты собственных колебаний зданий определяют по общим формулам динамики сооружений.

Определение перемещений и внутренних усилий

При динамических расчетах перемещения несущих конструкций определяют по нормативным значениям динамических нагрузок. Внутренние усилия (изгибающие и крутящие моменты; продольные и поперечные силы) определяют по расчетным значениям динамических нагрузок.

В практических расчетах несущих конструкций зданий и сооружений на действие динамических нагрузок наибольшее распространение получил метод разложения по формам собственных колебаний с учетом внутреннего неупругого сопротивления по комплексной теории Е. С. Сорокина (см. раздел 3). При этом вертикальные и горизонтальные колебания конструкций рассматривают раздельно: при расчете перекрытий и покрытий учитывают только вертикальные динамические нагрузки и моменты от горизонтальных сил, а при расчете стен и каркасов — только динамические нагрузки, действующие в горизонтальной плоскости. В связи с тем что для строительных конструкций, отличающихся густым спектром собственных частот, основным расчетным случаем является резонансный режим, в расчетах должны использоваться только те алгоритмы и программы, которые учитывают внутреннее поглощение энергии.

При совместном действии нескольких периодических нагрузок, развиваемых различными независимыми машинами, амплитуды перемещений и внутренних усилий определяют как суммы соответствующих амплитуд от действия каждой нагрузки в отдельности. Если число отдельных нагрузок превышает 10, а их частоты близки или равны, то при определении суммарных перемещений и внутренних усилий следует учитывать фазовые соотношения в соответствии с п. 1.4. Если же нагрузки вызваны действием одной машины или нескольких кинематически связанных машин и имеют одинаковую частоту и фиксированные сдвиги фаз, то суммарные амплитуды определяют с учетом фаз путем определения максимума перемещений или усилий в промежутке времени, равном одному периоду.

Уравнения движения конструкции, рассматриваемой как система с конечным числом степеней свободы, с учетом внутреннего неупругого сопротивления по комплексной теории при гармоническом воздействии могут быть записаны в виде[1]:

$$M_j \ddot{z}_j + (u + iv) \sum_{s=1}^{n} k_{js} z_s = P_j e^{i\omega t}, \quad (j = 1, 2 \ldots n), \qquad (4.26)$$

где M_j, z_j — масса и перемещение j-й точки; k_{js} — реакция конструкции в j-й точке при единичном перемещении s-й точки и закреплении всех остальных точек (масс); P_j, ω — амплитуда и частота внешней нагрузки, приложенной в точке j; u, v — параметры, характеризующие внутреннее неупругое сопротивление.

Используя метод разложения по формам собственных колебаний и полагая $u \approx 1$, $v \approx \gamma$, где $\gamma = \delta/\pi$, решение системы (4.26) можно получить в виде:

$$z_j(t) = \sum_{r=1}^{n} B_r \varphi_{rj} (\chi_r + \gamma) e^{i\omega t}, \qquad (4.27)$$

где φ_{rj} — нормированные формы собственных колебаний, являющиеся решениями однородной системы;

$$- M_j p_r^2 \varphi_{rj} + \sum_{s=1}^{n} k_{js} \varphi_{rs} = 0;$$

---

[1] Уравнение (4.26) соответствует косинусоидальному возмущению $P_j \cos \omega t$. Истинное перемещение равно действительной части $z_j(t)$.

p_r — частоты собственных колебаний; δ — логарифмический декремент колебаний;

$$B_r = \frac{b_r}{p_r^2\left(\chi_r^2 + \gamma^2\right)}; \quad \chi_r = 1 - \frac{\omega^2}{p_r^2};$$

b_r — коэффициент разложения нагрузки:

$$b_r = \sum_{j=1}^{r} P_j \varphi_{rj},$$

равный $b_r = P_i \varphi_{ri}$, если к системе приложена только одна сила, находящаяся в точке i.

Следовательно, амплитуда перемещений, представляющая собой максимум действительной части (4.27), будет:

$$z_{oj} = \sqrt{\left[z_j'\right]^2 + \left[z_j''\right]^2}, \tag{4.28}$$

где

$$z_j' = \sum_{r=1}^{n} B_r \chi_r \varphi_{rj} \text{ и } z_j'' = -\gamma \sum_{r=1}^{n} B_r \varphi_{rj} \tag{4.29}$$

представляют собой при косинусоидальном возмущении амплитуду косинусоидальной и синусоидальной составляющих перемещения соответственно. Для определения напряжений в конструкции необходимо найти упругие силы. Полагая

$$R_j = \sum_{s=1}^{n} k_{js} z_s = \left(R_j' + iR_j''\right) e^{i\omega t},$$

для амплитуды косинусоидальной и синусоидальной составляющих упругой силы получаем:

$$\left.\begin{aligned} R_j' &= M_j \sum_{r=1}^{n} B_r \chi_r p_r^2 \varphi_{rj}; \\ R_j'' &= -\gamma M_j \sum_{r=1}^{n} B_r p_r^2 \varphi_{rj}. \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

Амплитуда упругой силы определится по формуле

$$R_{oj} = \sqrt{\left[R_j'\right]^2 + \left[R_j''\right]^2}. \tag{4.31}$$

Таким образом, при расчете на прочность и выносливость внутренние усилия в конструкции следует определять по формулам:

$$\left.\begin{aligned} M_{oj} &= \sqrt{\left[M_j'\right]^2 + \left[M_j''\right]^2}; \\ Q_{oj} &= \sqrt{\left[Q_j'\right]^2 + \left[Q_j''\right]^2} \end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

и т. п., где M_j, Q_j — амплитуда изгибающего момента и поперечной силы в точке j; M_j', Q_j' — изгибающий момент и поперечная сила при действии на конструкцию системы сил R_j', M'', Q'' — изгибающий момент и поперечная сила при действии на конструкцию системы силы R_j''.

Если для решения системы (4.26) применяется какой-либо другой метод, то для определения амплитуды косинусоидальной и синусоидальной составляющих упругих сил могут быть использованы формулы:

$$R_j' = P_j + M_j \omega^2 z_j'; \quad R_j'' = M_j \omega^2 z_j''. \tag{4.33}$$

В случае резонанса при $\omega = p_r$ основной вклад в решение системы (4.26) вносит резонирующая гармоника φ_{rj} и поэтому амплитуду перемещений можно определять по формуле

$$z_{oj} = \left| \frac{b_r \varphi_{rj}}{p_r^2 \gamma} \right|. \tag{4.34}$$

В этом случае формулы (4.30) примут вид:

$$R_j' = M_j B_r \chi_r p_r^2 \varphi_{rj};$$
$$R_j'' = -\gamma M_j B_r p_r^2 \varphi_{rj}. \tag{4.35}$$

Однако формула (4.34) может оказаться неверной, если коэффициент разложения нагрузки b_r для резонирующей гармоники мал или равен нулю. Это может быть в том случае, когда возмущающая сила расположена вблизи узла или в узле соответствующей формы собственных колебаний либо возмущающий момент расположен вблизи ее пучности.

При действии на конструкцию периодической нагрузки наибольшие перемещения и внутренние усилия определяются вычислением максимумов соответствующих параметров на отрезке времени, равном одному периоду. Пусть, например, разложение периодической нагрузки в тригонометрический ряд с учетом только двух первых гармоник имеет вид:

$$f_i(t) = P_{1i} e^{i\omega t} + P_{2i} e^{i(2\omega t + \varphi_0)}, \tag{4.36}$$

где P_{1i}, P_{2i} — амплитуды первой и второй гармоник нагрузки в точке i. Согласно формуле (4.27) действительная часть перемещения системы при нагрузке (4.36) имеет вид:

$$z_j(t) = z_{1j}' \cos \omega t - z_{1j}'' \sin \omega t + z_{2j}' \cos \left(2\omega t + \varphi_0\right) - z_{2j}'' \sin \left(2\omega t + \varphi_0\right),$$

где z_{1j}', z_{1j}'' — амплитуды косинусоидальной и синусоидальной составляющих перемещений при действии нагрузки $P_{1i} \cos \omega t$, определяемые по формуле (4.29); z_{2j}', z_{2j}'' — то же, при действии нагрузки $P_{1i}'' \cos 2\omega t$. Последнюю формулу после несложных преобразований можно представить в виде:

$$z_j(t) = z_{1j} [\cos \omega t + \varkappa_j \cos (2\omega t + \varphi_j)] = z_{1j} \Omega (t, \varphi_j), \tag{4.37}$$

$$\varkappa_j = \frac{z_{2j}}{z_{1j}}; \quad \varphi_j = \varphi_0 + \psi_{2j} - 2\psi_{1j},$$

где

$$z_{1j} = \sqrt{[z_{1j}']^2 + [z_{1j}'']^2}; \quad z_{2j} = \sqrt{[z_{2j}']^2 + [z_{2j}'']^2};$$

$$\sin \psi_{1j} = \frac{z_{1j}''}{z_{1j}}; \quad \cos \psi_{1j} = \frac{z_{2j}'}{z_{1j}};$$

$$\sin \psi_{2j} = \frac{z_{2j}''}{z_{2j}}; \quad \cos \psi_{2j} = \frac{z_{2j}'}{z_{2j}}.$$

Таким образом, z_{1j} и z_{2j} есть амплитуды перемещений при действии первой и второй гармоники нагрузки в отдельности. Для определения наибольшего перемещения $z_{j\text{макс}}$ необходимо найти максимум функции $\Omega(t, \varphi_j)$, $z_{j\text{макс}} = z_{1j}\Omega_{\text{макс}}$.

Очевидно, что фазу ψ_0 всегда можно привести к интервалу $0 < \varphi_0 < \pi$, используя свойства тригонометрических функций. При этом у второго слагаемого в (4.37) может поменяться знак, что эквивалентно перемене знака у $\varkappa_j$. Значения $\Omega_{макс}$ для различных $\varkappa$ затабулированы. На рис. 4.5 приведены

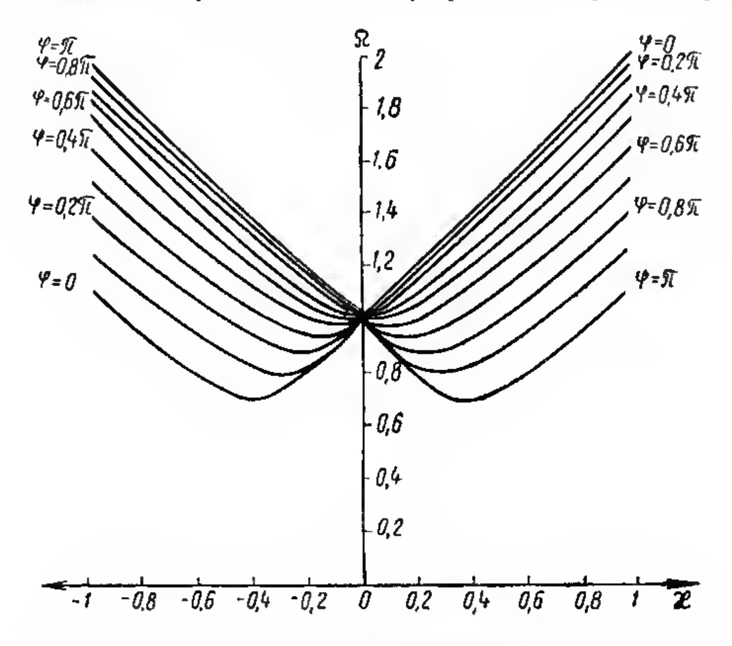


Рис. 4.5. График коэффициента $\Omega_{макс}$

графики, с помощью которых можно определить $\Omega_{макс}$ при $|\varkappa| \leqslant 1$. Для $|\varkappa| > 1$ коэффициент $\Omega_{макс}$ можно вычислять по формуле

$$\left.\begin{aligned} \Omega_{макс} &= \Omega(1) + \varkappa - 1 \quad (\text{при } \varkappa > 1); \\ \Omega_{макс} &= \Omega(-1) - \varkappa - 1 \quad (\text{при } \varkappa < 1), \end{aligned}\right\} \qquad (4.38)$$

где $\Omega(1)$ и $\Omega(-1)$ определяются по графикам (рис. 4.5). Подобным же образом определяются наибольшие внутренние усилия в конструкции. Наибольшие значения изгибающих моментов и поперечных сил равны:

$$M_{j\,макс} = M_{1j}\,\Omega_{макс}; \quad Q_{j\,макс} = Q_{1j}\,\Omega_{макс}, \qquad (4.39)$$

где M_{1j}, Q_{1j} — амплитуды изгибающего момента и поперечной силы при действии нагрузки $P_{1i}\cos\omega t$, а коэффициент $\Omega_{макс}$ определяется по формуле (4.38) или по графику рис. 4.5 в зависимости от $\varkappa_j = \dfrac{M_{2j}}{M_{1j}}$ или $\varkappa_j = \dfrac{Q_{2j}}{Q_{1j}}$, где M_{2j} и Q_{2j} — амплитуды изгибающего момента и поперечной силы при действии нагрузки $P_{2i}\cos 2\omega t$ и

$$\sin\psi_{1j} = \frac{M''_{1j}}{M_{1j}}; \quad \cos\psi_{1j} = \frac{M'_{1j}}{M_{1j}} \qquad (4.40)$$

или

$$\sin\psi_{2j} = \frac{M''_{2j}}{M_{2j}}; \quad \cos\psi_{2j} = \frac{M'_{2j}}{M_{2j}}.$$

Аналогичные формулы будут и при определении поперечных сил. При этом для φ_{1j} берутся значения M'_j и M''_j, Q'_j и Q''_j, вычисленные от нагрузки $P_1^i \cos \omega t$, а для ψ_{2i} — от нагрузки $P_{2i} \cos 2\omega t$.

Если частота вынужденных колебаний отличается на 10% и более от ближайшей частоты собственных колебаний, то учет внутреннего неупругого сопротивления не дает ощутимого уточнения и им можно пренебречь, полагая $\gamma=0$. При этом формулы (4.28) и (4.31), (4.32) значительно упрощаются:

$$\left.\begin{aligned} z_{oj} &= \sum_{r=1}^{k} \frac{b_r \varphi_{rj}}{P_r^2 \chi_r}; \quad M_{oj} = M'_j; \quad Q_{oj} = Q'_j; \\ R_{oj} &= m_j \sum_{r=1}^{k} \frac{b_r \varphi_{rj}}{\chi_r}. \end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

В случае системы с одной степенью свободы амплитуда перемещений при гармонической нагрузке, как следует из (4.28), определяется по формуле

$$z = \frac{P}{k\sqrt{\chi^2 + \gamma^2}}, \tag{4.42}$$

где $k = 1/\delta_1$ — жесткость системы (квазиупругий коэффициент); δ_1 — смещение от единичной силы; $\chi = 1 - \omega^2/p^2$.

Амплитуды внутренних усилий для системы с одной степенью свободы вычисляются путем статического расчета конструкции на нагрузку $R = kz$.

При нагрузке (4.36) амплитуда перемещений системы с одной степенью свободы определяется по формуле (4.38) и графику рис. 4.7, причем следует положить:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= \frac{z_2}{z_1}; \\ \sin \psi_1 &= \frac{z''_1}{z_1}; \quad \cos \psi_1 = \frac{z'_1}{z_1}; \\ \sin \psi_2 &= \frac{z''_2}{z_2}; \quad \cos \psi_2 = \frac{z'_2}{z_2}. \end{aligned}\right\} \tag{4.43}$$

Амплитуды перемещений, углов поворота и внутренних усилий балок перекрытий при гармонической нагрузке можно определять по формуле

$$z_0(\alpha) = \sqrt{[z'(\alpha)]^2 + [z''(\alpha)]^2}, \tag{4.44}$$

где

$$z'(\alpha) = \sum_{r=1} B_r(\alpha) \chi_r X_r(\alpha);$$

$$z''(\alpha) = -\gamma \sum_{r=1}^{k} B_r(\alpha) X_r(\alpha);$$

$$B_r(\alpha) = \frac{b_r}{p_r^2(\chi_r^2 + \gamma^2)};$$

$$b_r = \frac{1}{\mu_r l} \int_0^1 q(\alpha) X_r(\alpha)\, d\alpha;$$

$X_r(\alpha)$ — r-я нормированная форма собственных колебаний балки; μ_r — приведенная равномерно распределенная масса; l — длина балки (или длина пролета в случае неразрезной балки); $\alpha = x/l$ — приведенная координата, отсчитываемая от левой опоры в каждом пролете; $q(\alpha)$ — внешняя нагрузка; остальные обозначения такие же, как и в случае системы с n степенями свободы.

Если в точке с координатой $x = x_0$ приложена сосредоточенная сила или изгибающий момент, изменяющиеся во времени по гармоническому закону, то

$$b_r = \frac{P}{\mu_r l} X_r(\alpha_0); \qquad \alpha_0 = \frac{x_0}{l}$$

и

$$b_r = \frac{M}{\mu_r l^2} X_r'(\alpha_0)$$

соответственно.

Амплитуды углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил будут

$$\left.\begin{aligned} \theta_0(\alpha) &= \frac{1}{l}\sqrt{\left[\sum_{r=1}^{k} B_r \chi_r X_r'(\alpha)\right]^2 + \left[\gamma \sum_{r=1}^{k} B_r X_r'(\alpha)\right]^2}; \\ M_0(\alpha) &= \frac{EJ}{l^2}\sqrt{\left[\sum_{r=1}^{k} B_r \chi_r X_r''(\alpha)\right]^2 + \left[\gamma \sum_{r=1}^{k} B_r X_r''(\alpha)\right]^2}; \\ Q_0(\alpha) &= \frac{EJ}{l^3}\sqrt{\left[\sum_{r=1}^{k} B_r \chi_r X_r'''(\alpha)\right]^2 + \left[\gamma \sum_{r=1}^{k} B_r X_r'''(\alpha)\right]^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.45)$$

Таблицы нормированных форм собственных колебаний однопролетных и неразрезных балок и их производных до третьей включительно можно найти в инструкциях [1, 3]. Если частота вынужденных колебаний отличается на 10% и более от ближайшей частоты собственных колебаний, то в формулах (4.44), (4.45) можно не учитывать внутреннее неупругое сопротивление, положив $\gamma = 0$.

При периодической нагрузке

$$q(\alpha, t) = q_1(\alpha)\cos\omega t + q_2(\alpha)\cos(2\omega t + \varphi_1) \qquad (4.46)$$

наибольшие перемещения, углы поворота и внутренние усилия так же, как и в случае системы с конечным числом степеней свободы, можно определять путем умножения на коэффициент $\Omega_{макс}$, определяемый по графику (рис. 4.5) или по формуле (4.38), соответствующих параметров, полученных в результате расчета на действие нагрузки $q_1(\alpha)\cos\omega t$. При этом принимается:

$$\varkappa = \frac{z_2(\alpha)}{z_1(\alpha)}; \quad \varkappa = \frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_1(\alpha)}$$

и т. д. Фазы ψ_1 и ψ_2 в этом случае определяются по формулам:

$$\sin\psi_1 = \frac{z_1''}{z_1}; \quad \cos\psi_1 = \frac{z_1'}{z_1}$$

и т. д., причем для ψ_1 берутся значения z_1', z_1'', θ_1', θ_1'', ..., вычисленные от нагрузки $q_1\cos\omega t$, а для ψ_2 — от нагрузки $q_2\cos 2\omega t$.

В случае резонанса в формулах (4.44), (4.45) можно сохранить только резонирующие гармоники.

Амплитуды перемещений, углов поворота и внутренних усилий в однопролетных и неразрезных плитах могут определяться по приближенным формулам, аналогичным (4.41), (4.42). Например, амплитуда перемещений плиты

$$z(\alpha, \beta) = \sqrt{[z'(\alpha, \beta)]^2 + [z''(\alpha, \beta)]^2}\,, \tag{4.47}$$

где

$$z'(\alpha, \beta) = \sum_{r=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} B_{rs}(\alpha, \beta)\,\chi_{rs};$$

$$z''(\alpha, \beta) = -\gamma \sum_{r=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} B_{rs};$$

$$B_{rs} = \frac{b_{rs} X_r(\alpha)\, Y_s(\beta)}{p_{rs}^2 \left(\chi_{rs}^2 + \gamma^2\right)};$$

$$b_{rs} = \frac{1}{\mu_{rs} l_x l_y} \int_0^1 \int_0^1 q(\alpha, \beta)\, X_r(\alpha)\, Y_s(\beta)\, d\alpha d\beta;$$

$$\chi_{rs} = 1 - \frac{\omega^2}{p_{rs}^2}; \quad \beta = \frac{y}{l_y}; \quad \alpha = \frac{x}{l_x}.$$

Здесь $X_r(\alpha)$, $Y_s(\beta)$ — ортонормированные формы собственных колебаний балок с соответствующими числом пролетов и краевыми условиями (балочные функции). В случае сосредоточенной силы

$$b_{rs} = \frac{P}{\mu_{rs} l_x l_y} X_r(\alpha_0)\, Y_s(\beta_0).$$

Формулы для углов поворотов, изгибающих моментов и поперечных сил получаются из (4.47) дифференцированием z' и z'' в соответствии с известными формулами технической теории изгиба пластинок (см. раздел 8).

4.4. Пример расчета

На двухпролетную балку перекрытия с равномерно распределенной погонной массой $\mu_* = 408$ *кг·сек²/м²* действует динамическая нагрузка, изменяющаяся по гармоническому закону (рис. 4.6). Амплитуда одной возмущающей силы $P = 2400$ *кгс*, круговая частота $\omega = 48$ *рад/сек*, частота $n = 7{,}64$ *гц*. Эпюры внутренних усилий в балке от статической нагрузки представлены на рис. 4.7. Коэффициент перегрузки для динамической нагрузки $k_д = 1{,}3$, а для статической $k_с = 1{,}2$. Сечение балки показано на рис. 4,8, бетон — марки 200, продольная растянутая арматура — без предварительного напряжения из горячекатаной стали класса А-III, площадь ее сечения $F_а = 34{,}45$ *см²* (4⌀28+2⌀25); поперечная арматура — из горячекатаной стали класса А-I по 3 стержня диам. 12 *мм* в одном сечении с шагом 10 *см* ($F_x = 3{,}39$ *см²*), приваренных к продольной арматуре точечной контактной сваркой. Такое же сечение имеет балка и на средней опоре, но растянутая арматура расположена в верхней его части. Жесткость сечения балки $E_б J_п = 28 \cdot 10^6$ *кгс·м²*.

Пребывание обслуживающего персонала на перекрытии не превышает 15% рабочего времени.

Величина амплитуд колебаний перекрытия по технологическим требованиям не ограничивается.

Требуется определить амплитуды динамических перемещений балки и рассчитать ее на прочность и выносливость.

1. Определяем амплитуды динамических перемещений по формуле (4.44). В силу симметрии нагрузки и кососимметричности нечетных форм собственных колебаний балки коэффициенты b_r в (4.44), а также в (4.45), соответствующие нечетным формам, равны нулю и поэтому в дальнейшем учитываем только четные формы.

Круговые частоты собственных колебаний двухпролетной балки (см. раздел 7):

$$p_1^0 = \frac{9,87}{6^2}\sqrt{\frac{28\cdot 10^6}{408}} = 71,8 \text{ рад/сек};$$

$$p_2^0 = \frac{15,42}{6^2}\sqrt{\frac{28\cdot 10^6}{408}} = 112,2 \text{ рад/сек};$$

$$p_4^0 = \frac{49,97}{6^2}\sqrt{\frac{28\cdot 10^6}{408}} = 363,6 \text{ рад/сек}.$$

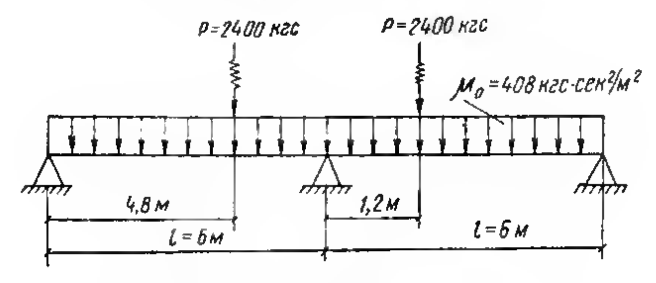


Рис. 4.6. Схема балки

По табл. 4.6 возможную погрешность в определении частот принимаем равной $\varepsilon_0 = 0,25$. Левая граница первой частотной зоны будет:

$$p_1' = (1-\varepsilon_0)\, p_1^0 = (1-0,25)\, 71,8 = 53,85 \text{ рад/сек}.$$

Таким образом, частота вынужденных колебаний $\omega = 48$ *рад/сек* попадает в дорезонансную зону и согласно п. 4.3 в качестве расчетных значений частот собственных колебаний принимают нижние границы частотных зон:

$$p_2 = p_2' = (1-\varepsilon_0)\, p_2^0 = (1-0,25)\, 112,2 = 84,15 \text{ рад/сек};$$

$$p_4 = p_4' = (1-0,35)\, 363,5 = 272,6 \text{ рад/сек}.$$

Подсчитываем по формуле (4.47):

$$b_2 = \frac{P}{\mu_0 l} X_2\left(\frac{4,8}{6}\right) + \frac{P}{\mu_0 l} X_2\left(\frac{1.2}{6}\right) = \frac{P}{\mu_0 l}\,[X_2\,(0,8) + X_2\,(0,2)].$$

По таблицам балочных функций [1, 3] находим:

$$b_2 = \frac{2400}{408\cdot 6}\,(0,322 + 0,322) = 0,631 \text{ м/сек}^2$$

$$b_4 = \frac{2400}{408\cdot 6}\,(-0,7597-0,7597) = -1,49 \text{ м/сек}^2$$

Частота вынужденных колебаний ω более чем на 10% отличается от ближайшей частоты собственных колебаний. Поэтому можно положить $\gamma = 0$ (см. стр. 87). Тогда, оставляя в формуле (4.47) два члена, получим:

$$z_4\,(\alpha) = B_2\chi_2 X_2\,(\alpha) + B_4\chi_4 X_4\,(\alpha).$$

Так как $X_2\,(\alpha)$ и $X_4\,(\alpha)$ симметричны, то будут симметричны и амплитуды перемещений z_0. Поэтому достаточно рассмотреть один, например левый, пролет балки. Имеем:

$$\chi_2 = 1 - \frac{\omega^2}{p_2^2} = 1 - \frac{48^2}{84,15^2} = 0,675;$$

$$\chi_4 = 1 - \frac{\omega^2}{p_4^2} = 1 - \frac{48^2}{272,6^2} = 0,969$$

$$B_2 = \frac{b_2}{p_2^2\left(\chi_2^2+\gamma^2\right)} = \frac{0,631}{84,15^2\cdot 0,675^2} = 1,956\cdot 10^{-4}\ м;$$

$$B_4 = \frac{b_4}{p_4^2\left(\chi_4^2+\gamma^2\right)} = \frac{-1,49}{272,6^2\cdot 0,969^2} = -0,2135\cdot 10^{-4}\ м.$$

Подставляя вычисленные значения B_2, B_4, χ_2 и χ_4, получим:

$$z_0(\alpha) = 1,956\cdot 10^{-4}\cdot 0,675\ X_2(\alpha) - 0,2135\cdot 10^{-4}\cdot 0,969\ X_4(\alpha) =$$
$$= 10^{-4}\left[1,32\ X_2(\alpha) - 0,207\ X_4(\alpha)\right].$$

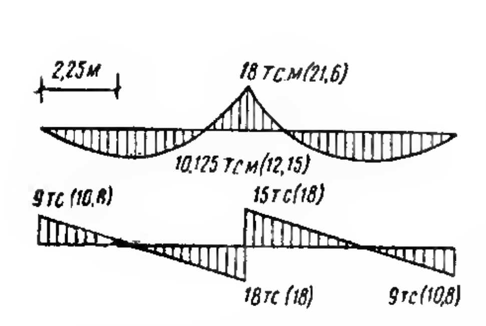


Рис. 4.7. Эпюра внутренних усилий от нормативной и расчетной (в скобках) статической нагрузки

Рис. 4.8. Сечение балки

Определим максимальную амплитуду перемещений. Для этого составим уравнение

$$\frac{dz_0(\alpha)}{d\alpha} = 10^{-4}\left[1,32\ X_2'(\alpha) - 0,207\ X_4'(\alpha)\right] = 0,$$

откуда с точностью до 0,05 — шага таблицы балочных функций — $\alpha = 0,50$ и максимальная амплитуда равна:

$$z_0(0,5) = 10^{-4}(1,32\cdot 1,022 + 0,207\cdot 0,4033) = 143\cdot 10^{-4}\ м = 0,143\ мм.$$

Согласно СН 245-63 допускаемая амплитуда перемещений при частоте $n=7,64$ гц равна $a_0=0,05$ мм. Учитывая, что люди находятся на колеблющихся конструкциях менее 15% времени, принимаем $a_0=3\cdot 0,05=0,15$ мм. Таким образом, максимальная амплитуда перемещений оказалась меньше допустимой.

2. Определяем изгибающие моменты M и поперечные силы Q от расчетной динамической нагрузки. При этом вычисленные ранее значения B_2 и B_4 следует брать с коэффициентом перегрузки $k_{д}=1,3$. С учетом только двух форм собственных колебаний по формуле (4.45) получаем:

$$M_0(\alpha) = \frac{E_б J_п}{l^2}\left[B_2\chi_2 X_2''(\alpha) + B_4\chi_4 X_4''(\alpha)\right] = \frac{28\,000\cdot 1,3}{6^2}10^{-4}\left[1,956\cdot 0,675\ X_2''(\alpha) -\right.$$
$$\left.- 0,2135\cdot 0,969\ X_4''(\alpha)\right] = 0,1335\ X_2''(\alpha) - 0,0210\ X_4''(\alpha);$$

$$Q_0(\alpha) = \frac{E_б J_п}{l^3}\left[B_2\chi_2 X_2'''(\alpha) + B_4\chi_4 X_4'''(\alpha)\right] = 0,02225\ X_2'''(\alpha) - 0,0035\ X_4'''(\alpha).$$

Эпюры амплитуд изгибающих моментов будут симметричны, а амплитуд поперечных сил — кососимметричны. Поэтому достаточно рассмотреть один левый пролет балки.

Максимальная амплитуда момента в пролете, определенная аналогично максимальной амплитуде перемещений, равна $M_0(0,55)=-2,15$ тс·м. Момент на средней опоре $M_0(1)=4,4$ тс·м. Поперечная сила имеет наибольшее значение на опоре $Q_0(1)=3,66$ тс.

3. Расчет на прочность. Наибольшие значения $M^р_с$ и $M^р_д$ будут на средней опоре:

$$M^р_с + M^р_д = 21,6 + 4,4 = 26 \ тс \cdot м.$$

Определяем предельный изгибающий момент $M^р$. Высота сжатой зоны бетона

$$x = \frac{R_а F_а}{R_н b} = \frac{3400 \cdot 34,45}{100 \cdot 30} = 39,05 \ см.$$

Так как полученное значение x больше $0,55\,h_0 = 0,55 \cdot 62,5 = 34,28$ *см*, то $M^р = 0,4\,R_н\,b h_0^2 = 0,4 \cdot 100 \times 30 \cdot 62,5^2 = 4 \cdot 687 \cdot 500$ *кгс · см* $= 46,87$ *тс · м* > 26 *тс · м*, так что прочность сечения обеспечена.

4. Расчет на выносливость. Сначала проверим на выносливость сечения, нормальные к продольной оси балки. Для этого определяем наибольший и наименьший изгибающие моменты в сечении на опоре, как наиболее опасном:

$$M_{макс} = M^н_с + M^р_д = 18 + 4,4 = 22,4 \ тс \cdot м;$$

$$M_{мин} = M^н_с - M^р_д = 18 - 4,4 = 13,6 \ тс \cdot м.$$

Высоту сжатой зоны бетона определим из уравнения

$$\frac{bx^2}{2} = n' F_а (h_0 - x),$$

принимая при этом коэффициент n' по табл. 8.1 [6] равным 25,

$$\frac{30\,x^2}{2} = 25 \cdot 34,45\,(62,5 - x); \quad x = 37,7.$$

Центр тяжести приведенного сечения расположен на уровне нейтральной линии. Момент инерции приведенного сечения без учета площади растянутой зоны бетона

$$J_п = J_б + n' J_а = \frac{bx^3}{3} + n' F_а (h_0 - x)^2 =$$

$$= \frac{30 \cdot 37,7^3}{3} + 25 \cdot 34,45\,(62,5 - 37,7)^2 = 1,065 \cdot 10^6 \ см^4.$$

Проверяем выносливость растянутой арматуры. Характеристики цикла напряжений в арматуре и бетоне

$$\rho_а = \rho_б = \frac{M_{мин}}{M_{макс}} = \frac{13,6}{22,4} = 0,61.$$

Так как $\rho_а = 0,61 < 0,9$ (п. 8.11 [6]), проверка на выносливость арматуры необходима.

По табл. 8.3 [6] при $\rho_а = 0,61$ находим $k_{\rho_а} = 0,78$. По табл. 8.4 [6] при точечной контактной сварке $k_с = 0,75$. Тогда расчетное сопротивление арматуры при расчете на выносливость

$$R'_а = k_с k_{\rho_а} R_а = 0,75 \cdot 0,78 \cdot 3400 = 1989 \ кгс/см^2.$$

Определяем наибольшее напряжение в нижнем ряду растянутой арматуры, принимая:

$$y_а = h - a - x = 70 - 4,5 - 37,7 = 27,8;$$

$$\sigma_{а\,макс} = n' \frac{M_{макс}}{J_п} y_а = 25 \frac{2\,240\,000}{1\,065\,000} 27,8 = 1462 \ кгс/см^2,$$

что меньше $R'_а = 1989$ *кгс/см²*, и выносливость растянутой арматуры обеспечена.

Так как $\rho_б = 0,61 > 0,6$ (см. п. 8.9 [6]), проверка на выносливость сжатой зоны бетона не требуется.

Аналогично производится расчет на выносливость в наклонных сечениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Инструкция по расчету несущих конструкций промышленных зданий и сооружений на динамические нагрузки. Стройиздат, 1970.
2. Инструкция по расчету покрытий промышленных зданий, воспринимающих динамические нагрузки. Стройиздат, 1967.
3. Инструкция по расчету перекрытий на импульсивные нагрузки. Стройиздат, 1966.
4. Инструкция по определению динамических нагрузок от машин, устанавливаемых на перекрытиях промышленных зданий. Стройиздат, 1966.
5. Инструкция по проектированию и расчету виброизоляции машин с динамическими нагрузками и оборудования, чувствительного к вибрациям (И 204-55). Госстройиздат, 1956.
6. Инструкция по проектированию железобетонных конструкций. Стройиздат, 1968.
7. Вольфсон Б. П. О собственных колебаниях одномерных периодических систем. В сб.: «Исследования по теории сооружений», вып. XVII. Стройиздат, 1969.
8. Кац А. М. Вынужденные колебания при прохождении через резонанс. Инженерный сборник, т. 3, вып. 2, 1947.
9. Колоушек В. и др. Динамика строительных конструкций. Стройиздат, 1969.
10. Коренев Б. Г., Пановко Я. Г. Динамический расчет сооружений. В сб.: «Строительная механика в СССР. 1917—1967». Стройиздат, 1969.
11. Коренев Б. Г. Расчет промсооружений на действие эксплуатационной динамической нагрузки. «Строительная механика и расчет сооружений», 1962, № 4.
12. Корчинский И. Л., Поляков С. В., Быховский В. А. и др. Основы проектирования зданий в сейсмических районах. Госстройиздат, 1961.
13. Подольский В. Г. Вибрация конструкций при сухом трении между элементами. «Прапор», 1970.
14. Сигалов Э. Е. Практический метод расчета рам на колебания. В сб.: «Строительная механика и конструкции». Стройиздат, 1957.
15. Сорокин Е. С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. Госстройиздат, 1956.
16. Сорокин Е. С. Динамика междуэтажных перекрытий. Стройиздат, 1941.
17. Синтко Н. К. Динамика сооружений. Госстройиздат, 1960.
18. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. Физматгиз, 1967.
19. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. «Машиностроение», 1970.
20. Цейтлин А. И., Гусева Н. И. Об определении нагрузок на фундаменты при групповой установке неуравновешенных машин с синхронными двигателями. «Основания, фундаменты и механика грунтов», 1972, № 3.

РАЗДЕЛ 5

РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ НА ДЕЙСТВИЕ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ИМПУЛЬСИВНЫХ НАГРУЗОК

(Е. С. Сорокин)

5.1. Основные расчетные положения

Задачей рассматриваемых в разделе методов расчета промышленных сооружений на импульсивные эксплуатационные нагрузки является определение общих перемещений и внутренних усилий, возникающих в элементах сооружений при изгибных деформациях под действием поперечных кратковременных сил и ударов, прикладываемых однократно или многократно. Определение местных упругих и пластических деформаций в зоне приложения к конструкции изгибающего удара данным расчетом не предусматривается. Под импульсивными эксплуатационными нагрузками понимаются кратковременные силы и удары, возникающие при действии соответствующих производственных установок и характеризующиеся умеренной величиной импульса, не способной вызвать в элементах сооружения макропластические деформации [1]. Возникающие при этом микропластические деформации частиц материала, являющиеся основной причиной рассеяния энергии колебаний, учитываются в расчетах как внутреннее трение.

Цель расчета в том, чтобы, во-первых, обеспечить прочность сооружений, подвергающихся действию импульсивных нагрузок, и, во-вторых, ограничить скорости и ускорения колебаний конструкций уровнем, безвредным для людей и точной технологии производства. При выполнении второго требования — значительно более жесткого — учет импульсивных нагрузок при проверке прочности сооружения оказывается обычно излишним.

Учитываемые и пренебрегаемые при расчете факторы

На определяемые расчетом перемещения и внутренние усилия в конструкции, возникающие при действии на нее импульсивных нагрузок, существенное влияние оказывают следующие факторы, которые необходимо учитывать в расчетах: 1) частоты собственных колебаний конструкций, содержащиеся в усеченном спектре длиной не более $25p_1$, где p_1 — основная круговая частота; 2) погрешность определения частот собственных колебаний; 3) внутреннее трение в конструкции, влияние которого возрастает с уменьшением продолжительности импульса; 4) продолжительность действия импульса; 5) форма импульса [2]; 6) коэффициент восстановления в случае нагрузок ударного характера; 7) периодичность повторных импульсов и ударов, которая может приводить к появлению импульсного резонанса.

Зависимость между амплитудами циклического напряжения и циклической деформации принимается линейной, иначе говоря, ось петли гистерезиса считается прямолинейной, что соответствует данным опытов над основными строительными материалами.

Влиянием инерции вращения поперечных сечений и деформаций сдвига элементов конструкции пренебрегают, поскольку это влияние в большинстве случаев несущественно, между тем как его учетом сильно осложняется расчет.

В подавляющем большинстве случаев эксплуатационные импульсивные нагрузки по характеру приложения к конструкции приближаются к сосредото-

---

[1] Расчет конструкций на кратковременные воздействия большой интенсивности см. раздел 13.

[2] То есть закон изменения во времени кратковременной силы.

ченным. Можно пренебрегать влиянием размеров площадки распределения импульса, если они не превышают 20% соответствующих размеров одномерных или двумерных элементов конструкции (пролета балки или длин сторон плиты).

Импульсивные нагрузки

Под импульсивной нагрузкой однократного действия понимается кратковременная нагрузка постоянного направления, имеющая не более одного максимума за время ее непрерывного действия τ (рис. 5.1, *а*), представленная аналитическим выражением:

$$\left.\begin{aligned} P(t) &= P_0 f(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \tau; \\ P(t) &= 0 \qquad \text{при } t > \tau; \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

здесь $t=0$ — начало действия нагрузки; P_0 — ее максимум; $f(t)$ — функция, характеризующая форму импульса, причем максимум $|f(t)|=1$. Если на-

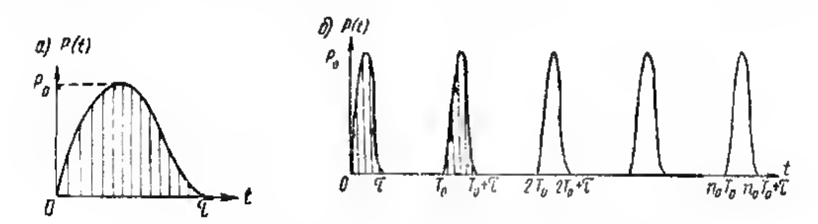


Рис. 5.1. График кратковременных нагрузок

а — однократного действия; *б* — периодического действия

грузка за время τ меняет знак или имеет более одного максимума, то ее действие можно рассматривать как последовательное приложение нагрузок типа (5.1). Нагрузка (5.1) однократного действия характеризуется тремя параметрами: 1) продолжительностью действия τ; 2) формой импульса $f(t)$; 3) наибольшей величиной P_0 либо импульсом силы S:

$$S = P_0 \int_0^{\tau} f(t)\, dt. \tag{5.2}$$

В зависимости от того, какая из двух величин — P_0 или S — принимается за третий параметр импульсивной нагрузки, способ расчета упругих систем на действие такой нагрузки приобретает две существенно различные формы; результаты же расчета не зависят от выбора параметра. В дальнейшем изложен способ расчета по импульсу силы, преимущество которого для кратковременных сил показано в п. 5.2.

Продолжительность действия эксплуатационных импульсивных нагрузок, характерных для промышленных зданий, имеет своим минимумом величину, близкую к $\tau_{мин}=0{,}001$ *сек*. Реакция упругой системы на кратковременную нагрузку зависит от отношения τ к наименьшему учитываемому периоду собственных колебаний системы T_N. Если $\tau/T_N \leqslant 0{,}1$, импульс силы можно считать мгновенным, а реакцию системы — зависящей только от величины импульса S. При $\tau/T_N > 0{,}1$ реакция системы зависит от всех трех параметров нагрузки. Если же $\tau/T_1 > 2{,}5$, где T_1 — основной период собственных колебаний системы, более удобным оказывается способ расчета, принимающий за третий параметр нагрузки ее максимум P_0. Однако такие нагрузки уже теряют характер импульса.

Величину импульса при прямом ударе тела по конструкции можно определять по приближенной формуле

$$S = mv_0(1 + k_0), \qquad (5.3)$$

где m — масса ударяющего тела; v_0 — его скорость в начале удара; k_0 — коэффициент восстановления при ударе, зависящий от свойств соударяющихся тел и принимаемый при отсутствии более точных данных по табл. 5.1. За форму импульса при этом может быть принята колоколообразная кривая (рис. 5.2, 6-я форма).

Таблица 5.1

Ориентировочные значения коэффициента k_0

Материал поверхности конструкции, воспринимающей удар	Материал и форма ударяющего тела				
	твердые металлы (сталь, сплавы)		медь, алюминий, дерево, твердые пластмассы, камень, бетон и пр.		мягкие пластичные материалы (асфальт, глины, смолы, масла и пр.)
	шар	параллелепипед	шар	параллелепипед	любая форма
Сталь	0,60	0,35	0,40	0,25	0
Дерево	0,55	0,30	0,40	0,20	0
Камень	0,40	0,20	0,30	0,15	0
Бетон	0,35	0,15	0,25	0,10	0
Ксилолит	0,20	0,10	0,10	0,05	0
Асфальт	0	0	0	0	0

Из трех параметров импульса решающее влияние на реакцию системы оказывают его величина S и продолжительность τ; форма же импульса оказывает второстепенное влияние. Величины S и τ можно оценить расчетом или опытным путем. Если импульсивная нагрузка возникает при действии машин с определенной кинематической схемой, значения S и τ могут быть оценены из рассмотрения этой схемы. Продолжительность удара упругих тел можно оценить по данным известных опытов или расчетом, исходя из упругих характеристик соударяющихся тел. Продолжительность удара пластических тел можно оценить как время их пластического деформирования. Если нельзя оценить τ расчетным или опытным путем, но имеется уверенность, что она достаточно мала, можно принимать в запас прочности и жесткости конструкции $\tau_{мин} = 0{,}001$ *сек.*

Из кратковременных нагрузок многократного действия наибольший интерес представляют периодические импульсы, т. е. повторяющиеся через равные промежутки времени T_0, называемые периодом импульсов (рис. 5.1, б). Обычно после нескольких повторений, необходимых для выполнения определенной технологической операции, следует пауза. Поэтому следует различать два случая периодических импульсов: 1) число повторений импульсов n в одной операции невелико, так что колебания конструкции являются неустановившимися (непериодическими); 2) число повторений в одной операции настолько велико, что колебания конструкции к концу операции являются установившимися (периодическими). Первый случай обычно имеет место, если n не превышает целого числа, ближайшего к числу $(2\gamma)^{-1}$, где γ — коэффициент неупругого сопротивления конструкции. Периодическая импульсивная нагрузка характеризуется, таким образом, пятью параметрами: S, τ, $f(t)$, T_0 и n.

В целях удобства расчета вводится классификация импульсивных нагрузок по категориям, определяемым величиной мгновенного импульса S_0, эквивалентного данному однократному импульсу S продолжительностью τ по наиболь-

шему перемещению конструкции при колебаниях по основному тону с периодом T_1:

$$S_0 = S\varepsilon\left(\frac{\tau}{T_1}\right). \qquad (5.4)$$

Значения коэффициента $\varepsilon(\tau/T_1)$ даны в табл. 5.6 в зависимости от отношения $\tau^* = \tau/T_1$ и формы импульса. Классификация импульсивных нагрузок по величине S_0 дана в табл. 5.2.

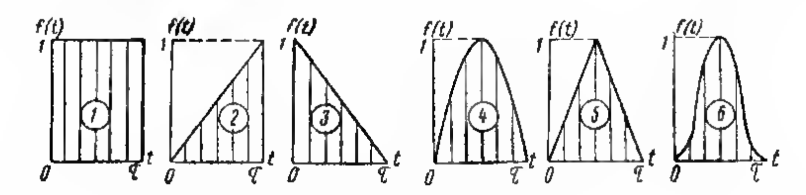


Рис. 5.2. Графики шести кратковременных нагрузок, соответствующих уравнениям (5.13)

Таблица 5.2

Классификация импульсов по категориям

Категория импульсивной нагрузки	Характеристика импульса	Величина эквивалентного мгновенного импульса S_0 в *кгс·сек*
I	Слабый	До 10
II	Умеренный	От 10 до 100
III	Сильный	» 100 » 1000
IV	Очень сильный	Более 1000

Эта условная классификация позволяет заранее указать случаи, когда импульсивные нагрузки можно не учитывать при проверке прочности обычных конструкций промышленных зданий и учесть приближенно зависимость коэффициента внутреннего трения от уровня напряжений в конструкции (см. раздел 3). Естественно, что мгновенный импульс S_0, определенный по формуле (5.4), не будет эквивалентен кратковременному импульсу при колебаниях конструкции по высшим собственным формам.

Динамические характеристики конструкций

К ним относятся массы, динамические жесткости и коэффициенты неупругого сопротивления элементов конструкции.

Масса элемента конструкции получается делением на ускорение силы тяжести всех систематически действующих на него статических нагрузок, обладающих массой (собственного веса и наиболее вероятных полезных грузов), которые не следует смешивать с расчетной статической нагрузкой. Эпизодические нагрузки (толпа людей, ремонтные грузы и т. п.) при определении массы во внимание не принимаются. Распределение масс элемента должно соответствовать фактическому распределению нагрузок.

Динамические жесткости элементов конструкции при поперечном изгибе принимаются в соответствии с рекомендациями раздела 3.

Коэффициент неупругого сопротивления γ, характеризующий затухание,

считается одинаковым для всех тонов собственных колебаний конструкции и принимается в зависимости от материала конструкции и уровня напряжений согласно разделу 3 [табл. 3.2 и формула (3.11)].

Ограничения колебаний конструкций

Если на конструкции работают люди или расположено чувствительное к вибрациям оборудование, то поперечные колебания элементов конструкции, имеющие систематический характер, должны удовлетворять требованию

$$z_0 \leqslant a_0, \tag{5.5}$$

где z_0 — определяемое расчетом наибольшее перемещение элемента конструкции, вызванное действием периодической импульсивной нагрузки; a_0 — допустимая амплитуда колебаний, определяемая по формулам (5.6) и (5.7) соответственно для высоких и низких частот:

$$a_0 = \frac{v_0}{2\pi n_1} C_0 \text{ для } n_1 \geqslant 10 \text{ гц}; \tag{5.6}$$

$$a_0 = \frac{w_0}{4\pi^2 n_1^2} C_0 \text{ для } n_1 < 10 \text{ гц}. \tag{5.7}$$

Здесь $n_1 = p_1/2\pi$ — частота проверяемых колебаний элемента конструкции в *гц* (p_1 — круговая частота в *рад/сек*); v_0 и w_0 — допускаемые по санитарным нормам и технологии производственных процессов амплитуды скорости и ускорения установившихся гармонических колебаний с частотой n_1; C_0 — коэффициент, повышающий допускаемую амплитуду в зависимости от скорости затухания колебаний, вычисляемый по формуле

$$C_0 = 1 + 10\,\gamma\,(1 - T_1/T_0), \tag{5.8}$$

где γ — коэффициент неупругого сопротивления; $T_1 = 1/n_1$; $T_0 > T_1$ — период повторения импульсов (при $T_0 \leqslant T_1$ принимается $C_0 = 1$). Если колебания элемента конструкции представляют сложение нескольких однотонных колебаний с различными частотами, то их проверку по формуле (5.5) следует производить согласно указаниям [1]. Внутренние усилия (изгибающие моменты и поперечные силы), возникающие в элементах конструкции под действием импульсивных нагрузок, проверяются в случае одиночных импульсов исходя из условий статической прочности, а в случае систематически действующих повторных импульсов, кроме того, еще и из условия выносливости изгибаемых элементов согласно указаниям [1]. Если при частотах выше 15 *гц* условие (5.5) удовлетворяется, то проверка конструкции на выносливость не требуется, а проверка на прочность может быть выполнена без учета импульсивных нагрузок.

5.2. Системы с одной степенью свободы

Действие однократных импульсов

Внутреннее трение незначительно снижает максимальную величину перемещений z_0 (или внутренних усилий M_0 и Q_0) в системе с одной степенью свободы при однократном действии кратковременной нагрузки. Действительно, если продолжительность τ действия нагрузки не превышает периода T_1 свободных колебаний системы, то максимум перемещения будет в пределах этого периода и влияние затухания будет незначительным ввиду малости интервала времени. Если же $\tau \gg T_1$, влияние затухания на максимум перемещений будет также незначительным: при внезапно приложенной нагрузке максимум перемещений будет в первом полупериоде колебаний, а при нагрузке, плавно возрастающей от нуля, перемещение будет мало отличаться от статического. Поэтому незначительным влиянием внутреннего трения на максимум переме-

щений пренебрегают [3]. При желании приближенно учесть это влияние следует величину z_0 умножить на коэффициент $e^{-\gamma\pi/4}$. Во всех других случаях (периодические импульсы или системы с числом степеней свободы более одной) влиянием внутреннего трения пренебрегать нельзя и оно должно вводиться в дифференциальные уравнения колебаний.

Дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы под действием силы (5.1) без учета внутреннего трения имеет вид:

$$m\ddot{z}(t) + cz(t) = P(t), \tag{5.9}$$

где z — перемещение системы; m — ее масса; c — коэффициент жесткости.

При начальных нулевых условиях: $z(0)=0$, $\dot{z}(0)=0$ решение уравнения (5.9) для интервала времени $0 \leqslant t \leqslant \tau$ может быть представлено в виде

$$z = \frac{P_0}{mp_0} \int_0^t f(t') \sin p_0 (t - t')\, dt', \tag{5.10}$$

а для $t > \tau$

$$z = \frac{P_0}{mp_0} \int_0^\tau f(t') \sin p_0 (t - t')\, dt'. \tag{5.11}$$

В этих выражениях t — момент времени, для которого определяется перемещение; τ — продолжительность действия силы (5.1); p_0 — круговая частота свободных незатухающих колебаний системы:

$$p_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{2\pi}{T_1}. \tag{5.12}$$

Ниже рассматривается шесть часто встречающихся на практике форм импульса, показанных на рис. 5.2 и представленных следующими функциями $f(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ f(t) = 1;\\
&2)\ f(t) = \frac{t}{\tau};\\
&3)\ f(t) = 1 - \frac{t}{\tau};\\
&4)\ f(t) = \sin \pi \frac{t}{\tau};\\
&5)\ f(t) = \frac{2t}{\tau},\ \left(t \leqslant \frac{\tau}{2}\right);\ \ f(t) = 2\left(1 - \frac{t}{\tau}\right),\ \left(t > \frac{\tau}{2}\right);\\
&6)\ f(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\pi \frac{t}{\tau}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Подставляя выражения $f(t)$ из (5.13) в (5.10) и (5.11), выполняя интегрирование и вводя обозначения:

$$\xi = p_0 t = \frac{2\pi}{T_1} t; \quad \alpha = p_0 \tau = \frac{2\pi}{T_1} \tau; \quad z_c = \frac{P_0}{c}, \tag{5.14}$$

где z_c — статическое перемещение системы под действием силы P_0, получим формулы для определения отношения z/z_c (табл. 5.3).

Формулы для относительного перемещения $z(t)/z_c$

№ формы импульса в (5.13)	$z(t):z_c$	
	для $0 \leqslant t \leqslant \tau$ $(0 \leqslant \xi \leqslant \alpha)$	для $t > \tau$ $(\xi > \alpha)$
1	$1-\cos\xi$	$2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\xi-\frac{\alpha}{2}\right)$
2	$\frac{\xi-\sin\xi}{\alpha}$	$\cos(\xi-\alpha)-\frac{2}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\xi-\frac{\alpha}{2}\right)$
3	$\frac{\alpha-\xi+\sin\xi-\alpha\cos\xi}{\alpha}$	$\frac{2}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\xi-\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\xi$
4	$\frac{\alpha\left(\pi\sin\xi-\alpha\sin\frac{\pi}{2}\xi\right)}{\pi^2-\alpha^2}$	$\frac{2\pi\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\xi-\frac{\alpha}{2}\right)}{\pi^2-\alpha^2}$
5	$2(\xi-\sin\xi)$, $\left(\xi\leqslant\frac{\alpha}{2}\right)$; $\frac{2}{\alpha}\left[\alpha-\xi+2\sin\left(\xi-\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\xi\right]$, $\left(\xi>\frac{\alpha}{2}\right)$	$\frac{4}{\alpha}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\xi-\frac{\alpha}{2}\right)$
6	$\frac{4\pi^2(1-\cos\xi)-\alpha^2\left(1-\cos\frac{2\pi\xi}{\alpha}\right)}{2(4\pi^2-\alpha^2)}$	$\frac{4\pi^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\xi-\frac{\alpha}{2}\right)}{4\pi^2-\alpha^2}$

Наибольший практический интерес представляют максимальные значения z_0 перемещения z, выраженные в зависимости от относительной продолжительности действия силы:

$$\tau^* = \frac{\tau}{T_1} = \frac{\alpha}{2\pi}. \tag{5.15}$$

Для удобства определения z_0 вводится динамический коэффициент $\varkappa$:

$$\varkappa(\tau^*) = \frac{z_0(\tau^*)}{z_c}. \tag{5.16}$$

Его выражения для шести рассмотренных выше кратковременных сил даны в табл. 5.4. При одном и том же законе $f(t)$ они различны для разных областей значений τ^*.

Кривые $\varkappa(\tau^*)$, построенные по формулам табл. 5.4, показаны на рис. 5.3 для значений τ^* от 0 до 10. Из графиков видно, что максимумы перемещений наблюдаются в пределах значений τ от $0{,}5T_1$ до T_1. Сильное изменение $\varkappa$ наблюдается в области значений τ от 0 до $2{,}5\,T_1$. Для значений $\tau > 2{,}5T_1$ величина $\varkappa$ меняется слабо, приближаясь с увеличением τ к предельным значениям 1 (для сил, плавно возрастающих от 0) или 2 (для сил, приложенных внезапно). При расчете сооружений на импульсивные нагрузки наибольший интерес представляет, очевидно, первая область. Зная максимум P_0, относительную продолжительность τ^* и закон действия $f(t)$ кратковременной силы, можно

Таблица 5.4

Формулы для динамического коэффициента $\varkappa(\tau^*)$

№ формы импульса в (5.13)	Область значений τ^*	Функция $\varkappa(\tau^*)$
1	$0 \leqslant \tau^* \leqslant 1/2$	$2\sin\pi\tau^*$
	$\tau^* > 1/2$	2
2	$\tau^* \geqslant 0$	$\frac{1}{2\pi\tau^*}\sqrt{(1-\cos 2\pi\tau^*)^2+(2\pi\tau^*-\sin 2\pi\tau^*)^2}$
3	$0 \leqslant \tau^* \leqslant 3/8$	$\frac{1}{2\pi\tau^*}\sqrt{(1-\cos 2\pi\tau^*)^2+(2\pi\tau^*-\sin 2\pi\tau^*)^2}$
	$\tau^* > 3/8$	$2\left(1-\frac{1}{2\pi\tau^*}\operatorname{arctg} 2\pi\tau^*\right)$
4	$0 \leqslant \tau^* \leqslant 1/2$	$\frac{4\tau^*}{1-4\tau^*}\cos\pi\tau^*$
	$1/2 < \tau^* \leqslant 3/2$	$\frac{2\tau^*}{1-4\tau^*}\left(\sin\frac{4\pi\tau^*}{2\tau^*+1}-2\tau^*\sin\frac{2\pi}{2\tau^*+1}\right)$
	$\tau^* > 3/2$	$\frac{2\tau^*}{1-4\tau^*}\left(\sin\frac{4\pi\tau^*}{2\tau^*-1}-2\tau^*\sin\frac{2\pi}{2\tau^*-1}\right)$
5	$0 \leqslant \tau^* \leqslant 1/2$	$\frac{2}{\pi\tau^*}(1-\cos\pi\tau^*)$
	$1/2 \leqslant \tau^* \leqslant 5/3$	$\frac{1}{\pi\tau^*}[2\pi\tau^*-\xi^*+2\sin(\xi^*-\pi\tau^*)-\sin\xi^*]$
	$\tau^* > 5/3$	$1-\frac{\sin\pi\tau^*}{\pi\tau^*}$
6	$0 \leqslant \tau^* \leqslant 1/2$	$\frac{\sin\pi\tau^*}{1-\tau^{*2}}$
	$\tau^* > 1/2$	$\frac{1-\cos\xi^*-\tau^{*2}\left(1-\cos\frac{\xi^*}{\tau^*}\right)}{2(1-\tau)^*}$

Примечания: 1. Для 5-й формы импульса ξ^* — корень уравнения $2\cos(\xi^*-\pi\tau^*)=1+\cos\xi^*$.

2. Для 6-й формы ξ^* — корень уравнения $\sin\xi^*=\tau^*\sin\frac{\xi^*}{\tau^*}$.

определить статический прогиб z_c по формуле (5.14) и динамический коэффициент $\varkappa$ по формулам табл. 5.4 или графикам на рис. 5.3 и затем вычислить по формуле (5.16) максимальное перемещение системы:

$$z_0 = \varkappa(\tau^*)\, z_c. \tag{5.17}$$

Такой путь расчета можно назвать *способом динамического коэффициента.* Он соответствует предположению о постоянстве максимума P_0 кратковременной силы при изменении продолжительности и закона ее действия.

Другой способ расчета основан на предположении о постоянстве импуль-

са кратковременной силы при изменении продолжительности и закона ее действия. К нему можно прийти путем простейших преобразований формул, соответствующих способу динамического коэффициента. Заменяя в (5.17) z_c на P_0/c, выражая P_0 через импульс S из формулы (5.2), а c через p_0 из формулы (5.12) и учитывая, что $p_0T_1=2\pi$, получим:

$$z_0 = \varepsilon(\tau^*)\,\frac{S}{mp_0}, \tag{5.18}$$

где через $\varepsilon(\tau^*)$ обозначена функция

$$\varepsilon(\tau^*) = \frac{\varkappa(\tau^*)}{2\pi\int\limits_0^{\tau^*} f(t)\,dt}. \tag{5.19}$$

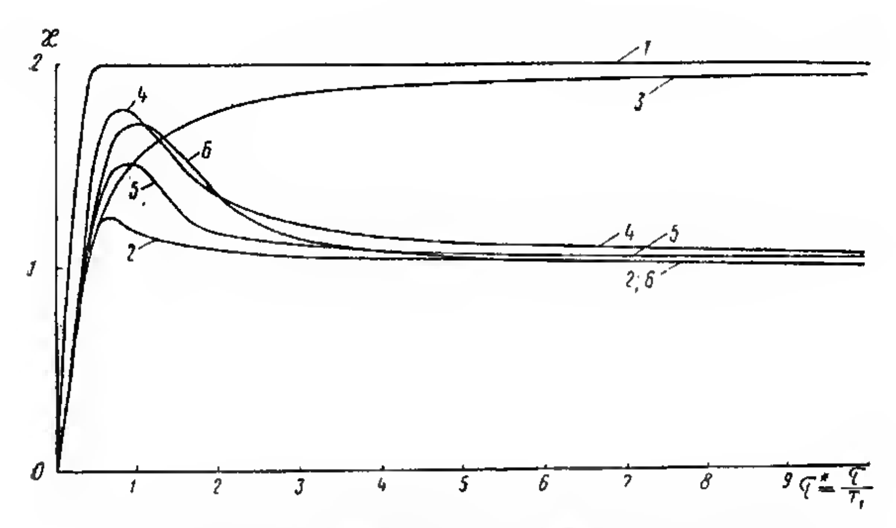


Рис. 5.3. Динамический коэффициент $\varkappa$ для шести кратковременных сил, показанных на рис. 5.2.

В табл. 5.5 для импульсов шести форм (5.13) даны значения функции $\varepsilon(\tau^*)$, которую назовем *коэффициентом импульсивности.*

Таблица 5.5

Значения $\int\limits_0^{\tau} f(\tau)\,dt$ и коэффициента импульсивности $\varepsilon(\tau^*)$

№ формы импульса в (5.13)	1	2	3	4	5	6
$\int\limits_0^{\tau} f(t)\,dt$	τ	$\tau/2$	$\tau/2$	$2\tau/\pi$	$\tau/2$	$\tau/2$
$\varepsilon(\tau^*)$	$\frac{\varkappa(\tau^*)}{2\pi\tau^*}$	$\frac{\varkappa(\tau^*)}{\pi\tau^*}$	$\frac{\varkappa(\tau^*)}{\pi\tau^*}$	$\frac{\varkappa(\tau^*)}{4\tau^*}$	$\frac{\varkappa(\tau^*)}{\pi\tau^*}$	$\frac{\varkappa(\tau^*)}{\pi\tau^*}$

Из рис. 5.4 видно, что деление $\varkappa(\tau^*)$ на τ^* существенно меняет характер кривых на рис. 5.3. На рис. 5.4 даны кривые $\varepsilon(\tau^*)$ для значений τ^* от 0,01 до 10. При $\tau^* \to 0$ (мгновенный импульс) $\varepsilon = 1$ независимо от формы импульса. Следовательно, величина S/mp_0 в (5.18) представляет максимальное перемещение системы при действии мгновенного импульса, равного S. Для кратко-

Таблица 5.6

Значения коэффициента ε

$\tau^* = \frac{\tau}{T_1}$	Формы импульсов (рис. 5.2)					
	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
0,01	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,05	0,996	0,999	0,999	0,999	0,999	0,998
0,10	0,983	0,990	0,990	0,991	0,994	0,993
0,15	0,963	0,974	0,974	0,979	0,981	0,985
0,20	0,936	0,958	0,958	0,963	0,968	0,974
0,25	0,900	0,933	0,933	0,943	0,950	0,960
0,30	0,858	0,905	0,905	0,917	0,930	0,943
0,35	0,810	0,872	0,872	0,890	0,902	0,923
0,40	0,757	0,835	0,835	0,858	0,875	0,901
0,45	0,697	0,797	0,800	0,823	0,844	0,876
0,50	0,637	0,755	0,761	0,785	0,811	0,849
0,60	0,530	0,664	0,692	0,705	0,739	0,788
0,70	0,455	0,569	0,631	0,625	0,667	0,724
0,80	0,398	0,477	0,579	0,552	0,559	0,661
0,90	0,354	0,416	0,533	0,489	0,537	0,599
1,0	0,318	0,369	0,494	0,433	0,480	0,543
1,2	0,265	0,301	0,429	0,344	0,383	0,444
1,4	0,227	0,253	0,379	0,277	0,306	0,365
1,6	0,199	0,219	0,340	0,227	0,244	0,301
1,8	0,177	0,192	0,307	0,192	0,208	0,252
2,0	0,159	0,172	0,280	0,167	0,184	0,212

временных импульсов коэффициент $\varepsilon < 1$ и с увеличением τ^* стремится к нулю. Из сравнения кривых на рис. 5.3 и 5.4 видно, что зависимости $\varkappa(\tau^*)$ значительно сложнее зависимостей $\varepsilon(\tau^*)$, представляющих монотонно убывающие кривые, образующие сравнительно узкий пучок, и пользоваться кривыми, приведенными на рис. 5.4, удобнее, чем кривыми на рис. 5.3. Ввиду этого следует отдать предпочтение способу расчета конструкций на импульсивные нагрузки

Таблица 5.7

Значения коэффициентов ε и ϰ

$\tau^* = \frac{\tau}{T_1}$	Формы импульсов (рис. 5.2)											
	1		2		3		4		5		6	
	ε	ϰ	ε	ϰ	ε	ϰ	ε	ϰ	ε	ϰ	ε	ϰ
2,5	0,127	2,000	0,135	1,064	0,230	1,808	0,125	1,250	0,144	1,127	0,152	1,191
3,0	0,106	2,000	0,112	1,053	0,195	1,839	0,104	1,200	0,117	1,106	0,119	1,125
3,5	0,091	2,000	0,095	1,045	0,169	1,861	0,083	1,167	0,099	1,091	0,099	1,089
4,0	0,080	2,000	0,083	1,040	0,149	1,878	0,071	1,143	0,086	1,080	0,085	1,067
5,0	0,064	2,000	0,066	1,032	0,121	1,900	0,056	1,111	0,068	1,064	0,066	1,042
6,0	0,053	2,000	0,054	1,027	0,102	1,916	0,045	1,091	0,056	1,053	0,055	1,029
7,0	0,045	2,000	0,046	1,023	0,088	1,928	0,038	1,076	0,048	1,046	0,046	1,021
8,0	0,040	2,000	0,041	1,020	0,077	1,938	0,033	1,066	0,041	1,040	0,040	1,016
9,0	0,035	2,000	0,036	1,018	0,069	1,944	0,029	1,059	0,037	1,035	0,035	1,012
10,0	0,032	2,000	0,032	1,016	0,062	1,950	0,026	1,053	0,033	1,032	0,032	1,010
15,0	0,021	2,000	0,021	1,010	0,042	1,966	0,017	1,035	0,021	1,021	0,021	1,004
20,0	0,016	2,000	0,016	1,008	0,031	1,975	0 013	1,025	0,016	1,016	0,016	1,002

по величине импульса (по коэффициенту импульсивности), а не по максимуму кратковременной силы (по коэффициенту динамичности). Способ расчета, в основу которого положена формула (5.18), и принимается в дальнейшем за основной. В табл. 5.6 и 5.7 даны значения коэффициентов ε и $\varkappa$ в зависимости от относительной продолжительности τ^* и формы импульса, которыми

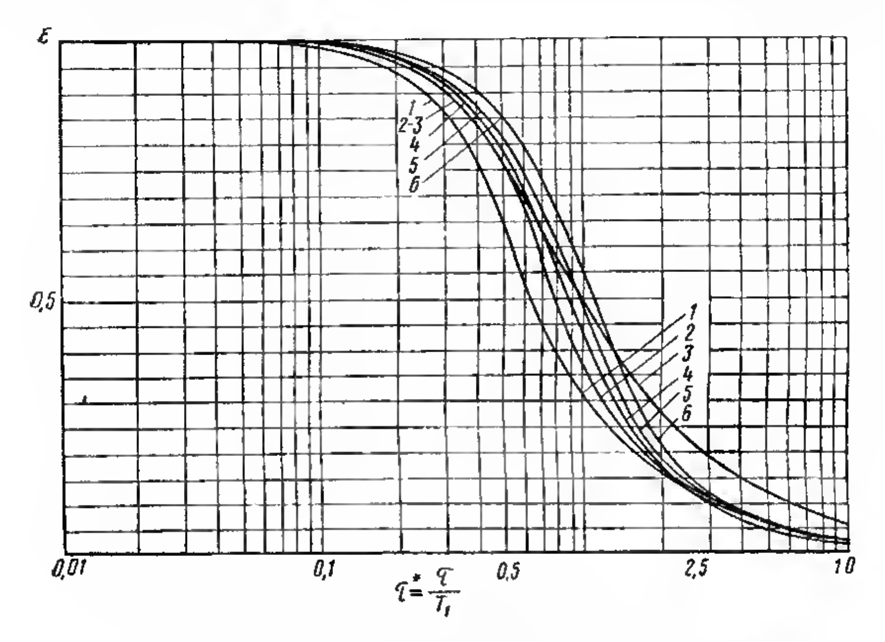


Рис. 5.4. Коэффициент импульсивности ε для шести кратковременных сил, показанных на рис. 5.2.

следует пользоваться при расчетах. Значения $\varkappa$ приводятся только для больших продолжительностей ($\tau^* > 2{,}5$), для которых удобно применять также формулу (5.17).

Действие периодичесих импульсов

Как уже указывалось, при определении перемещения системы под действием периодических импульсов необходим учет внутреннего трения в системе. Рассмотрим вначале действие периодических мгновенных импульсов.

При действии однократного мгновенного импульса на неподвижную систему уравнение ее колебаний с учетом внутреннего трения, независящего от скорости деформаций, однородно и имеет наиболее простой вид в комплексной форме (см. раздел 3):

$$m\ddot{z}^*(t) + (a + ib)\,cz^*(t) = 0. \tag{5.20}$$

Здесь z^* — комплексное перемещение; i — мнимая единица; a и b — вещественные постоянные, выражающиеся через коэффициент неупругого сопротивления γ по формулам:

$$a = \frac{4 - \gamma^2}{4 + \gamma^2}; \quad b = \frac{4\gamma}{4 + \gamma^2}. \tag{5.21}$$

Решение уравнения (5.20) должно удовлетворять условию устойчивости колебаний [5]:

$$\lim_{t\to\infty} |z^*| = 0. \tag{5.22}$$

Это решение имеет вид [4]:

$$z^* = z_0 e^{-\frac{\gamma}{2}pt} e^{i(pt+\nu)}, \tag{5.23}$$

где z_0 и ν — произвольные постоянные, а p — круговая частота свободных затухающих колебаний, выражающаяся через частоту незатухающих колебаний $p_0 = \sqrt{c/m}$ по формуле

$$p = \frac{p_0}{\sqrt{1+\gamma^2/4}}. \tag{5.24}$$

Действительное перемещение системы

$$z = \mathrm{Re}\, z^* = z_0 e^{-\frac{\gamma}{2}pt} \cos(pt+\nu) \tag{5.25}$$

под действием мгновенного импульса S_0, приложенного в момент $t=0$ к неподвижной системе, должно удовлетворять начальным условиям $z(0)=0$, $m\dot{z}(0)=S_0$. Получаем:

$$z = \frac{S_0}{mp} e^{-\frac{\gamma}{2}pt} \sin pt. \tag{5.26}$$

Для конечного числа $n+1$ приложений мгновенных импульсов с периодом T_0 решение строится наложением функций (5.26) с разными началами отсчета времени:

$$z_n = \frac{S_0}{mp} \sum_{r=0}^{n} e^{-\frac{\gamma}{2}p(t-rT_0)} \sin p(t-rT_0). \tag{5.27}$$

Здесь z_n — перемещение, которое достигается спустя n периодов T_0, так что время t, отсчитываемое от момента приложения первого импульса, заключено в пределах: $nT_0 \leqslant t \leqslant (n+1)T_0$; n — число повторений импульсов ($n=0$ соответствует однократному импульсу). Вводя новое время $t' = t - nT_0$, отсчитываемое от момента $t_n = nT_0$, причем теперь $0 \leqslant t' \leqslant T_0$, и принимая обозначения:

$$n - r = k;\ \frac{t'}{T_1} = t^*;\ \frac{T_0}{T_1} = \theta;\ 2\pi\theta = a';\ \gamma\pi\theta = b', \tag{5.28}$$

где t^* — относительное время ($0 \leqslant t^* \leqslant \theta$); θ — коэффициент кратности, преобразуем (5.27) к виду:

$$z_n = \frac{S_0}{mp_0} e^{-\gamma\pi t^*} (A_n \sin 2\pi t^* + B_n \cos 2\pi t^*). \tag{5.29}$$

Здесь введены обозначения:

$$
\left.
\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=0}^{n} e^{-b'k} \cos a'k = \\
&= \frac{e^{b'} - \cos a' - e^{-nb'} \cos (n+1) a' + e^{-(n+1)b'} \cos na'}{2(\operatorname{ch} b' - \cos a')} ; \\
B_n &= \sum_{k=0}^{n} e^{-b'k} \sin a'k = \\
&= \frac{\sin a' - e^{-nb'} \sin (n+1) a' + e^{-(n+1)b'} \sin na'}{2(\operatorname{ch} b' - \cos a')} .
\end{aligned}
\right\} \qquad (5.30)
$$

При небольшом n формула (5.29) описывает неустановившиеся колебания системы. Максимум z_n равен:

$$
(z_n)_{\text{макс}} = \frac{S_0}{mp} \cdot \frac{e^{-\gamma\pi t_0^*}}{\sqrt{1+\gamma^2/4}} \sqrt{A_n^2 + B_n^2} , \qquad (5.31)
$$

где t_0^* — наименьшее положительное значение величины

$$
t^* = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{2A_n - \gamma B_n}{2B_n + \gamma A_n} .
$$

При $\gamma \leqslant 0{,}1$ значение $(z_n)_{\text{макс}}$ можно определить с избытком по формуле

$$
(z_n)_{\text{макс}} = \frac{S_0}{mp} \sqrt{A_n^2 + B_n^2} . \qquad (5.32)
$$

Наибольший максимум устанавливается определением $(z_n)_{\text{макс}}$ для каждого значения n. Если коэффициент кратности θ равен целому числу N, то наступает импульсный резонанс на частоте собственных колебаний, при котором максимум z_n резко возрастает. Наибольший максимум будет в последнем периоде, он равен:

$$
(z_n)_{\text{макс}} = \frac{S_0}{mp} \cdot \frac{e^{-\frac{\gamma}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{\gamma}}}{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}}} \cdot \frac{1 - e^{-\gamma\pi N(n+1)}}{1 - e^{-\gamma\pi N}} \approx \frac{S_0}{mp} \cdot \frac{1 - e^{-\gamma\pi N(n+1)}}{1 - e^{-\gamma\pi N}} . \qquad (5.33)
$$

Погрешность последней формулы невелика при значениях $\gamma \leqslant 0{,}2$, обычных для строительных конструкций. Наибольший из максимумов z_n соответствует $N=1$. С увеличением N максимумы z_n убывают.

При достаточно большом n колебания системы, описываемые формулой (5.29), будут практически установившимися. Полагая в формулах (5.30) $n \to \infty$ и определяя максимум перемещения, выражаемого формулой (5.29), находим:

$$
z_{\text{макс}} = \frac{S_0}{mp\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}}} \cdot \frac{e^{b'/2} e^{-\gamma\pi t_0^*}}{\sqrt{2(\operatorname{ch} b' - \cos a')}} , \qquad (5.34)
$$

Рис. 5.5. Импульсные резонансы, отвечающие целым значениям коэффициента кратности θ

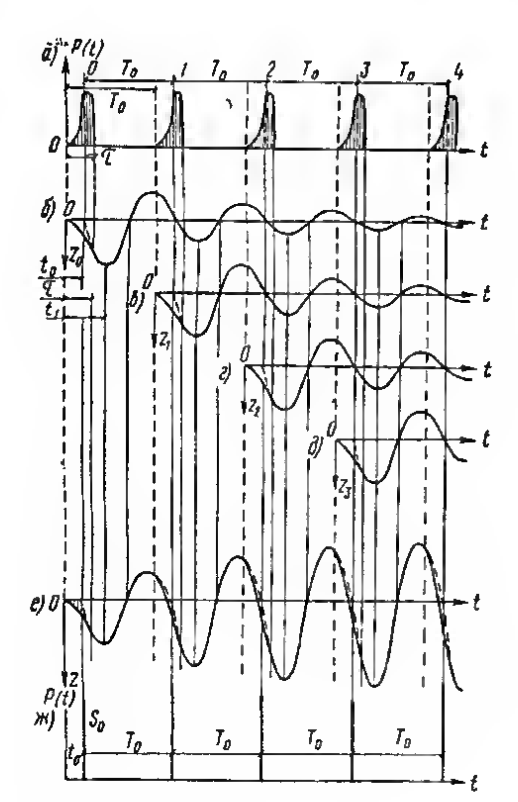


Рис. 5.6. Схема, показывающая возможность замены кратковременных импульсов мгновенными в задаче об импульсном резонансе

где t_0^* — наименьшее положительное значение величины

$$t^* = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{2(e^{b'} - \cos a') - \gamma \sin a'}{2 \sin a' + \gamma (e^{b'} - \cos a')}. \qquad (5.35)$$

Приближенно (при $\gamma \leqslant 0{,}1$) $z_{\text{макс}}$ равен с избытком:

$$z_{\text{макс}} \approx \frac{S_0}{mp} \cdot \frac{e^{b'/2}}{\sqrt{2(\operatorname{ch} b' - \cos a')}}. \qquad (5.36)$$

При $\theta = N$, где N — целое число, наступает импульсный резонанс. Резонансная амплитуда определяется по формуле

$$z_{\text{макс}}^{\text{рез}} = \frac{S_0}{mp\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}} \cdot \frac{e^{-\frac{\gamma}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{\gamma}}}{1 - e^{-\gamma\pi N}} \approx \frac{S_0}{mp} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\gamma\pi N}}, \qquad (5.37)$$

которая получается из (5.34) при $\theta = N$, или из (5.33) при $n \to \infty$.

На рис. 5.5 показаны кривые, построенные по (5.36); последовательные резонансные пики соответствуют целым значениям $\theta = N$ от 1 до 10 и различным значениям γ от 0,01 до 0,20, при этом принято $S_0/mp = 1$.

Более сложную задачу представляет определение $z_{\text{макс}}$ при действии кратковременных (немгновенных) периодических импульсов. Ограничимся рассмотрением импульсного резонанса в наиболее важных для практики случаях, когда максимум перемещения от действия одиночного кратковременного импульса наступает после момента его приложения — спустя время $t_1 > \tau$ (рис. 5.6, *а*, *б*), так как при $t_1 < \tau$ импульсный резонанс либо слабо выражен, либо практически отсутствует.

Поставленную задачу можно свести с помощью простого приема к рассмотренной выше задаче об импульсном резонансе при действии мгновенных периодических импульсов. Действительно, при кратковременных импульсах резонанс наблюдается только для целых значений отношения $\theta = T_0/T_1$ (рис. 5.6); максимумы перемещений, вызванных отдельными импульсами, достигаются в интервалах времени, в которых силы не действуют (рис. 5.6, *б* — *д*), и поэтому складываются арифметически. Результирующее движение системы в этих интервалах (рис. 5.6, *е*) представляет собой сумму свободных затухающих колебаний, вызванных действием отдельных импульсов, и его можно воспроизвести, прикладывая мгновенные периодические импульсы эквивалентной величины S_0 в моменты времени, сдвинутые на один и тот же промежуток t_0 от моментов приложения кратковременных импульсов (рис. 5.6, *ж*). Задача свелась, таким образом, к определению величин S_0 и t_0.

Пусть z_0 и v_0 — соответственно перемещение и скорость системы в момент $t = \tau$ исчезновения однократно приложенной в момент $t = 0$ кратковременной силы; начиная с момента $t = \tau$, система совершает свободные затухающие колебания при начальных условиях $z(\tau) = z_0$, $\dot{z}(\tau) = v_0$, описываемые уравнением

$$z(t) = a_0 e^{-\frac{\gamma}{2} p (t - \tau)} \sin [p(t - \tau) + \nu], \qquad (5.38)$$

где

$$a_0 = \sqrt{z_0^2 + \left(\frac{v_0}{p} + \frac{\gamma z_0}{2}\right)^2}; \qquad \nu = \operatorname{arc\,tg} \frac{z_0}{\frac{v_0}{p} + \frac{\gamma z_0}{2}}. \qquad (5.39)$$

Это же движение можно получить при действии на систему в некоторый момент t_0 мгновенного импульса эквивалентной величины S_0 (рис. 5.6, *ж*); оно описывается выражением

$$z(t) = \frac{S_0}{mp} e^{-\frac{\gamma}{2} p(t-t_0)} \sin p(t - t_0). \qquad (5.40)$$

Из сравнения (5.38) и (5.40) получаем:

$$S_0 = mpa_0 e^{\frac{\gamma}{2}\nu}; \; t_0 = \tau - \frac{\nu}{p}. \qquad (5.41)$$

Наибольшее перемещение системы теперь можно снова определять по формулам (5.33) или (5.37), для чего надо найти величину эквивалентного мгновенного импульса S_0. Формула (5.41) для этой цели, однако, неудобна, так как требует предварительного вычисления значений z_0 и v_0. Пренебрегая незначительным влиянием внутреннего трения, удобнее применять ранее полученные формулы:

$$S_0 = \varepsilon(\tau^*) S; \; S = P_0 \int_0^{\tau} f(t)\, dt. \qquad (5.42)$$

Значения S (при $P_0 = 1$) и ε даны в табл. 5.5—5.7.

Действие ударов

Если масса ударяющего тела мала в сравнении с массой конструкции, воспринимающей удар, расчет конструкции как системы с одной степенью свободы производится на удары так же, как и на однократные или периодические импульсы. Если же масса ударяющего тела m сравнима с массой конструкции m_0 или больше ее, пренебрегать массой m уже нельзя, а удар следует считать однократным. При этом перемещение системы будет зависеть также и от направления удара по отношению к вертикали. Удар считается прямым и центральным (скорость ударяющего тела направлена в центр масс конструкции нормально к ее поверхности) и по направлению совпадающим с перемещением конструкции. При косом ударе учитывается только нормальная составляющая ударного импульса. Наибольшее перемещение $\bar{z}_0$, изгибающий момент $\bar{M}_0$ и поперечную силу $\bar{Q}_0$ в данном сечении можно определять в этом случае по приближенным формулам:

$$\bar{z}_0 = k_д z_c; \; \bar{M}_0 = k_д M_c; \; \bar{Q}_0 = k_д Q_c, \qquad (5.43)$$

где z_c, M_c, Q_c — перемещение и внутренние усилия в том же сечении при статическом действии силы mg, приложенной к конструкции в точке удара по направлению удара; $k_д$ — динамический коэффициент, определяемый выражением

$$k_д = \left(\cos\varphi_0 + \sqrt{\cos^2\varphi_0 + \xi^2}\right) e^{-\frac{\gamma\pi}{4}}; \qquad (5.44)$$

здесь φ_0 — угол между направлением прямого удара и вертикалью;

$$\xi = \frac{ep_1 S}{mg} \qquad (5.45)$$

(ε — коэффициент импульсивности, определяемый из табл. 5.6 или 5.7; S — ударный импульс, определяемый по формуле (5.3) при $k_0=0$; $p_1=\sqrt{c/m+m_0}$ круговая частота собственных колебаний конструкции с присоединенной массой ударяющего тела).

Если колебания конструкции проверяются по формуле (5.5), в формуле (5.43) должен приниматься вместо коэффициента $k_д$ коэффициент

$$k'_д = k_д - \cos\varphi_0\, e^{-\frac{\gamma\pi}{4}}.$$

5.3. Системы с несколькими степенями свободы

Действие однократных мгновенных импульсов.

Рассматривается система с N сосредоточенными массами m_k ($k=1, 2, ..., N$), каждая из которых может совершать колебания только в одном направлении, так что число степеней свободы системы равно также N. К массам в направлениях их перемещений приложены одновременно в момент времени $t=0$ сосредоточенные мгновенные импульсы S_k^0 ($k=1, 2, ..., N$), считающиеся положительными, если они направлены в сторону положительных перемещений. Импульс считается мгновенным, если продолжительность его действия не превышает 10% периода T_N наивысшей учитываемой гармоники системы. Так как движение масс системы представляет собой наложение свободных затухающих колебаний по всем гармоникам, необходимо учитывать внутреннее трение в системе при описании ее движения. В комплексной форме это движение описывается системой N уравнений

$$\sum_{r=1}^{N} m_r \delta_{kr} \ddot{\overset{*}{z}}_r + (a+ib)\overset{*}{z}_k = 0, \quad (k=1,2,\ldots,N). \tag{5.46}$$

Действие мгновенных импульсов на систему, неподвижную в момент их приложения, учитывается начальными условиями:

$$z_k(0)=0; \; m_k \dot{z}_k(0) = S_k^0, \quad (k=1,2,\ldots,N). \tag{5.47}$$

Здесь $\overset{*}{z}_k$ и z_k — соответственно комплексное и вещественное перемещения массы m_k, причем точкой обозначена производная по времени; δ_{kr} — перемещение массы m_k в направлении ее колебаний от статического действия единичной силы на массу m_r также в направлении ее колебаний, причем $\delta_{kr} = \delta_{rk}$; a и b определяются по формулам (5.21); i — мнимая единица.

Решения $\overset{*}{z}_k$ этой системы после удовлетворения условиям устойчивости движения

$$\lim_{t\to\infty} \left|\overset{*}{z}_k\right| = 0, \quad (k=1,2,\ldots,N) \tag{5.48}$$

имеют вид:

$$\overset{*}{z}_k = \sum_{i=1}^{N} z_{ik}\, e^{-\frac{\gamma}{2} p_i t}\, e^{i(p_i t+\nu_i)}, \quad (k=1,2,\ldots,N), \tag{5.49}$$

а соответствующие вещественные решения $\mathrm{Re}\,\overset{*}{z}_k$ будут:

$$z_k = \sum_{i=1}^{N} z_{ik}\, e^{-\frac{\gamma}{2} p_i t} \cos(p_i t + \nu_i), \quad (k=1,2,\ldots,N), \tag{5.50}$$

где p_i — круговая i-я частота затухающих свободных колебаиий:

$$p_i = \frac{p_i^0}{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}}}; \; p_i^0 = \frac{1}{\sqrt{\zeta_i}}, \tag{5.51}$$

p_i^0 — круговая частота незатухающих свободных колебаиий, а ζ_i — корень характеристического уравнеиия, соответствующего системе уравнений (5.46) при зиачеииях $a=1$, $b=0$:

$$| m_r \delta_{ir} - \zeta \dot{\varkappa}_{ir} | = 0, \; (i, r = 1, 2, \ldots, N). \tag{5.52}$$

Уравнение (5.52) записано в сокращенной форме (выписан общий элемеит определителя); $\varkappa_{ir}$ — символ Кроиекера ($\varkappa_{ir}=1$ прн $i=1$ и $\varkappa_{ir}=0$ при $i \neq r$). Для определения постоянных z_{ik} н ν_i, число которых равно N^2 н N соответственно, служат N^2—N независимых уравнений вида:

$$\sum_{r=1}^{N} m_r \delta_{ir} z_{rk} = \zeta_k z_{ik}, \; (i, \; k = 1, 2, \ldots, N), \tag{5.53}$$

получаемых из системы (5.46) после подстаиовкн в иее частиого решеиня z_{ik}^{*} из (5.49), и $2N$ уравнеиий вида:

$$\left.\begin{aligned} &\cos \nu_k = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, N); \\ &\sum_{k=1}^{N} z_{ik} p_k = -\frac{S_i^0}{m_i}, \; (i = 1, 2, \ldots, N), \end{aligned}\right\} \tag{5.54}$$

полученных в результате удовлетворения начальным условиям (5.47). Для удобства решения этих уравиений принимается:

$$z_{ik} = c_k \varphi_{ik}, \tag{5.55}$$

где φ_{ik} — главиые координаты (определяющне формы собствениых колебаний), удовлетворяющие условию ортогональности.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \varphi_{ir} \varphi_{ik} = 0, \; (r \neq k), \tag{5.56}$$

а также условиям иормировкн (при $r=k$)

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \varphi_{ik}^2 = 1, \quad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{5.57}$$

Теперь решение (5.50) полностью определено:

$$z_k = \sum_{i=1}^{N} z_{ik} e^{-\frac{\gamma}{2} p_i t} \sin p_i t, \quad (k = 1, 2, \ldots, N), \tag{5.58}$$

где z_{ik} — начальная амплитуда перемещения точки k, соответствующая i-й гармонике, определяемая выражением

$$z_{ik} = \frac{\varphi_{ik}}{p_i} \sum_{r=1}^{N} S_r^0 \varphi_{ir}, \tag{5.59}$$

причем координаты φ_{ik} определяются из системы N^2 уравнений

$$\left.\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N} m_r\,\delta_{lr}\,\varphi_{kr} = \zeta_k\,\varphi_{ik}, \quad (k=1,2,\ldots,N;\ i=1,2,\ldots,N-1);\\ \sum_{k=1}^{N} m_k\,\varphi_{ik}^2 = 1, \quad (i=1,2,\ldots,N).\end{aligned}\right\} \qquad (5.60)$$

Изгибающий момент и поперечная сила в точке k представляются формулами, аналогичными (5.58):

$$\left.\begin{aligned}M_k = \sum_{i=1}^{N} M_{ik}\, e^{-\frac{\gamma}{2}p_i t}\sin p_i t;\\ Q_k = \sum_{i=1}^{N} Q_{ik}\, e^{-\frac{\gamma}{2}p_i t}\sin p_i t,\end{aligned}\right\} \qquad (5.61)$$

где M_{ik} и Q_{ik} — изгибающий момент и поперечная сила в точке k, соответствующие i-й гармонике, определяемые по известным перемещениям z_{ik} во всех точках системы ($k=1, 2, \ldots, N$), которые вычисляются по формуле (5.59) и принимаются со своими знаками.

Приближенный способ определения наибольших перемещений и внутренних усилий при действии однократных импульсов

Практический интерес представляют наибольшие во времени значения z_0, M_0, Q_0, однако обычный метод отыскания экстремума сумм (5.58) и (5.61) здесь неприменим, даже если преодолеть связанные с ним серьезные технические затруднения. Он исходит из предположения, что входящие в решения (5.58) и (5.61) расчетные значения частот собственных колебаний системы в точности совпадают с их фактическими значениями. В действительности же первые неизбежно отклоняются от вторых из-за неточности исходных данных и условности расчетных схем. Учет этих отклонений приводит к смещению в значительных пределах фаз высоких гармоник относительно основной гармоники, которое существенно отражается на величине максимумов z_0 и в особенности M_0 и Q_0. Сдвиги фаз гармоник есть случайные величины и поэтому определение максимумов z, M и Q представляет вероятностную задачу. Ее можно упростить, определяя верхний предел вероятных значений z_0, M_0, Q_0, соответствующий невыгоднейшему сочетанию фаз гармоник. Здесь дается наиболее простой способ оценки верхнего значения максимума суммы затухающих гармоник, вызванных мгновенными импульсами:

$$A = \sum_{i=1}^{N} A_i\, e^{-\frac{\gamma}{2}p_i t}\sin p_i t. \qquad (5.62)$$

Если для гармоники номера q справедливо неравенство

$$|A_q| > |A_i|, \quad (i \neq q), \qquad (5.63)$$

то максимум $|A_0|$ суммы (5.62) определяется по формуле

$$|A_0| = \sum_{i=1}^{q-1} |A_i| \sin\frac{\pi p_i}{2 p_q} + \sum_{i=q}^{N} |A_i|\, e^{-\frac{\gamma\pi}{4}\cdot\frac{p_i}{p_q}} \qquad (5.64)$$

для момента времени $t=T_q/4$, причем первая сумма представляет собой сумму ординат гармоник в момент t_0, а вторая — сумму ординат огибающих этих гармоник в тот же момент. Если одновременно несколько гармоник имеют наибольшие одинаковые начальные амплитуды, то A_0 опреде-

ляют для нескольких соответствующих значений q и из полученных значений выбирают наибольшее. Знак A_0 принимается совпадающим со знаком A_q.

Если $q=1$, что всегда выполняется для перемещений и часто для изгибающих моментов, то формула (5.64) принимает вид:

$$|A_0| = \sum_{i=1}^{N} |A_i| e^{-\frac{\gamma\pi}{4} \cdot \frac{p_i}{p_1}}. \tag{5.65}$$

На рис. 5.7 дана графическая интерпретация формул (5.62) и (5.65) при $\gamma=0{,}1$. Из абсолютных максимумов $A_{\text{макс}}$ и A_0 первый определен путем графического сложения гармоник, а второй — с учетом вероятных сдвигов

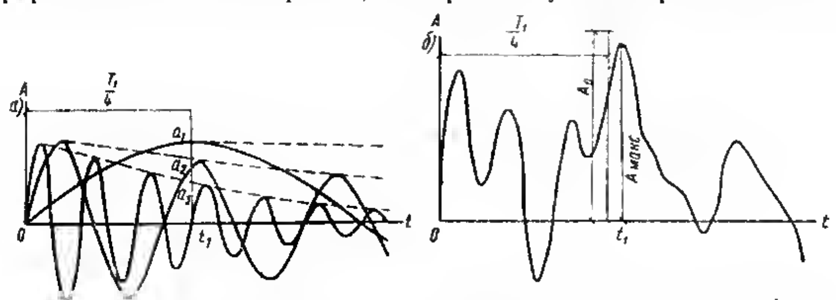


Рис. 5.7. Графическая интерпретация приближенного способа оценки с избытком максимума изгибающего момента

а — затухающие гармоники; *б* — сумма затухающих гармоник и верхний вероятный предел $A_0=a_1+a_2+a_3$ возможного максимума

фаз по формуле (5.65) или, что то же самое, путем сложения ординат огибающих a_1, a_2, a_3. Применяя к перемещениям (5.58) и внутренним усилиям (5.61) формулу (5.65), получим:

$$\left.\begin{aligned} |z_{0k}| &= \sum_{i=1}^{N} |z_{ik}| e^{-\frac{\gamma\pi}{4} \cdot \frac{p_i}{p_1}}; \\ |M_{0k}| &= \sum_{i=1}^{N} |M_{ik}| e^{-\frac{\gamma\pi}{4} \cdot \frac{p_i}{p_1}}; \\ |Q_{0k}| &= \sum_{i=1}^{N} |Q_{ik}| e^{-\frac{\gamma\pi}{4} \cdot \frac{p_i}{p_1}} \end{aligned}\right\} \tag{5.66}$$

Если $\tau > 0{,}1\, T_N$, то следует учитывать влияние продолжительности и формы импульса. Ряды для z, M и Q будут сложнее, в частности, начальные фазы гармоник уже не будут равны нулю. Однако при описанном выше способе определения максимумов z_0, M_0 и Q_0 знать эти фазы необязательно. Если на систему с N степенями свободы действуют кратковременные импульсы, имеющие величины S_r $(r=1, 2, \ldots, N)$, продолжительности τ_r и разные формы, то их можно заменить эквивалентными мгновенными импульсами S^0_{ri} для каждой i-й гармоники путем умножения на соответствующий коэффициент импульсивности ε_{ri}, так что $S^0_{ri}=\varepsilon_{ri} S_r$. Тогда вместо (5.59) будет:

$$z_{ik} = \frac{\varphi_{ik}}{p_i} \sum_{r=1}^{N} \varepsilon_{ri} S_r \varphi_{ri}. \tag{5.67}$$

Значения ε_{ri} определяют в зависимости от отношения τ_r/T_i, где T_i — период i-й гармоники, и от формы импульса $f(t)$ по табл. 5.6 и 5.7, полагая

$\tau_r = \tau$ и $T_i = T_1$. В соответствии с рис. 5.6 эквивалентные мгновенные импульсы прикладываются не в момент $t_0 = 0$, а в моменты t_{0i}, соответствующие каждой гармонике. Но, поскольку при определении максимумов z_0, M_0 и Q_0 фазы гармоник должны сдвигаться с целью получения их невыгоднейшего сочетания, следует принять $t_{0i} = 0$. В таком случае решения для z, M и Q будут иметь вид (5.58) и (5.61) с той разницей, что z_{ik} должны определяться по формуле (5.67). Поэтому все сказанное об определении максимумов z_0, M_0 и Q_0 в случае мгновенных импульсов применимо и в этом общем случае.

Действие периодических импульсов

Решение задачи о действии периодических кратковременных импульсов на систему с несколькими степенями свободы при учете внутреннего трения настолько сложно, что его практическое использование не представляется возможным. Ввиду этого здесь дается приближенная (с избытком) оценка величин наибольших во времени перемещений системы z_{0k} при обычном для практики условии $T_0 > T_2$ (T_2 — период второго тона системы).

Предполагается, что на систему с N степенями свободы действуют в направлении перемещений $\tilde{z}_k$ одновременно и синфазно кратковременные сосредоточенные периодические импульсы S_k, приложенные соответственно к сосредоточенным массам m_k системы и имеющие одинаковую продолжительность τ, форму $f(t)$ и период T_0. Наибольшее во времени перемещение k-й массы системы можно оценивать по приближенной формуле

$$\tilde{z}_{0k} = z_{0k}\Psi, \tag{5.68}$$

где z_{0k} соответствует однократному приложению импульсов S_k и определяется по первой из формул (5.66), в которой z_{ik} представляется выражением (5.67). Коэффициент Ψ вычисляется в зависимости от числа повторений n периодических импульсов, отношения T_0/T_1 и коэффициента неупругого сопротивления γ. Если n невелико (неустановившиеся колебания системы), коэффициент Ψ равен:

$$\Psi = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \tag{5.69}$$

где A_n и B_n определяются по формулам (5.30). При большом n (установившиеся колебания системы)

$$\Psi = \frac{e^{b'/2}}{\sqrt{2(\operatorname{ch} b' - \cos a')}}. \tag{5.70}$$

Формулы (5.68)—(5.70) тем точнее, чем больше коэффициент γ и чем ближе отношение T_0/T_1 к целому числу.

Действие ударов

Предполагается, что на массу m_ν действует прямой центральный удар тела (в маловероятном случае, когда удары действуют на все массы системы одновременно, можно применять принцип наложения). Если масса ударяющего тела m мала в сравнении с массой системы $m_0 = \sum_{k=1}^{N} m_k$, расчет на однократный удар можно производить по формулам (5.62)—(5.66), а на периодические удары — по формулам (5.68)—(5.70), вычисляя величину ударного импульса $S_\nu = S$ по формуле (5.3) и принимая $S_k = 0$ при $k \neq \nu$. Если же масса m сравнима с массой m_0 или больше ее (в этом случае периодические удары мало вероятны), перемещение k-й массы системы при однократном ударе можно оценить по формуле

$$\tilde{z}_{0k} = k_д z_{ck}, \tag{5.71}$$

где z_{ck} — перемещение k-й массы системы при статическом действии силы

mg, приложенной к массе m_v в направлении удара; $k_д$ — динамический коэффициент, определяемый по формуле (5.44), в которой

$$\xi = \frac{m + \varkappa_1 m_0}{m + \varkappa_2 m_0} \cdot \frac{\varepsilon p_1 S}{mg} . \quad (5.72)$$

Здесь ε берется из табл. 5.6 и 5.7, а p_1 вычисляется с учетом массы ударяющего тела: $p_1 = 1/\sqrt{\delta_{00}(m + \varkappa_1 m_0)}$. В формуле (5.72) $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — коэффициенты приведения масс системы в точку удара соответственно по кинетической энергии и по количеству движения определяемые выражениями:

$$\varkappa_1 = \frac{1}{m_0 \delta_{00}^2} \sum_{k=1}^{N} m_k \delta_{k0}^2; \quad \varkappa_2 = \frac{1}{m_0 |\delta_{00}|} \sum_{k=1}^{N} m_k |\delta_{k0}|, \quad (5.73)$$

где δ_{k0} — перемещение массы m_k под действием единичной силы, приложенной в точке удара O по направлению удара. Все эти формулы тем точнее, чем больше масса m в сравнении с массой m_0. В случае $m \gg m_0$ формула (5.72) переходит в (5.45).

5.4. Балки и плиты

Действие однократных импульсов на однопролетные балки

Рассматриваются балки с постоянными по длине жесткостью на изгиб EJ и интенсивностью массы μ под действием кратковременного импульса $s(x, t)$. При первом рассмотрении импульс считается мгновенным, распределенным вдоль оси балки по некоторому закону $s_0(x)$. Уравнение колебаний балки при $t \geqslant 0$ имеет вид (обозначения прежние):

$$\mu \frac{\partial^2 z^*}{\partial t^2} + (a + ib) EJ \frac{\partial^4 z^*}{\partial x^4} = 0, \quad (5.74)$$

где x — абсцисса точек оси балки. Комплексное перемещение $z^*(x, t)$ должно удовлетворять условию устойчивости колебаний:

$$\lim_{t \to \infty} |z^*| = 0, \quad (5.75)$$

а действительное перемещение $z(x, t)$ — начальным условиям:

$$z(x, 0) = 0; \quad \mu \dot{z}(x, 0) = s_0(x). \quad (5.76)$$

Общее решение уравнения (5.74) при условии (5.75) имеет вид:

$$z^* = \sum_{i=1}^{\infty} c_i' X_i(x) e^{-\frac{\gamma}{2} p_i t} e^{i(p_i t + \nu_i)}, \quad (5.77)$$

где p_i — i-я круговая частота свободных затухающих колебаний балки:

$$p_i = \frac{\lambda_i^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}} \sqrt{\frac{EJ}{\mu l^4}}, \quad (5.78)$$

c_i' и ν_i — определяются из условий (5.76), а $X_i(x)$ — балочная функция, соответствующая i-й форме свободных колебаний:

$$X_i(x) = A_i\left(\sin\lambda_i\frac{x}{l} + B_i\,\mathrm{sh}\,\lambda_i\frac{x}{l} + C_i\cos\lambda_i\frac{x}{l} + D_i\,\mathrm{ch}\,\lambda_i\frac{x}{l}\right), \quad (5.79)$$

удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$X_i^{\mathrm{IV}} - \frac{\lambda_i^4}{l^4}X_i = 0, \quad (5.80)$$

в котором l — пролет балки; λ_i — корни соответствующего (5.80) характеристического уравнения. Постоянные B_i, C_i, D_i определяются из условий закрепления концов балки, постоянную A_i целесообразно определять из условия нормирования балочной функции

$$\frac{1}{l}\int_0^l X_i^2\,dx = 1. \quad (5.81)$$

Вещественное решение, соответствующее (5.77), имеет вид:

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i' X_i(x)\, e^{-\frac{\gamma}{2}p_i t}\cos(p_i t + \nu_i). \quad (5.82)$$

Подставив (5.82) в (5.76), получим уравнения для определения c_i' и ν первое из которых дает $\cos\nu_i = 0$, или

$$\nu_i = \frac{2i-1}{2}\pi, \quad (5.83)$$

а второе с учетом (5.83) имеет вид:

$$(-1)^i\mu\sum_{i=1}^{\infty} c_i' p_i X_i(x) = s_0(x).$$

Умножив обе части его на $X_j(x)\,dx$, проинтегрировав в пределах от 0 до l и воспользовавшись свойством ортогональности

$$\int_0^l X_i X_j\,dx = 0, \quad i \neq j \quad (5.84)$$

и условием (5.81), получим:

$$c_i' = (-1)^i c_i, \quad (5.85)$$

где через c_i обозначено выражение

$$c_i = \frac{1}{\mu l p_i}\int_0^l s_0(x) X_i(x)\,dx. \quad (5.86)$$

Подставив (5.85) и (5.83) в (5.82), получим окончательно:

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i X_i(x)\, e^{-\frac{\gamma}{2}p_i t}\sin p_i t. \quad (5.87)$$

Изгибающие моменты M и поперечные силы Q определяются рядами:

$$
\left.
\begin{aligned}
M(x,t) &= -EJ\sum_{i=1}^{\infty} c_i X_i''(x)\, e^{-\frac{\gamma}{2}p_i t}\sin p_i t;\\
Q(x,t) &= -EJ\sum_{i=1}^{\infty} c_i X_i'''(x)\, e^{-\frac{\gamma}{2}p_i t}\sin p_i t.
\end{aligned}
\right\} \quad (5.88)
$$

В [1] даны таблицы нормированных балочных функций $X_i(x)$ и их производных X_i', X_i'' и X_i''' по x для значений i от 1 до 5 при различных случаях закрепления концов балки.

Практический интерес представляют наибольшие во времени значения z_0, M_0 и Q_0; сказанное ранее по поводу их определения справедливо и здесь. Действительно, формулы (5.87) и (5.88) имеют вид формулы (5.62), в которой A_i принимает теперь значение $A_i(z_0) = c_i X_i$ для z_0, $A_i(M_0) = -EJc_iX_i''$ для M_0 и $A_i(Q_0) = -EJc_iX_i'''$ для Q_0. Если $|A_1| > |A_i|\,(i>1)$, то для z_0, M_0 и Q_0 справедливы формулы:

$$
\left.
\begin{aligned}
|z_0| &= \sum_{i=1}^{\infty} |c_i X_i(x)|\, e^{-\frac{\gamma\pi}{4}\cdot\frac{p_i}{p_1}};\\
|M_0| &= EJ\sum_{i=1}^{\infty} |c_i X_i''(x)|\, e^{-\frac{\gamma\pi}{4}\cdot\frac{p_i}{p_1}};\\
|Q_0| &= EJ\sum_{i=1}^{\infty} |c_i X_i'''(x)|\, e^{-\frac{\gamma\pi}{4}\cdot\frac{p_i}{p_1}},
\end{aligned}
\right\} \quad (5.89)
$$

причем знаки z_0, M_0 и Q_0 принимаются совпадающими со знаками $A_1(z_0)$, $A_1(M_0)$ и $A_1(Q_0)$ соответственно. Условие $A_1 > A_i$ $(i>1)$ для z справедливо всегда. В случае, если для M и Q это условие не выполняется, должна применяться формула (5.64).

Сказанное относится к случаю мгновенного импульса. В случае же кратковременного импульса формулы (5.89) применимы при следующем выражении для c_i:

$$
c_i = \frac{\varepsilon_i}{\mu l p_i}\int_0^l s(x)\, X_i(x)\, dx, \quad (5.90)
$$

где $\varepsilon_i = \varepsilon_i\left(\frac{\tau}{T_i}\right)$ — коэффициент импульсивности для i-го тона колебаний, принимаемый по табл. 5.6 и 5.7 в зависимости от отношения τ/T_i и от формы кратковременного импульса, распределенного по балке по закону $s(x)$. Произведение $\varepsilon_i s(x)$ представляет собой интенсивность мгновенного импульса, эквивалентного кратковременному импульсу по величине вызываемой им начальной амплитуды i-й гармоники. Для кратковременного импульса постоянной интенсивности s по всему пролету балки формула (5.90) примет вид:

$$
c_i = \frac{\varepsilon_i s}{\mu l p_i}\int_0^l X_i(x)\, dx, \quad (5.91)
$$

а для сосредоточенного импульса S, приложенного в точке x_0,

$$c_i = \frac{\varepsilon_i S}{\mu l p_i} X_i(x_0). \qquad (5.92)$$

Ряды (5.89) — сходящиеся. Ряд для z_0 сходится довольно быстро. Ряды для M_0 и Q_0 сходятся медленнее, но тем быстрее, чем больше τ и γ и чем ближе закон распределения импульса по балке к основной форме собственных колебаний. В случае одновременного действия на балку нескольких импульсов одинаковой продолжительности, приложенных в разных местах балки, для получения z_0, M_0 и Q_0 можно применять принцип наложения. Эти же формулы можно применять и к балкам с присоединенными сосредоточенными массами, если эти массы предварительно привести приближенными способами к равномерно распределенной для каждого тона колебаний балки [1].

Действие однократных импульсов на неразрезные равнопролетные балки

Рассматриваются неразрезные многопролетные балки на жестких опорах с равными пролетами l и постоянными по длине жесткостью EJ и погонной массой μ под действием в одном из пролетов кратковременного импульса, распределенного по некоторому закону $s(x)$. Вводятся следующие обозначения: x — абсцисса точки оси балки в данном пролете, отсчитываемая от левого конца пролета; N_0 — число пролетов балки; $r = 1, 2, \ldots, N_0$ — номера пролетов; j — номер пролета, в котором действует импульс; $\overset{\bullet}{z}_r$ и z_r — комплексное и вещественное перемещения балки в r-м пролете; остальные обозначения прежние.

Уравнения колебаний балки в случае действия мгновенного импульса $s_0(x)$ с учетом внутреннего трения имеют вид:

$$\mu \frac{\partial^2 \overset{\bullet}{z}_r}{\partial t^2} + (a + ib) EJ \frac{\partial^4 \overset{\bullet}{z}_r}{\partial x^4} = 0, \quad (r = 1, 2, \ldots N_0), \qquad (5.93)$$

причем $\overset{\bullet}{z}_r$ должны удовлетворять условиям устойчивости движения $\lim\limits_{t \to \infty} |\overset{\bullet}{z}_r| = 0$, а z_r — начальным условиям:

$$z_r(x, 0) = 0; \quad \dot{z}_r(x, 0) = 0, \quad r \neq j; \quad \mu \dot{z}_r(x, 0) = s_0'(x), \quad r = j. \qquad (5.94)$$

Вследствие аналогии уравнений (5.93) и (5.74) аналогичны и методы их интегрирования. Ниже даются окончательные результаты. Максимальные значения перемещений и внутренних усилий в r-м пролете балки определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} |z_{0r}| &= \sum_{i=1}^{\infty} |c_i X_{ir}(x)|\, e^{-\frac{\gamma\pi}{4} \cdot \frac{p_i}{p_1}}; \\ |M_{0r}| &= EJ \sum_{i=1}^{\infty} |c_i X''_{ir}(x)|\, e^{-\frac{\gamma\pi}{4} \cdot \frac{p_i}{p_1}}; \\ |Q_{0r}| &= EJ \sum_{i=1}^{\infty} |c_i X'''_{ir}(x)|\, e^{-\frac{\gamma\pi}{4} \cdot \frac{p_i}{p_1}}, \end{aligned}\right\} \qquad (5.95)$$

причем все оговорки, сделанные по поводу формул (5.89), остаются справедливыми и для формул (5.95). Балочная функция $X_{ir}(x)$ в пролете номер r балки для i-го тона колебаний имеет вид:

$$X_{ir}(x) = A_{ir}\left(\sin\lambda_i \frac{x}{l} + B_{ir}\,\mathrm{sh}\,\lambda_i \frac{x}{l} + C_{ir}\cos\lambda_i \frac{x}{l} + D_{ir}\,\mathrm{ch}\,\lambda_i \frac{x}{l}\right). \quad (5.96)$$

Постоянные A_{ir} $(r>1)$ и B_{ir}, C_{ir}, D_{ir} определяются из граничных условий и условий сопряжения на промежуточных опорах; постоянная A_{i1} для каждого i-го тона колебаний определяется из условия нормировки:

$$\frac{1}{N_0 l}\sum_{r=1}^{N_0}\int_0^l X_{ir}^2(x)\,dx = 1. \quad (5.97)$$

Таблицы балочных функций для равнопролетных балок с числом пролетов от 2 до 5 для N_0+1 тонов собственных колебаний даны в [1]. Параметр c_i определяется по формуле

$$c_i = \frac{\varepsilon_i}{\mu l p_i}\int_0^l s(x)\,X_{il}(x)\,dx, \quad (5.98)$$

где ε_i определяется, как указано выше. Из (5.98) в частных случаях получаются формулы, аналогичные (5.91) и (5.92). Все сказанное относительно сходимости рядов (5.89) сохраняет силу и в применении к рядам (5.95).

Действие однократных импульсов на прямоугольные плиты

Рассматривается прямоугольная плита с постоянными в пролете толщиной h и массой на единицу площади μ под действием кратковременного импульса, распределенного по плите по некоторому закону $s(x, y)$, где x и y — координаты срединной плоскости плиты, отсчитываемые от одного из углов плиты. Уравнение колебаний плиты с учетом внутреннего трения в случае действия мгновенного импульса имеет вид:

$$\mu\frac{\partial^2 z^*}{\partial t^2} + D(a + ib)\,\Delta\Delta z^* = 0, \quad (5.99)$$

где $D = Eh^3/12\,(1-\sigma^2)$ — цилиндрическая жесткость плиты (σ — коэффициент Пуассона); Δ — дифференциальный оператор:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Остальные обозначения прежние. Перемещение z^* должно удовлетворять условию (5.75), а его вещественная часть z — начальным условиям:

$$z(x, y, 0) = 0; \quad \mu\dot{z}(x, y, 0) = s_0(x, y). \quad (5.100)$$

Метод интегрирования уравнения (5.99) аналогичен изложенному выше. В окончательном виде решение уравнения (5.99) может быть записано по аналогии с (5.87) так:

$$z(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i F_i(x, y)\, e^{-\frac{\gamma}{2} p_i t}\sin p_i t. \quad (5.101)$$

Здесь $F_i(x, y)$ — i-я форма собственных колебаний плиты. Приближенно ее можно представить произведением двух нормированных балочных функций, удовлетворяющим условиям закрепления краев плиты:

$$F_i(x, y) = X_r(x)\,Y_j(y). \quad (5.102)$$

Здесь r, j — индексы балочных функций $X_r(x)$ и $Y_j(y)$, отвечающих стержням-полоскам, вырезанным из плиты вдоль осей x и y и имеющим те же условия на опорах, что и соответствующие стороны плиты [1]. Соответствие между номером i частоты колебаний плиты и индексами r и j устанавливается табл. 5.8.

Таблица 5.8

Соответствие между номером i частоты собственных колебаний плиты и индексами r и j балочных функций

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
r	1	1	2	2	1	3	2	3	3	1	4	2	4	3	4	4
j	1	2	1	2	3	1	3	2	3	4	1	4	2	4	3	4

Балочные функции $X_r(x)$ и $Y_j(y)$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} X_r(x) &= A_r\left(\sin\lambda_r\frac{x}{l} + B_r\,\mathrm{sh}\,\lambda_r\frac{x}{l} + C_r\cos\lambda_r\frac{x}{l} + D_r\,\mathrm{ch}\,\lambda_r\frac{x}{l}\right); \\ Y_j(y) &= A_j\left(\sin\lambda_j\frac{y}{b} + B_j\,\mathrm{sh}\,\lambda_j\frac{y}{b} + C_j\cos\lambda_j\frac{y}{b} + D_j\,\mathrm{ch}\,\lambda_j\frac{y}{b}\right), \end{aligned}\right\} \quad (5.103)$$

где l и b — размеры плиты вдоль осей x и y соответственно; параметры λ_r и λ_j и постоянные B, C и D с соответствующими индексами определяются так же, как и выше. Постоянные A_r и A_j определяются из условий нормировки:

$$\frac{1}{l}\int_0^l X_r^2\,dx = 1; \quad \frac{1}{b}\int_0^b Y_j^2\,dy = 1. \quad (5.104)$$

Круговые частоты собственных колебаний плиты

$$p_i = \frac{\lambda_i^2}{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}}}\sqrt{\frac{D}{\mu l^4}}. \quad (5.105)$$

Здесь λ_i^2 вычисляется по приближенной формуле (которая для опертой по контуру плиты является точной):

$$\lambda_i^2 = \sqrt{\lambda_r^4 + \lambda_{rj}^2\eta^2 + \lambda_j^4\eta^4}; \quad \eta = \frac{l}{b}.$$

Величины λ_i^4 для плит с шестью различными условиями закрепления на контуре и значений i от 1 до 25 даны в [1]. Параметр c_i, входящий в формулу

[1] Для опертой по контуру плиты такое представление будет точным.

(5.101), определяется в общем случае (при действии не мгновенного импульса) выражением

$$c_i = \frac{\varepsilon_i}{\mu l b p_i} \int_0^l \int_0^b s(x, y) X_r(x) Y_j(y)\, dx dy, \tag{5.106}$$

где ε_i — коэффициент импульсивности, определяемый из табл. 5.6 и 5.7 (в случае мгновенного импульса $\varepsilon_i = 1$). Для импульса, равномерно распределенного по площади плиты ($s = \text{const}$),

$$c_i = \frac{\varepsilon_i s}{\mu l b p_i} \int_0^l X_r(x)\, dx \int_0^b Y_j(y)\, dy, \tag{5.107}$$

а для сосредоточенного импульса S в точке (x_0, y_0) плиты

$$c_i = \frac{\varepsilon_i S}{\mu l b p_i} X_r(x_0) Y_j(y_0). \tag{5.108}$$

Для определения максимума во времени перемещения z_0 изгибающих моментов M_{0x} и M_{0y} и поперечных сил Q_{0x} и Q_{0y} в точке (x, y) плиты можно пользоваться формулами (5.64) или (5.65), в зависимости от оговоренных там условий. Так, например, при $q = 1$ эти максимумы можно определять по формуле

$$|A_0| = \sum_{i=1}^{\infty} |A_i| e^{-\frac{\gamma\pi}{4} \cdot \frac{p_i}{p_1}}, \tag{5.109}$$

причем выражение A_i зависит от определяемой величины:

$$\left.\begin{aligned}
A_i(z_0) &= c_i X_r Y_j;\\
A_i(M_{0x}) &= -Dc_i\left(X_r'' Y_j + \sigma X_r Y_j''\right);\\
A_i(M_{0y}) &= -Dc_i\left(X_r Y_j'' + \sigma X_r'' Y_j\right);\\
A_i(Q_{0x}) &= -Dc_i\left(X_r''' Y_j + X_r' Y_j''\right);\\
A_i(Q_{0y}) &= -Dc_i\left(X_r Y_j''' + X_r'' Y_j'\right).
\end{aligned}\right\} \tag{5.110}$$

Штрихом обозначена операция дифференцирования функций X_r или Y_j соответственно по переменной x или y. Подробные таблицы балочных функций и их производных приведены в [1].

Действие периодических импульсов

Использование точного решения задачи о действии периодических кратковременных импульсов на балки и плиты при учете внутреннего трения для практических расчетов не представляется возможным вследствие его сложности и громоздкости. Здесь приводится приближенный способ оценки с избытком величин наибольших во времени перемещений $\widetilde{z}_0$, изгибающих моментов $\widetilde{M}_0$ и поперечных сил $\widetilde{Q}_0$. Предполагается, что на балку или плиту действуют кратковременные периодические импульсы, распределенные в пролете балки или плиты по некоторому закону $s(x)$ или $s(x, y)$, имеющие форму $f(t)$, продолжительность τ и период T_0. Приближенный способ оценки максимумов $\widetilde{z}_0$, $\widetilde{M}_0$ и $\widetilde{Q}_0$ исходит из условия, обычно выполняющегося на практике, что $T_0 > > T_2$, где T_2 — период собственных колебаний балки или плиты по второму тону.

Для оценки значений $\widetilde{z}_0$, $\widetilde{M}_0$ и $\widetilde{Q}_0$ в любом сечении балки или плиты можно применять приближенные формулы:

$$\widetilde{z}_0 = z_0 \Psi; \quad \widetilde{M}_0 = M_0 \Psi; \quad \widetilde{Q}_0 = Q_0 \Psi, \tag{5.111}$$

где z_0, M_0 и Q_0 соответствуют однократному приложению импульса и определяются для однопролетных балок по формулам (5.89), для неразрезных равнопролетных балок по формулам (5.95), а для прямоугольных плит по формулам (5.109) и (5.110).

Коэффициент ψ вычисляется для периодических импульсов при небольшом числе повторений n по формуле (5.69), а при большом числе повторений по формуле (5.70). Формулы (5.111) тем точнее, чем ближе закон распределения импульса по балке или плите к первой форме собственных колебаний, чем больше γ и чем ближе отношение T_0/T_1 к целому числу.

Действие ударов

Предполагается, что на балку или плиту действует прямой сосредоточенный удар тела в точке $O(x_0)$ балки или в точке $O(x_0, y_0)$ плиты. Если масса ударяющего тела m мала в сравнении с массой m_0 балки или плиты, их расчет на однократный удар можно производить соответственно по формулам (5.89), (5.95) и (5.109), а на периодические удары — по формулам (5.111), определяя величину ударного импульса по формуле (5.3) и принимая для c_i выражения (5.92) для балок и (5.108) для плит. Если же масса m сравнима с массой m_0 или больше ее (в этом случае периодические удары маловероятны), максимальные во времени перемещения и внутренние усилия в балках или плитах можно определять по приближенным формулам (5.43), (5.44) и (5.72), в которых коэффициенты $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ будут представлены следующими выражениями.

1. Для однопролетных балок с распределенной и сосредоточенными массами:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{\mu l}{m_0}\int\limits_0^l \frac{\delta_{x0}^2}{\delta_{00}^2}\,dx + \sum_{k=1}^{N}\frac{m_k\,\delta_{k0}^2}{m_0\,\delta_{00}^2}; \\ \varkappa_2 &= \frac{\mu l}{m_0}\int\limits_0^l \left|\frac{\delta_{x0}}{\delta_{00}}\right| dx + \sum_{k=1}^{N}\frac{m_k}{m_0}\left|\frac{\delta_{k0}}{\delta_{00}}\right|, \end{aligned}\right\} \tag{5.112}$$

где μl — равномерно распределенная масса; m_k — сосредоточенная масса; $m_0 = \mu l + \sum m_k$ — полная масса; δ_{x0} — перемещение точки x балки от единичной силы, приложенной в точке удара $O(x_0)$ в направлении удара; δ_{00} — перемещение точки удара $O(x_0)$ от той же силы; N — число сосредоточенных масс на балке. Значения интегралов, входящих в формулы (5.112), даны в [1].

2. Для неразрезных балок с распределенной и сосредоточенными массами и числом пролетов N_0:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 &= \sum_{r=1}^{N_0}\frac{\mu_r l_r}{m_0}\int\limits_0^{l_r}\left(\frac{\delta_{x0}^{(r)}}{\delta_{00}}\right)^2 dx_r + \sum_{k=1}^{N}\frac{m_k\,\delta_{k0}^2}{m_0\,\delta_{00}^2}; \\ \varkappa_2 &= \sum_{r=1}^{N_0}\frac{\mu_r l_r}{m_0}\int\limits^{l_r}\left|\frac{\delta_{x0}^{(r)}}{\delta_0 0_0}\right| dx_r + \sum_{k=1}^{N}\frac{m_k}{m_0}\left|\frac{\delta_{k0}}{\delta_{00}}\right|, \end{aligned}\right\} \tag{5.113}$$

где $\mu_r l_r$ — равномерно распределенная масса в пролете номер r; m_k — сосредоточенные массы, число которых равно N; $m_0 = \sum_{r=1}^{N_0} \mu_r l_r + \sum_{k=1}^{N} m_k$ — полная масса балки; x_r — абсцисса точки оси балки в пролете r, отсчитываемая от левого конца пролета длиной l_r; $\delta_{x0}^{(r)}$ — перемещение точки с абсциссой x_r от единичной силы, приложенной в точке удара O в направлении удара. Остальные обозначения прежние. Значения интегралов, входящих в формулы (5.113), для равнопролетных балок с опертыми концами при $\mu_r = \mu$ даны в [1].

3. Для прямоугольных плит с распределенной и сосредоточенными массами:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{\mu l b}{m_0} \int_0^l \int_0^b \frac{\delta_{xy0}^2}{\delta_{00}^2}\, dx dy + \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \delta_{k0}^2}{m_0 \delta_{00}^2}; \\ \varkappa_2 &= \frac{\mu l b}{m_0} \int_0^l \int_0^b \left| \frac{\delta_{xy0}}{\delta_{00}} \right| dx dy + \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{m_0} \left| \frac{\delta_{k0}}{\delta_{00}} \right|, \end{aligned}\right\} \tag{5.114}$$

где $\mu l b$ — равномерно распределенная масса; $m_0 = \mu l b + \sum_{k=1}^{N} m_k$ — полная масса; δ_{xy0} — перемещение точки плиты с координатами x, y от единичной силы, приложенной в точке удара $O(x_0, y_0)$ в направлении удара; остальные обозначения прежние. Формулы (5.112)—(5.114) тем точнее, чем больше масса ударяющего тела m в сравнении с массой m_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Инструкция по расчету перекрытий на импульсивные нагрузки. Стройиздат, 1966.
2. Гольдсмит В. Удар. Стройиздат, 1965.
3. Рабинович И. М. Основы динамического расчета сооружений на действие кратковременных и мгновенных сил. ч. I и II. Изд. ВИА, 1952.
4. Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. Госстройиздат, 1960.
5. Сорокин Е. С. Переходный процесс в системе с внутренним трением при периодических силах. «Строительная механика и расчет сооружений», 1971, № 2.

РАЗДЕЛ 6

РАСЧЕТ ФУНДАМЕНТОВ ПОД МАШИНЫ С ДИНАМИЧЕСКИМИ НАГРУЗКАМИ

(О. А. Савинов)

6.1. Общие сведения

Динамические нагрузки на фундаменты

Неуравновешенные силы инерции возникают при работе большинства современных машин, устанавливаемых в промышленных зданиях на отдельных фундаментах. В расчетах фундаментов под машины эти силы, т. е. динамические нагрузки, должны учитываться в тех случаях, когда они могут вызвать опасные для здоровья людей, недопустимые по условиям прочности и устойчивости строительных конструкций или вредные для работы промышленного оборудования вибрации фундаментов и зданий.

Сведения о динамических нагрузках от машин, как правило, должны включаться в состав задания на проектирование фундаментов. При отсутствии этих сведений динамические нагрузки определяются по СНиП II-Б.7-70 [16] или инструкции [8].

Типы конструкций фундаментов под машины

Фундаменты под машины с динамическими нагрузками делятся на два основных типа — массивные и рамные.

К особому типу относятся виброизолированные фундаменты; такие фундаменты обычно проектируются массивными, с введением между машиной и фундаментом виброизоляторов в виде стальных пружин или прокладок из резины, пробки и т. д. Вопросы расчета виброизоляции машин с динамическими нагрузками рассматриваются в разделе 15.

Как массивные, так и рамные фундаменты могут быть отдельными для каждой машины или групповыми, на которых устанавливается по несколько машин.

Массивные фундаменты, применяемые для установки машин всех видов, проектируются *блочными* или *стенчатыми*. В первом случае верхняя часть фундамента представляет собой слабоармированный блок сложной формы (зависящей от особенностей компоновки и габаритов машины), во втором случае основу конструкции верхней части составляют продольные или поперечные стены, связываемые поверху промежуточными элементами — балками, плитами и т. п. Нижняя часть массивного фундамента обычно представляет собой толстую плиту, прямоугольной подошвой опирающуюся на естественное основание или на сваи.

Конструктивные формы рамных фундаментов, применяемых главным образом для установки машин с равномерным вращением масс, разнообразны. Для большинства рамных фундаментов характерно наличие верхней части в виде пространственной многостоечной жесткой рамы, стойки которой заделаны в мощную опорную плиту или ростверк, состоящий из системы перекрестных лент. Встречаются случаи, когда фундаменты (например, под трубчатые мельницы или вращающиеся печи) проектируют в виде ряда поперечных П-образных рам, опирающихся на отдельные плиты. Горизонтальные элементы верхнего строения рамных фундаментов (поперечные и продольные по отношению к оси вала машины ригели) образуют площадку для установки и обслуживания машины.

До 1950 г. фундаменты под машины с динамическими нагрузками проектировались только из монолитного железобетона. В 50-х годах начали ис-

пользовать для устройства таких фундаментов сборный железобетон, и в настоящее время существуют и успешно эксплуатируются сотни сборных и сборно-монолитных фундаментов под турбоагрегаты, прокатные станы, дробилки и многие другие виды машин [1, 14].

Требования к фундаментам под машины

Конструкции фундаментов под машины с динамическими нагрузками должны отвечать не только обычным требованиям, предъявляемым к конструкциям, несущим статические нагрузки, но также и условию недопустимости возникновения вибраций, которые могут препятствовать нормальной эксплуатации самой машины или вызывать недопустимые вибрации конструкций окружающих зданий. В соответствии с этим в расчетах фундаментов под машины учитываются два предельных состояния: первое — по несущей способности основания, а также по прочности и выносливости конструктивных элементов фундамента; второе — по колебаниям фундамента от действия динамических нагрузок.

Расчет по несущей способности основания производится при проектировании фундаментов под все виды машин. При этом среднее удельное давление R на основание фундамента от действия всех нормативных статических нагрузок должно соответствовать условию

$$R \leqslant \alpha R^{н}, \qquad (6.1)$$

где $R^{н}$ — нормативное давление, определяемое по СНиП II-В.1-62; α — коэффициент снижения нормативного давления, принимаемый по СНиП II-Б.7-70 [16].

Внецентренность приложения равнодействующих статических нагрузок в расчетах по несущей способности основания не учитывается, поскольку эксцентриситеты более 3% (от соответствующего размера подошвы) для грунтов с нормативным давлением до 1,5 *кгс/см*^{2} и 5% для более прочных грунтов не допускаются.

На прочность и выносливость рассчитывают только отдельные элементы конструкции фундаментов (ригели, балки, плиты), работающие на изгиб.

Таблица 6.1

Численные значения $A_д$ (по СНиП II-Б.7-70)

Машины	Число оборотов в 1 *мин*	$A_д$ в *мм*	
Мотогенераторы и другие низкочастотные электрические машины	До 500 500—750 Более 750	0,20 0,15 0,10	
		Первая гармоника	Вторая гармоника
Машины с кривошипно-шатунными механизмами	До 200 200—400 400—600 Более 600	0,25 (0,3)* 0,25—0,15 0,15—0,10 0,10	0,15 0,10 0,07 0,05
Дробилки (щековые и конусные)	До 300	0,30	
Кузнечные молоты	—	1,2**	

* Значение $A_д$=0,30 относится к фундаментам высотой более 5 *м*.

** При возведении на водонасыщенных песках принимается $A_д$=0,8 *мм*.

Учет динамических воздействий в общем случае производится по формуле

$$A \leqslant A_д, \qquad (6.2)$$

где A — наибольшая величина амплитуды колебаний верхней грани фундамента, определяемая по расчету (см. п. 6.2); $A_д$ — предельная допускаемая величина амплитуды.

Численные значения $A_д$ для фундаментов под машины различных видов приведены в табл. 6.1. Помещенные в таблице нормативные данные установлены для тех случаев, когда обслуживание машины во время ее эксплуатации не требует длительного пребывания людей на фундаменте. В противном случае при проектировании фундаментов должны учитываться требования санитарных норм и правил по ограничению вибраций рабочих мест. Для этого необходимо либо снижать до допустимого по указанным нормам предела величину $A_д$, либо прибегать к устройству пассивной виброизоляции рабочих мест.

Расчеты осадок фундаментов под машины с динамическими нагрузками обычно не производятся. В необходимых случаях для определения осадок следует пользоваться указаниями СНиП II-B.1-62 (см. также [2]).

6.2. Динамический расчет массивных фундаментов

Постановка задачи

Способ динамического расчета массивных фундаментов основан на двух упрощающих допущениях:

1) фундамент вместе с установленной на нем машиной рассматривается как абсолютно жесткое тело;

2) основание фундамента считается идеально упругим и невесомым.

Введение первого из этих допущений оправдывается тем, что размеры тел машины и фундамента малы по сравнению с размерами активной зоны основания, тогда как величина модулей упругости бетона и стали на несколько порядков превосходит величины модуля упругости нескальных грунтов. Таким образом, жесткость машины и массивного фундамента настолько превышает жесткость основания, что их упругими деформациями при колебаниях можно пренебрегать без существенного ущерба для точности расчета. Возможность и целесообразность введения первого допущения для обычных массивных фундаментов из монолитного бетона или близких к ним по типу сборных фундаментов из массивных надежно замоноличенных блоков была подтверждена экспериментально [2, 7]. Однако дальнейшее распространение сборного железобетона может привести к появлению конструкций, состоящих из относительно тонких стен и плит, влияние упругости которых необходимо будет учитывать в динамических расчетах.

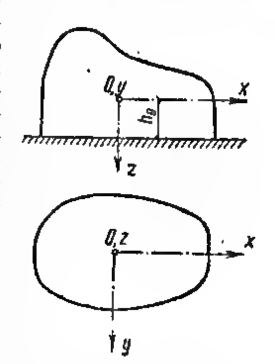


Рис. 6.1. Расчетная схема массивного фундамента

Согласно второму допущению между перемещениями фундамента и реакциями упругого основания (рис. 6.1) существует линейная зависимость:

$$R_z = K_z z_0; \quad R_x = K_x x_0;$$
$$M_{xOz} = K_\varphi \varphi_0; \quad M_{xOy} = K_\psi \psi_0; \qquad (6.3)$$

где R_z и R_x — соответственно вертикальная и горизонтальная составляющие равнодействующей реакций упругого основания; M_{xOz}, M_{xOy} — моменты реактивных пар, действующих в плоскостях xOz и xOy; z_0, x_0 — соответственно вертикальное и горизонтальное перемещения центра подошвы фундамента; φ_0, ψ_0 — углы поворота фундамента в плоскостях xOz и xOy; K_z, K_x, K_φ и K_ψ — коэффициенты жесткости упругого основания.

Опыты показали, что если коэффициенты K_z, K_x, K_φ и K_ψ подобраны правильно, то расчеты, базирующиеся на втором допущении, дают близкие к действительности результаты. Методика определения этих коэффициентов и необходимые справочные данные приводятся в 6.5. Поскольку в расчетах не учитывается влияние инерции грунта, коэффициенты следует рассматривать лишь как условные расчетные характеристики основания, зависящие не только от упругих, но и от инерционных его свойств.

В послевоенные годы в Советском Союзе и за рубежом были предприняты попытки исследования задачи о колебаниях фундамента, опирающегося на упругое инерционное полупространство. Сейчас уже получены решения этой задачи для некоторых частных случаев; наиболее важные результаты принадлежат О. Я. Шехтер [18], Н. М. Бородачеву [4, 5], В. А. Ильичеву [1]. Завершение исследований позволит отказаться от второго допущения и разработать более строгие методы динамического расчета массивных фундаментов, чем применяемые в настоящее время

В проектной практике для расчетов массивных фундаментов используются приводимые ниже формулы. При этом предполагается, что одна из главных осей инерции фундамента вертикальна и проходит через центр тяжести площади подошвы, а две другие параллельны главным осям этой площади (см. рис. 6.1). В реальных фундаментах эти условия часто не соблюдаются; в практических расчетах влиянием тех или иных отклонений в положении главных осей от указанного принято пренебрегать. Для всех рассматриваемых случаев даны уравнения колебаний центра тяжести фундамента и в необходимых случаях — углов поворота в соответствующих плоскостях.

Пользуясь этими уравнениями, искомую величину наибольшей амплитуды колебаний верхней грани фундамента, вводимую в основную формулу (6.2), либо берут непосредственно из уравнения (например, при вертикальных колебаниях), либо определяют путем сложения составляющих колебаний различных видов. Для некоторых наиболее часто встречающихся случаев приводятся соответствующие примеры.

Вывод приводимых в настоящем разделе формул можно найти в работах [2, 14].

Условные обозначения

G, m — вес и масса фундамента;

θ — момент инерции этой массы относительно оси Oy, проходящей через центр тяжести тела;

θ_0 — то же, относительно главной оси Oy_0 площади подошвы, параллельной оси Oy;

$\gamma = \dfrac{\theta}{\theta_0}$ — отношение моментов инерции;

θ_z — момент инерции массы фундамента относительно оси Oz;

K_z, K_x, K_φ, K_ψ — коэффициенты жесткости основания;

λ_z — круговая частота собственных вертикальных колебаний фундамента;

λ_ψ — то же, вращательных колебаний относительно вертикальной оси;

λ_1, λ_2 — соответственно первая и вторая круговые частоты главных горизонтальных и вращательных колебаний фундамента в плоскости xOz (см. рис. 6.1);

---

[1] В. А. Ильичев. К решению нестационарной контактной задачи о квадратном штампе, лежащем на упругом инерционном полупространстве. В сб.: «Исследования по теории сооружений», вып. XVII, 1969.; Вертикальные нестационарные колебания массива под действием волн, возникающих в полупространстве при колебаниях другого массива. В сб.: «Динамика сооружений». Стройиздат, 1968.

x, y, z — перемещения центра тяжести фундамента;
φ, ψ — углы поворота в плоскостях xOz и xOy (*рад*);
A_z, A_x — амплитуды колебаний центра тяжести фундамента;
A_{kz}, A_{kx} — то же, любой точки k фундамента;
A_φ, A_ψ — амплитудные значения углов поворота фундамента в плоскостях xOz и xOy (*рад*).

Остальные обозначения указываются в пояснениях к формулам и на расчетных схемах.

Свободные колебания фундаментов (без учета затухания)

Круговые частоты (в *рад/сек*) собственных колебаний фундаментов определяются без учета неупругих сопротивлений и рассеяния энергии в основании по формулам:

$$\lambda_z = \sqrt{\frac{K_z}{m}}; \qquad (6.4)$$

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2\gamma}\left[\lambda_x^2 + \lambda_\varphi^2 \mp \sqrt{(\lambda_x^2+\lambda_\varphi^2)^2 - 4\gamma\lambda_x^2\lambda_\varphi^2}\right]}, \qquad (6.5)$$

$$\lambda_x^2 = \frac{K_x}{m}; \quad \lambda_\varphi^2 = \frac{K_\varphi - Gh_0}{\theta_0}; \qquad (6.6) \qquad \lambda_\psi = \sqrt{\frac{K\psi}{\theta_z}}. \qquad (6.7)$$

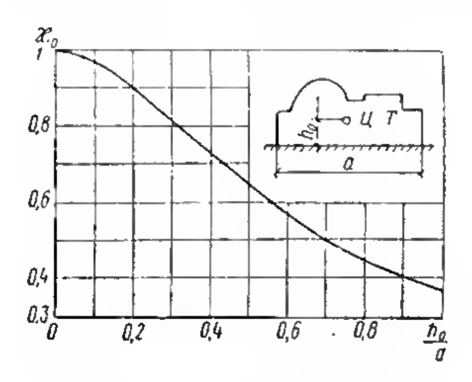


Рис. 6.2. График для определения коэффициента $\varkappa_0$

Для приближенного определения частоты λ_1 может служить формула

$$\lambda_1 = \varkappa_0\lambda_x, \qquad (6.8)$$

где $\varkappa_0$ — коэффициент, определяемый по графику (рис. 6.2).

Случай 1. Свободные (без затухания) вертикальные колебания фундамента:

$$z = A_z \sin(\lambda_z t + \delta); \qquad (6.9)$$

здесь:

$$A_z = \sqrt{z_0^2 + \frac{v_{0z}^2}{\lambda_z^2}}; \qquad (6.10) \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{z_0\lambda_z}{v_{0z}}, \qquad (6.11)$$

где z_0, v_{0z} — соответственно начальное смещение и начальная скорость движения фундамента.

При центральном ударе начальное смещение фундамента z_0 равно нулю и формулы (6.9) и (6.10) приобретают вид:

$$z = A_z \sin \lambda_z t; \qquad (6.12)$$

$$A_z = \frac{v_{0z}}{\lambda_z}. \qquad (6.13)$$

В расчетах фундаментов под машины ударного действия предполагается, что продолжительность удара мала по сравнению с периодом $T_z = \frac{2\pi}{\lambda_z}$ собственных колебаний фундамента, в этом случае

$$v_{0z} = (1 + \varepsilon) \frac{m_0}{m_0 + m} v, \qquad (6.14)$$

где m_0 — масса ударяющего тела; v — скорость его движения в момент удара; ε — коэффициент восстановления скорости, зависящий от свойств материалов соударяющихся тел.

Формулы (6.12)—(6.14) используются в частности для расчета на колебания фундаментов под кузнечные молоты. Если подставить в формулу (6.13) значение v_{0z}, определяемое формулой (6.14), произвести в полученном выражении элементарные преобразования и ввести, по данным опытов, некоторый поправочный коэффициент, получим формулу для определения максимальной амплитуды колебаний фундамента под молот, рекомендуемую СНиП II-Б.7-70,

$$A_z = 0,2 \frac{(1 + \varepsilon) v G_0}{\sqrt{K_z G}}, \qquad (6.15)$$

где $G_0 = m_0 g$ — вес в *т* падающих частей молота; G — общий вес в *т* фундамента, шабота, станины и засыпки грунта над обрезами фундамента; K_z — коэффициент жесткости основания в *т/м*; v — скорость в *м/сек* движения падающих частей в момент удара.

Значения коэффициента восстановления скорости ε в расчетах фундаментов под кузнечные молоты принимаются равными:

а) для штамповочных молотов: $\varepsilon = 0,5$ — при штамповке стальных изделий; $\varepsilon = 0$ — при штамповке изделий из цветных металлов;

б) для ковочных молотов — 0,25.

Скорость определяется по формулам:

а) для молотов одиночного действия

$$v = 0,9 \sqrt{2gH}; \qquad (6.16)$$

б) для молотов двойного действия

$$v = 0,65 \sqrt{2g \frac{G_0 + pf}{G_0} H}, \qquad (6.17)$$

где p — давление пара или воздуха в цилиндре; f — площадь поршня; H — высота падения.

В расчетах массивных фундаментов копров для разбивки металлического скрапа коэффициент восстановления скорости ε принимается равным нулю, а скорость $v = \sqrt{2gH}$.

В расчетах фундаментов под машины ударного действия небольшой мощности (с энергией удара не более 2 *тс·м*) формулами (6.12)—(6.15) можно пользоваться не только при центральном, но также при внецентренном ударе. Для расчета фундаментов более мощных машин на действие внецентренного удара, а также для расчета фундаментов на действие горизонтально направленных ударов ниже даются необходимые формулы.

При внецентренном ударе:

$$
\left.
\begin{aligned}
z &= \frac{v_{0z}}{\lambda_z} \sin \lambda_z t; \\
x &= \frac{h_0 \omega_{0z} \lambda_x^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \left(\frac{\sin \lambda_1 t}{\lambda_1} - \frac{\sin \lambda_2 t}{\lambda_2} \right); \\
\varphi &= \frac{\omega_{0z} \left(\lambda_x^2 + \lambda_1 \lambda_2 \right)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \left(\frac{\sin \lambda_1 t}{\lambda_1} - \frac{\sin \lambda_2 t}{\lambda_2} \right).
\end{aligned}
\right\} \quad (6.18)
$$

Здесь

$$
v_{0z} = \frac{v(1+\varepsilon)}{1 + \frac{m}{m_0} + \frac{me^2}{\theta}}; \quad \omega_{0z} = \frac{m_0 ve(1+\varepsilon)}{\theta \left(1 + \frac{m}{m_0} + \frac{me^2}{\theta} \right)}
$$

(e — расстояние между вертикальной центральной осью и вертикалью, проходящей через точку удара).

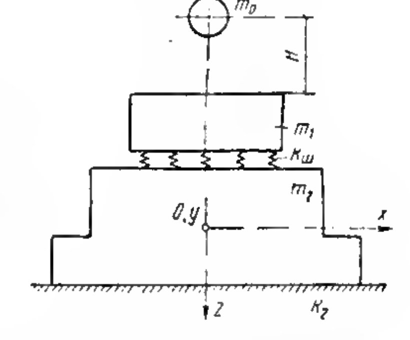


Рис. 6.3. Схема к расчету на действие центрального удара фундамента под молот с шаботом, опирающимся на упругую прокладку

Случай 2. Свободные (без затухания) колебания фундамента под действием центрального удара, наносимого по шаботу, опирающемуся на фундамент через упругие прокладки (рис. 6.3):

$$
\left.
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{\left(\lambda_ш^2 - \lambda_2^2\right)\left(\lambda_ш^2 - \lambda_1^2\right)}{\lambda_ш^2 \left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2\right)} v_ш \left(\frac{\sin \lambda_1 t}{\lambda_1} - \frac{\sin \lambda_2 t}{\lambda_2} \right); \\
z_2 &= \frac{v_ш}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left(\frac{\lambda_ш^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1} \sin \lambda_1 t - \frac{\lambda_ш^2 - \lambda_1^2}{\lambda_2} \sin \lambda_2 t \right);
\end{aligned}
\right\} \quad (6.19)
$$

$$
\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{(1+\alpha)\left(\lambda_z^2 + \lambda_ш^2\right)}{2} \mp \sqrt{\frac{(1+\alpha)^2 \left(\lambda_z^2 + \lambda_ш^2\right)^2}{4} - (1+\alpha)\, \lambda_z^2 \lambda_ш^2}}; \quad (6.20)
$$

$$
\lambda_z^2 = \frac{K_z}{m_1 + m_2}; \quad \lambda_ш^2 = \frac{K_ш}{m_1} \quad (6.21)
$$

$$
\alpha = \frac{m_1}{m_2}; \quad (6.22)
$$

$$v_{ш} = \frac{1+\varepsilon}{m_0+m_1} m_0 v. \quad (6.23)$$

Пользуясь формулами (6.29) и (6.30), можно подсчитать динамическое давление на прокладку:

$$\sigma = \frac{C_1}{F_1}(z_2 - z_1). \quad (6.24)$$

При проектировании фундаментов под молоты формулами (6.19)—(6.24) следует пользоваться только в тех случаях, когда по каким-либо причинам необходимо получить уточненное представление о поведении фундамента, например в случаях применения необычных материалов для подшаботной прокладки. Как правило, амплитуда колебаний фундамента под молот определяется по формуле (6.15). Динамическое давление σ на деревянную подшаботную прокладку при этом определяется по приближенной формуле

$$\sigma = 0,5\, G_0 v \sqrt{\frac{E}{G_1 F_1 b}}, \quad (6.25)$$

где G_0 — действительный вес падающих частей молота в *т*; v — скорость их движения в *м/сек*, определяемая по формулам (6.16) и (6.17); E — модуль упругости материала прокладки в *тс/м²*; G_1 — общий вес шабота и станины для штамповочных молотов и вес шабота для ковочных в *т*; F_1, b — соответственно опорная площадь в *м²* и толщина в *м* подшаботной прокладки.

Вынужденные колебания фундаментов под действием периодических сил

Случай 3. Вынужденные вертикальные колебания фундамента под действием центрально приложенной вертикальной силы $P_z = P_z^{(0)} \sin \omega t$:

а) без учета неупругих сопротивлений и рассеяния энергии в основании:

$$z = A_z \sin \omega t; \quad (6.26)$$

$$A_z = \frac{P_z^{(0)}}{K_z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\lambda_z^2}}; \quad (6.27)$$

б) с учетом неупругих сопротивлений и рассеяния энергии в основании[1] по гипотезе Фойгта:

$$z = A_z \sin(\omega t + \delta); \quad (6.28)$$

$$A_z = \frac{P_z^{(0)}}{K_z} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda_z^2}\right)^2 + (\Phi\omega)^2}}; \quad (6.29)$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\Phi\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\lambda_z^2}}, \quad (6.30)$$

где Φ — модуль затухания в *сек*, по Н. П. Павлюку [14].

[1] Этими формулами следует пользоваться в тех случаях, когда частота λ_z оказывается близкой к частоте ω возмущающей силы.

Случай 4. Вынужденные горизонтальные и вращательные колебания фундамента в плоскости xOz под действием пары сил с моментом $M=M^{(0)}\sin(\omega t+\delta_1)$, действующей в этой плоскости (без учета неупругих сопротивлений и рассеяния энергии):

$$x = A_x \sin(\omega t + \delta_1);$$
$$\varphi = A_\varphi \sin(\omega t + \delta_1), \quad (6.31)$$

где

$$A_x = \frac{M^{(0)} h_0}{K_\varphi} \cdot \frac{1}{\Delta_1}; \quad (6.32)$$

$$A_\varphi = \frac{M^{(0)}}{K_\varphi} \cdot \frac{1 - \dfrac{\omega^2}{\lambda_x^2}}{\Delta_1}. \quad (6.33)$$

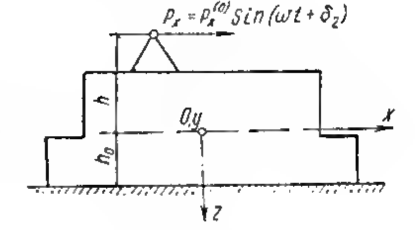


Рис. 6.4. Схемы к расчету фундамента на действие горизонтальной возмущающей силы

Здесь

$$\Delta_1 = \frac{1}{\lambda_x^2\lambda_\varphi^2}\left[\gamma\omega^4 - \left(\lambda_x^2 + \lambda_\varphi^2\right)\omega^2 + \lambda_x^2\lambda_\varphi^2\right] = \left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda_2^2}\right). \quad (6.34)$$

Частоты λ_1 и λ_2 определяются по формуле (6.5).

Случай 5. Вынужденные горизонтальные и вращательные колебания фундамента в плоскости xOz (рис. 6.4) под действием горизонтальной силы $P_x = P_x^{(0)} \sin(\omega t+\delta_2)$, действующей в этой плоскости (без учета неупругих сопротивлений и рассеяния энергии) [1]:

$$x = A_x \sin(\omega t + \delta_2);$$
$$\varphi = A_\varphi \sin(\omega t + \delta_2); \quad (6.35)$$

$$A_x = \frac{P_x^{(0)}}{K_x} \cdot \frac{1 + (1-\gamma)\dfrac{h+h_0}{h_0} \cdot \dfrac{\lambda_x^2}{\lambda_\varphi^2} - \gamma\dfrac{\omega^2}{\lambda_\varphi^2}}{\Delta_1}; \quad (6.36)$$

$$A_\varphi = \frac{P_x^{(0)}(h+h_0)}{K_x} \cdot \frac{1 - \dfrac{h}{h+h_0} \cdot \dfrac{\omega^2}{\lambda_x^2}}{\Delta_1}, \quad (6.37)$$

---

[1] Соответствующие этому случаю формулы, построенные с учетом влияния неупругих сопротивлений и рассеяния энергии в основании, можно найти в работе А. Д. Кондина [11].

Величина Δ_1 определяется, как и в предыдущем случае, по формуле (6.34).

Случай 6. Приближенный прием определения амплитуд горизонтальных и вращательных колебаний фундамента в плоскости xOz, рекомендуемый для расчета фундаментов низкочастотных машин.

При действии пары сил:

$$x = \frac{M^{(0)}(h+h_0)}{K_\varphi}\eta\sin(\omega t + \delta_1); \qquad (6.38)$$

$$\varphi = \frac{M^{(0)}}{K_\varphi}\eta\sin(\omega t + \delta_1). \qquad (6.39)$$

При действии горизонтальной силы:

$$x = \left(\frac{1}{K_x} + \frac{(h+h_0)}{K_\varphi}\right)\eta P_x^{(0)}\sin(\omega t + \delta_2); \qquad (6.40)$$

$$\varphi = \frac{P_x^{(0)}(h+h_0)}{K_\varphi}\eta\sin(\omega t + \delta_2), \qquad (6.41)$$

где η — коэффициент динамичности, определяемый из выражений:
без учета неупругих сопротивлений

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}}; \qquad (6.42)$$

с учетом неупругих сопротивлений

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}\right)^2 + (\Phi\omega)^2}}. \qquad (6.43)$$

Частота λ_1 для рассматриваемого случая определяется по приближенной формуле (6.7).

Некоторые практически важные случаи расчета массивных фундаментов на действие кратковременных нагрузок

Случай 7. К фундаменту приложена сила, направленная по оси Oz и меняющаяся по закону $P_z = P_z^{(0)}\sin\omega t$, но действующая не непрерывно, а в течение промежутка времени[1] $\tau_0 = \pi/\omega$.

Уравнения движения фундамента в этом случае имеют вид:
при $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$

$$z = \frac{P_z^{(0)}}{K_z}\cdot\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\lambda_z^2}}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\lambda_z}\sin\lambda_z t\right); \qquad (6.44)$$

при $t \geqslant \tau_0$

[1] К такому графику в ряде случаев целесообразно приводить кратковременные нагрузки, возникающие, например, при штамповке изделий, быстром опорожнении (выхлопе содержимого) некоторых химических аппаратов и т. п.

$$z_1 = 2\,\frac{P_z^{(0)}}{K_z}\cdot\frac{\dfrac{\omega}{\lambda_z}}{1-\dfrac{\omega^2}{\lambda_z^2}}\ \sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\lambda_z}{\omega}\ \sin(\lambda_z t+\delta), \tag{6.45}$$

где δ — фазовый угол, определяемый из условия

$$\sin\left(\frac{\lambda_z}{\omega}\,\pi+\delta\right) = -\,\frac{\omega}{\lambda_z}\,\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\lambda_z}{\omega}\,. \tag{6.46}$$

Случай 8. К фундаменту приложена пара сил, действующая в плоскости xOz и меняющаяся по закону $M = M^{(0)}\sin\omega t$, продолжительность действия пары сил равна: $\tau_0=\pi/\omega$.

Уравнения движения тела имеют вид:

при $t\leqslant\tau_0$

$$x = \frac{M^{(0)}h_0}{K_\varphi}\cdot\frac{1}{\Delta_1}\left(\frac{\omega}{\lambda_1}\cdot\frac{1-\dfrac{\omega^2}{\lambda_2^2}}{1-\dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}}\sin\lambda_1 t+\frac{\omega}{\lambda_2}\cdot\frac{1-\dfrac{\omega^2}{\lambda_1^2}}{1-\dfrac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}}\ \sin\lambda_2 t+\sin\omega t\right); \tag{6.47}$$

$$\varphi = \frac{M^{(0)}}{K_\varphi}\cdot\frac{1}{\Delta_1}\left[\frac{\omega}{\lambda_1}\cdot\frac{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\lambda_2^2}\right)\left(1-\dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_x^2}\right)}{1-\dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}}\sin\lambda_1 t+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega}{\lambda_2}\cdot\frac{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\lambda^2}\right)\left(1-\dfrac{\lambda_2^2}{\lambda_x^2}\right)}{1-\dfrac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}}\sin\lambda_2 t+\left(1-\frac{\omega^2}{\lambda_x^2}\right)\sin\omega t\right] \tag{6.48}$$

при $t\geqslant\tau_0$

$$x_1 = A_3\sin(\lambda_1 t+\delta_4)+A_4\sin(\lambda_2 t+\delta_5);$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{h_0}\left(1-\frac{\lambda_1^2}{\lambda_x^2}\right)A_3\sin(\lambda_1 t+\delta_4)+\frac{1}{h_0}\left(1-\frac{\lambda_2^2}{\lambda_x^2}\right)A_4\sin(\lambda_2 t+\delta_5), \tag{6.49}$$

где A_3, A_4, δ_4 и δ_5 — постоянные, определяемые из условий:

$$\left.\begin{aligned}
[x]_{t=\tau_0} &= [x_1]_{t=\tau_0};\\
[\dot{x}]_{t=\tau_0} &= [\dot{x}_1]_{t=\tau_0};\\
[\varphi]_{t=\tau_0} &= [\varphi_1]_{t=\tau_0};\\
[\dot{\varphi}]_{t=\tau_0} &= [\dot{\varphi}_1]_{t=\tau_0}.
\end{aligned}\right\} \tag{6.50}$$

Для ориентировочных подсчетов можно пользоваться приближенными формулами, не учитывающими влияние инерции вращения фундамента:
при $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$

$$\varphi \approx \frac{M^{(0)}}{K_\varphi} \cdot \frac{\sin \omega t - \frac{\omega}{\lambda_1} \sin \lambda_1 t}{1 - \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}}; \tag{6.51}$$

при $t \geqslant \tau_0$

$$\varphi_1 \approx \frac{2M^{(0)}}{K_\varphi} \cdot \frac{\frac{\omega}{\lambda_1} \cos \frac{\pi \lambda_1}{2\omega} \sin (\lambda_1 t + \delta)}{1 - \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}}. \tag{6.52}$$

Фазовый угол δ, как и в предыдущем случае, определяется по формуле (6.46). Смещения крайней точки верхней грани фундамента равны:

$$x_\text{в} = h_\text{ф} \varphi; \quad z_\text{в} = a\varphi; \tag{6.53}$$

$$x_{1\text{в}} = h_\text{ф} \varphi_1; \quad z_{1\text{в}} = a\varphi_1 \tag{6.54}$$

Случай 9. В расчетах фундаментов под генераторы разных мощностей встречается случай, когда продолжительность действия пары составляет не π/ω, а $n\pi/\omega$, где n — целое положительное число. В этом случае колебания фундамента для интервала $0 \leqslant t \leqslant n\pi/\omega$ определяются выражением (6.53), а для интервала $t \geqslant n\pi/\omega$ — по формулам:

при $n = 1, 3, 5, \ldots$

$$\varphi_1 \approx \frac{2M^{(0)}}{K_\varphi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}} \cdot \frac{\omega}{\lambda_1} \cos \frac{n\lambda_1}{\omega} \cdot \frac{\pi}{2} \sin (\lambda_1 t + \delta); \tag{6.55}$$

при $n = 2, 4, 6, \ldots$

$$\varphi_1 \approx \frac{2M^{(0)}}{K_\varphi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}} \cdot \frac{\omega}{\lambda_1} \sin \frac{n\lambda_1}{\omega} \cdot \frac{\pi}{2} \sin (\lambda_1 t + \delta). \tag{6.56}$$

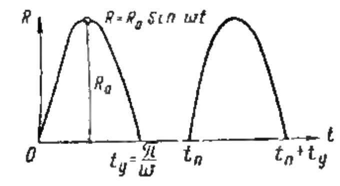


Рис. 6.5. График изменения во времени кратковременных периодических сил

Случай 10. На фундамент действует центрально приложенная вертикальная нагрузка, изменяющаяся во времени по графику, представленному на рис. 6.5.

В этом случае максимальная амплитуда вертикальных колебаний фундамента может быть определена по формуле

$$A_{z\text{макс}} = \frac{R_0}{K_z}\eta_z, \tag{6.57}$$

где η_z — коэффициент динамичности, определяемый:

при $\frac{t_n \lambda_z}{2\pi} \geqslant 0{,}75$ по табл. 6.2 (с учетом затухания);

при $\frac{t_n \lambda_z}{2\pi} \leqslant 0{,}75$ по приближенной формуле (6.58).

Формула для определения η_z при $\frac{t_n \lambda_z}{2\pi} \leqslant 0{,}75$ имеет вид:

$$\eta_z = \frac{\left|\xi \cos\frac{\tau_y}{2} \operatorname{tg}\frac{\tau_n}{2} + 1 - \xi \sin\frac{\tau_y}{2}\right|}{2\,|1-\xi^2|}, \tag{6.58}$$

где $\tau_y = t_y \lambda_z$; $\tau_n = t_n \lambda_z$ и $\xi = \pi/\tau_y$.

Подсчеты показывают, что при $\frac{\tau_n}{2\pi} = \frac{t_n \lambda_z}{2\pi} < 0{,}5$ формула (6.58) может быть упрощена:

$$\eta_z \approx \frac{\left|\frac{\pi \tau_n}{2\tau_y} + 1 - \frac{\pi}{2}\right|}{2\,|1-\xi^2|}. \tag{6.59}$$

Таблица 6.2

Значения η_z для случая $\frac{t_n \lambda_z}{2\pi} \geqslant 0{,}75$

$\frac{t_y}{t_n}$	0,75		1,0 (резонанс)		1,5		2,0 (резонанс)		2,5	
	$\frac{\Phi \lambda_z}{2}$									
	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2
$^1/_4$	0,40	0,34	1,44	0,88	0,75	0,60	1,64	0,90	1,00	0,90
$^1/_3$	0,50	0,44	1,66	0,80	0,84	0,80	1,90	1,00	1,00	0,80
$^1/_2$	0,60	0,54	2,48	1,00	0,96	0,86	1,56	0,90	0,90	0,80

Формулы (6.57) — (6.59) и табл. 6.2 предназначаются в основном для расчета фундаментов под встряхивающие и вибрационно-ударные столы, применяемые в литейном производстве, в промышленности сборного железобетона и т. п. Параметры R_0, t_y и t_n нагрузки для этих машин определяются по формулам:

а) низкочастотные кулачковые встряхивающие столы со свободным падением движущихся частей

$$R_0 = \sqrt{2G_0C_0h_п}\,; \quad t_y = \frac{\pi}{\lambda_0}\,; \quad t_n = \frac{2\pi}{\omega}\,, \tag{6.60}$$

где G_0 — полный вес падающих частей; $h_п$ — высота падения; $C_0 = \frac{EF}{b}$ — коэффициент жесткости упругой прокладки (E — модуль упругости; b — толщина прокладки); $\lambda_0 = \sqrt{\frac{gC_0}{G_0}}$ — частота собственных колебаний падающих частей на прокладке; $\omega = \frac{n_0}{9,55}$ — угловая частота ударов (n_0 — число ударов в минуту);

б) виброударные столы на упругих прокладках

$$R_0 = \frac{\pi\lambda_0}{\omega}G; \quad t_y = \frac{\pi}{\lambda_0}\,; \quad t_n = \frac{2\pi}{\omega}\,, \tag{6.61}$$

где G — равнодействующая всех постоянных сил, приложенных к подвижной раме стола (включая ее собственный вес, вес изделия с формой и в необходимых случаях усилие в пружинах, прижимающих подвижную раму к фундаменту).

6.3. Динамический расчет рамных фундаментов

Рамные конструкции фундаментов под машины получают все более и более широкое распространение, так как они отличаются экономичностью, обеспечивают наиболее удобные условия для размещения и эксплуатации машин и могут легко выполняться в сборном железобетоне. Если до середины 50-х годов такие фундаменты устраивались почти исключительно под турбоагрегаты и крупные электрические машины, то в настоящее время на них устанавливаются тяжелые дробилки (щековые и конусные), трубчатые мельницы, вращающиеся электропечи и другие неуравновешенные машины. Эти машины различны по виду и интенсивности динамических нагрузок, передаваемых на фундаменты, что обусловливает существенные различия в подходе к динамическому расчету их фундаментов.

Машины, устанавливаемые на рамных фундаментах

Турбогенераторы и другие высокочастотные машины с вращающимися роторами (турбокомпрессоры, турбовоздуходувки, газовые турбины) характеризуются высокой степенью уравновешенности (возникающие при их нормальной эксплуатации центробежные силы инерции не превосходят 0,2 веса вращающихся частей). Рабочие числа оборотов этих машин обычно составляют 3000 в 1 *мин* и во всяком случае не бывают ниже 1500 в 1 *мин*, тогда как частоты основного (низшего) тона собственных колебаний железобетонных рамных фундаментов под турбогенераторы, по данным непосредственных измерений, не превышают 800—1000 *кол/мин*.

При таком соотношении частот появление резонансных колебаний с основной частотой в эксплуатационных условиях для этих фундаментов невозможно, чем, по-видимому, и объясняется тот факт, что практика эксплуатации турбинных установок не знает случаев появления недопустимых вибра-

ций, которые были бы вызваны неудовлетворительной работой фундамента. В связи с этим нормы [16] не рекомендуют производить динамические расчеты рамных фундаментов под высокочастотные машины.

Моторгенераторы и другие крупные низкочастотные электрические машины также относятся к типу наиболее хорошо уравновешенных машин. Однако число оборотов этих машин (200—1000 в 1 *мин*) лежат в том же диапазоне, что и частоты собственных колебаний основного тона железобетонных рамных фундаментов. Поэтому в практике нередки случаи сильных (резонансных) колебаний рамных фундаментов под мотор-генераторы. При этом имеются в виду только горизонтальные и вращательные колебания; вертикальные колебания в рассматриваемом случае (даже при резонансе) всегда малы и могут не приниматься во внимание. Практические формулы для расчета рамного фундамента на горизонтальные и вращательные вынужденные колебания приводятся далее.

Компрессоры, дробилки и другие низкочастотные неуравновешенные машины. Возможность применения рамных фундаментов для установки таких машин определяется главным образом результатами расчета фундамента на установившиеся горизонтальные и вращательные колебания; этот расчет может производиться по формулам, рекомендованным для фундаментов под мотор-генераторы. Кроме того, могут встречаться случаи, когда необходимы дополнительные расчеты: а) на вертикальные колебания и б) на неустановившиеся горизонтальные и вращательные колебания, возникающие при пусках и остановках машины.

Расчеты на вертикальные колебания следует производить в тех случаях, когда при работе машины возникают значительные вертикальные возмущающие силы. При этом допускается рассматривать фундамент как твердое тело, опирающееся на упругое основание (пренебрегая влиянием упругости рам, которые должны проектироваться достаточно жесткими), по формулам предыдущего параграфа.

Расчеты на пусковой резонанс должны производиться в тех случаях, когда частота возмущающих сил превышает низшие частоты собственных горизонтальных и вращательных колебаний фундамента; рекомендуемый для таких случаев приближенный способ расчета приводится ниже.

Трубчатые мельницы и вращающиеся электропечи. Угловая скорость вращения барабанов этих машин весьма низка и не превышает нескольких оборотов в минуту, вследствие чего неуравновешенные силы инерции настолько малы, что могут не приниматься во внимание. В то же время при эксплуатации трубчатых мельниц и вращающихся электропечей наблюдаются весьма значительные колебания их фундаментов. Причина их возникновения заключается в искривлениях корпуса машины (начальных и возникающих при эксплуатации). Эти колебания (учитывая весьма низкие угловые скорости вращения машин) можно рассматривать как статические перемещения; однако общепринятого метода расчета на этот случай не существует.

Формулы для определения амплитуд установившихся горизонтальных и вращательных колебаний рамного фундамента

Формулы, рекомендуемые СНиП II-Б.7-70 для расчета на колебания рамных фундаментов под низкочастотные (не более 1000 *об/мин*) машины, основаны на следующих допущениях: 1) верхняя горизонтальная рама фундамента, образованная ригелями поперечных рам и продольными балками, и нижняя опорная плита (рис. 6.6), опирающаяся на грунт, рассматриваются как жесткие тела; 2) масса нижней плиты не учитывается и 3) предполагается, что центр тяжести массы верхней рамы, центр жесткости по-

перечных рам (точка, при приложении к которой горизонтальной силы все рамы совмещаются одинаково) и центр тяжести площади подошвы нижней плиты расположены на одной вертикали.

Максимальная амплитуда A горизонтальных колебаний верхней грани фундамента определяется по формуле

$$A = A_x + A_\psi e_{\text{макс}}, \tag{6.62}$$

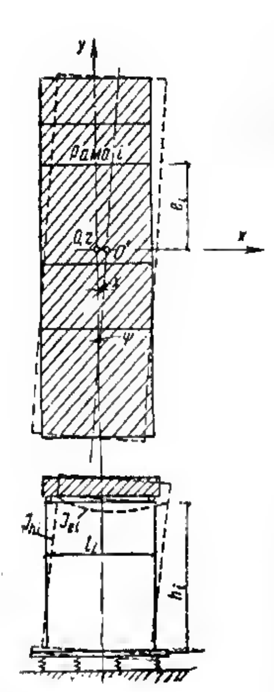


Рис. 6.6. Расчетная схема рамного фундамента

где A_x и A_ψ — амплитуда горизонтальных колебаний центра тяжести верхней рамы и амплитуда угла ее поворота относительно оси Oz; $e_{\text{макс}}$ — расстояние от центральной вертикальной оси Oz системы до наиболее удаленного от нее подшипника машины. Величины A_x и A_ψ определяются по формулам:

$$A_x = \frac{P^{\text{н}}}{K_1} \cdot \frac{\eta_{\text{макс}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda_{x_1}^2}\right)^2 \eta_{\text{макс}}^2 + \frac{\omega^2}{\lambda_{x_1}^2}}}; \tag{6.63}$$

$$A_\psi = \frac{P^{\text{н}} e_{\text{макс}}}{2K_2} \cdot \frac{\eta_{\text{макс}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda_{\psi_1}^2}\right)^2 \eta_{\text{макс}}^2 + \frac{\omega^2}{\lambda_{\psi_1}^2}}}, \tag{6.64}$$

где $P^{\text{н}}$ — нормативная величина амплитуды горизонтальной составляющей возмущающей силы, принимаемая для машин с вращающимися частями по табл. 6.3, а для прочих машин по заданию завода-изготовителя; $\eta_{\text{макс}}$ — коэффициент резонансного увеличения, принимаемый для железобетонных рамных фундаментов равным 8; $\omega = 0{,}105 n_0$ — круговая частота возмущающей силы (для машин с вращающимися роторами — угловая скорость вращения ротора); K_1, K_2 — коэффициенты жесткости конструкции фундаментов, λ_{x_1}, $\lambda_{\psi_1}^2$ — круговые частоты собственных горизонтальных поступательных (в направлении оси Ox) и вращательных колебаний фундамента; формулы для определения K_1, K_2, λ_{x_1} и λ_{ψ_1} см. далее.

Коэффициенты жесткости K_1 и K_2 определяются по формулам:

$$K_1 = \frac{1}{\frac{1}{K_x} + \frac{h^2}{K_\varphi} + \frac{1}{K_x'}}; \tag{6.65}$$

$$K_2 = \frac{1}{\frac{1}{K_\psi} + \frac{1}{K_\psi'}}, \tag{6.66}$$

где K_x, K_φ, K_ψ — коэффициенты жесткости основания (см. 6.2); h — высота фундамента (от подошвы до верхнего обреза); $K'_x = \sum_{i=1}^{i=m} C_i$ — коэффициент жесткости системы при поступательных горизонтальных смещениях верхней рамы в направлении оси Ox (m — число поперечных рам); $K'_\psi = \sum_{i=1}^{i=m} C_i e_i^2$ — то же, при повороте верхней рамы вокруг оси Oz; значения C_i определяются из выражения:

$$C_i = \frac{12\,EJ_{hi}}{hi} \cdot \frac{1+6k_i}{2+3k_i}; \quad k_i = \frac{h_i J l_i}{l_i J_{hi}}. \qquad (6\ 67)$$

Здесь E — модуль упругости материала рам; J_{li}, J_{hi} — моменты инерции поперечных сечений ригеля и стойки рамы; h_i, l_i — соответственно расчетная высота стойки и расчетный пролет ригеля i-й рамы (этот пролет может приниматься равным 0,9 расстояния между осями стоек).

Таблица 6.3

Данные для определения нормативных динамических нагрузок, возникающих при работе машин с вращающимися роторами[1]

Машины	Величина $P^н$ в долях от веса вращающихся частей
Турбоагрегаты	0,2
Электромашины:	
а) с числом оборотов более 750 в 1 *мин*	0,2
б) с числом оборотов от 500 до 750 в 1 *мин*	0,15
в) с числом оборотов менее 500 в 1 *мин*	0,1
Центрифуги (d — диаметр ротора в *м*, n_0 — число оборотов в 1 *мин*)	$d\left(\frac{n_0}{1000}\right)^2$
Крупные дымососы и вентиляторы	$0{,}6\left(\frac{n_0}{1000}\right)^2$

Для определения частот λ_{x_1} и λ_{ψ_1} можно пользоваться формулами:

$$\lambda_{x_1} = \sqrt{\frac{K_1}{m_ф}}; \qquad (6.68) \qquad\qquad \lambda_{\psi_1} = \sqrt{\frac{K_2}{\theta_{zф}}}, \qquad (6.69)$$

где $m_ф$ — расчетная масса верхней плиты, включающая массу машины, массу всех ригелей и балок и $^1/_3$ массы стоек; $\theta_{zф}$ — момент инерции массы $m_ф$ относительно оси Oz; для упрощения расчетов можно приближенно принимать $\theta_{zф} \cong 0{,}1 m_ф L^2$, где L — длина верхней рамы (в осях крайних ригелей).

Особенности расчета рамных фундаментов на прочность

Расчет элементов конструкции рамных фундаментов производится на прочность при действии нагрузок:

[1] Определение динамических нагрузок, устанавливаемых на перекрытиях, см. раздел 2.

1) постоянных, в число которых входят вес машины (включая вес движущихся частей), вспомогательного оборудования и собственный вес частей фундамента;

2) временных, включающих: а) нагрузки, заменяющие динамическое действие движущихся частей машины и б) особые нагрузки, характерные для машин данного вида, например, соответствующие тяге вакуума в конденсаторе для турбин, возникающие при коротком замыкании электромашин и др.

Кроме того, прочность отдельных элементов верхнего строения (главным образом консольных) проверяется при действии монтажных нагрузок.

Определение постоянных нагрузок не представляет каких-либо особенностей, а временные, отвечающие случаю 2 б, и монтажные нагрузки указываются заводом-изготовителем машин в задании на проектирование. Для определения нагрузок, заменяющих динамическое действие движущихся частей машины (случай 2 а), используется формула

$$P_{дi} = k_1 \eta P_i^{н} , \qquad (6.70)$$

где $P_{дi}$ — временная статическая нагрузка, приложенная к i-му подшипнику, заменяющая динамическое действие машины; $P^{н}$ — нормативная величина динамической нагрузки, действующей на этот подшипник (табл. 6.3); k_1 — коэффициент перегрузки (см. раздел 2); η — коэффициент динамичности (табл. 6.4).

Таблица 6.4

Рекомендуемые значения коэффициента динамичности

Машины	η	
	для вертикальной нагрузки	для горизонтальной нагрузки
Турбоагрегаты	8	0,5
Электромашины и другие машины с вращающимися частями с числом оборотов до 1000 в 1 *мин*	2	По динамическому расчету
Машины с кривошипно-шатунными механизмами и другие низкочастотные неуравновешенные машины	По динамическому расчету	

Пользуясь табл. 6.4, следует иметь в виду, что в расчетах машин с кривошипно-шатунными механизмами коэффициент динамичности должен определяться не только по расчету на установившиеся колебания при нормальной эксплуатации по формулам (6.73)—(6.78), но в случаях, когда $\omega > \lambda_{x_1}$, также и по условию прохождения через резонанс во время пуска и остановки машины.

Общепринятого способа расчета фундаментов по этому условию не существует, хотя имеется немало работ, посвященных изучению явления пускового резонанса [9, 12, 17]. В практических расчетах можно пользоваться следующим приближенным приемом, основанным на результатах работ А. М. Каца [9].

Если рассматривать фундамент как систему с одной степенью свободы, например не учитывать возможности возникновения вращательных колебаний, то для определения коэффициента $\eta_{макс}$ нарастания колебаний при прохождении через резонанс поступают следующим образом. По заданной продолжи-

тельности t_0 остановки машины и найденному ранее значению λ_{x_1} вычисляют параметр $t_0\lambda_{x_1}$ и отношение ω/λ_{x_1}. Далее по графику (рис. 6.7) находят значение $\eta'_{\text{макс}}$. Соответствующую амплитуду резонансных колебаний фундамента определяют по формуле

$$A'_{x_{\text{макс}}} = \frac{P_{x_1}}{K_1}\eta'_{\text{макс}}, \qquad (6.71)$$

где P_{x_1} — амплитуда возмущающей силы, соответствующая моменту прохождения через резонанс: приближенно можно считать, что

$$P_{x_1} \approx P^{\text{н}} \frac{\lambda^2_{x_1}}{\omega^2}. \qquad (6.72)$$

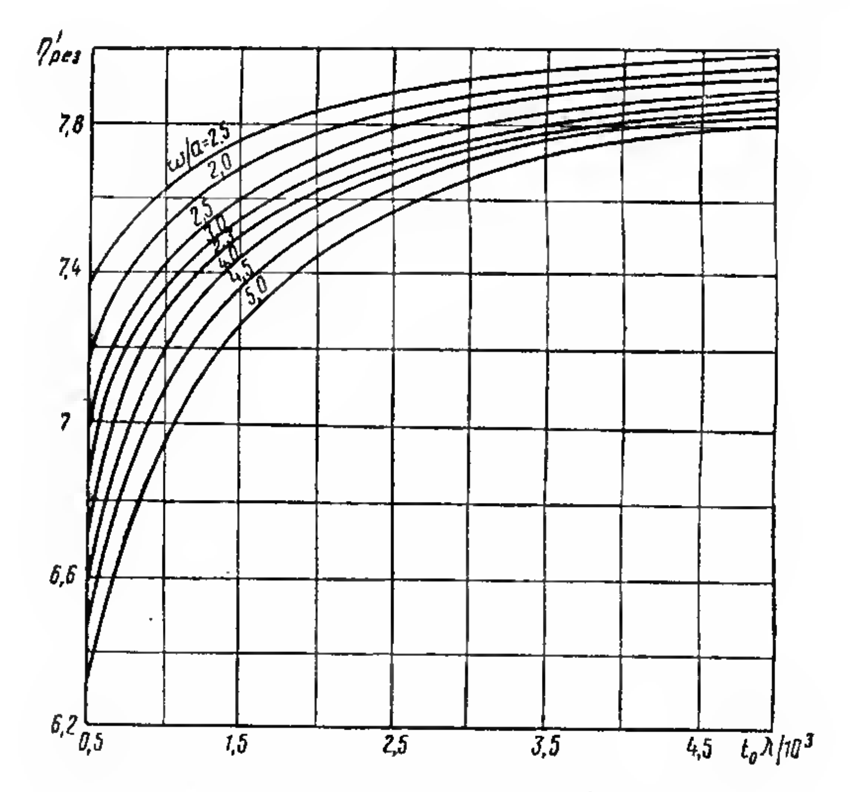


Рис. 6.7. График для определения коэффициента $\eta'_{\text{рез}}$ (при $\eta_{\text{рез}} = 8$)

Это значение P_{x_1} вводится и в формулу (6.70) вместо $P^{\text{н}}$, а $\eta'_{\text{макс}}$ — вместо η.

Аналогично можно поступать и в отношении вращательных колебаний, пользуясь для определения $\eta'_{макс}$ параметром λ_{ψ_i}, отношением ω/λ_{ψ_i} и формулами:

$$A_{\psi_{макс}} = \frac{P_{\psi_i} e_{макс}}{2K_2} \eta'_{макс}; \qquad (6.73) \qquad P_{\psi_i} \approx P^{н} \frac{\lambda^2_{\psi_i}}{\omega^2}. \qquad (6.74)$$

По И. С. Шейнину [12], в тех случаях когда $\lambda_{\psi_i} - \lambda_{x_i} \geqslant 0{,}3\lambda_{\psi_i}$, расчет на пусковой резонанс и оценка прочности конструкции фундамента и примыкающих к нему коммуникаций производятся раздельно на поступательные и вращательные (при $\omega > \lambda_{\psi_i}$) колебания по формулам (6.71) — (6.74). Если же $\lambda_{\psi_i} - \lambda_{x_i} < 0{,}3\lambda_{\psi_i}$, то для каждой из поперечных рам фундамента сначала определяют значения $A_{xi_{макс}}$ и $A_{\psi_{макс}} e_i$, а затем расчетное значение амплитуды по формуле

$$A'_{i\,макс} = \sqrt{\left(A'_{xi\,макс}\right)^2 + \left(A'_{\psi\,макс}\, e_i\right)^2}. \qquad (6.75)$$

6.4. Особые случаи расчета фундаментов

Расчет групповых фундаментов под машины с периодическими нагрузками

В настоящее время не существует общепринятых приемов расчета групповых фундаментов (т. е. фундаментов, на которых устанавливается по несколько различных или однотипных машин). По техническим условиям СН 18-58 взаимное влияние машин, устанавливаемых на одном общем (групповом) фундаменте, предлагается учитывать только при проектировании фундаментов под дробилки, причем рекомендуемый способ учета пригоден только для определенных условий (случай установки одинаковых машин с синхронными двигателями), которые существуют далеко не всегда.

Поскольку в последние годы групповые фундаменты стали широко применяться не только под дробильные машины обогатительной, но также под оборудование химической, электротехнической и других отраслей промышленности, важное значение приобрела разработка надежных методов учета взаимного влияния машин в расчетах групповых фундаментов.

Остановимся на практических рекомендациях по расчету групповых фундаментов для наиболее характерных случаев. Эти рекомендации, основанные на имеющихся опытных данных по эксплуатации групповых установок [15], не учитывают в полной мере особенностей явления самосинхронизации машин [3], вследствие чего должны рассматриваться как временные и в дальнейшем будут уточняться.

1. Установка на групповом фундаменте нескольких разных неуравновешенных машин с периодическими нагрузками.

В этом случае амплитуды определяются раздельно для каждой из машин, а затем полученные амплитуды колебаний в заданных точках и направлениях складываются. При этом максимальную амплитуду колебаний в каждом направлении, вообще говоря, следовало бы вычислять как арифметическую сумму составляющих амплитуд, поскольку при случайных соотношениях частот периодически будут возникать моменты полного совпадения всех составляющих по фазе. Однако при таком подходе остается неясным, как следует выбирать значения $A_д$ для расчета по формуле (6.2), поскольку оно зависит от

частоты колебаний, а в рассматриваемом случае частоты возмущающих сил различны.

Чтобы преодолеть это затруднение, можно воспользоваться приемом приведения наибольшего расчетного значения амплитуды к одной частоте, который состоит в следующем.

Допустим, что на групповой фундамент устанавливается несколько неуравновешенных машин с разными частотами возмущающих сил ω_1, ω_2, ω_3, ..., ω_i. Определив раздельно амплитуды колебаний A_1, A_2, A_3, ..., A_i верхней грани фундамента в нужном направлении, соответствующие каждой из частот, находят значение максимума амплитуды, приведенное к одной из частот, например к частоте ω_1, по формуле

$$A_{\text{пр}}^{(1)} = \sum_{n=1}^{n=i} A_n k_n \sqrt{\frac{\omega_n}{\omega_1}}, \tag{6.76}$$

где k_n — число машин, имеющих данную частоту ω_n. Значение $A_{\text{пр}}^{(1)}$ по формуле (6.2) сравнивается с допускаемым значением $A_{\text{д}}$, соответствующим частоте ω_1.

2. Установка на групповом фундаменте нескольких одинаковых и одинаково ориентированных машин с синхронными электродвигателями.

В этом случае колебания фундамента происходят с одной частотой, равной частоте возмущающих сил машин. Величина амплитуды колебаний существенно зависит от случайного распределения фаз, которое складывается при запуске последних. Для определения расчетного значения амплитуды при таких условиях можно пользоваться приемом, который заключается в том, что амплитуда равнодействующей возмущающих сил всех машин, установленных на данном фундаменте, определяется по формуле

$$[R] = kP^{\text{н}}, \tag{6.77}$$

где k — так называемый коэффициент синфазности.[1]

3. Установка на групповом фундаменте нескольких одинаковых машин с асинхронными двигателями.

Поскольку угловые скорости движения машин с асинхронными двигателями никогда не бывают строго одинаковыми, при размещении на одном групповом фундаменте нескольких одинаковых машин с такими двигателями обычно возникают биения, при которых амплитуды колебаний периодически возрастают до максимума, численно равного арифметической сумме слагаемых амплитуд (вызываемых работой каждой из машин в отдельности). Поэтому в данном случае необходимо исходить из указанного максимума, сравнивая его с допускаемым значением $A_{\text{д}}$, соответствующим частоте возмущающих сил машин.

---

[1] А. Н. Цейтлин, Н. Н. Гусева. Об определении нагрузок на фундаменты при групповой установке неуравновешенных машин с синхронными двигателями. «Основания, фундаменты и механика грунтов», 1972, № 3. См. также О. А. Савинов, Э. И. Часов. Об учете в расчетах на колебания взаимного влияния фундаментов низкочастотных неуравновешенных машин. Сб. тр. ВНИИГС. Стройиздат, 1967.

Взаимное влияние неуравновешенных машин, устанавливаемых на отдельных фундаментах

Научно обоснованных методов учета взаимного влияния фундаментов неуравновешенных машин в настоящее время не существует. Между тем при групповой установке некоторых видов низкочастотных машин с динамическими нагрузками, в частности мощных горизонтальных компрессоров, лесопильных рам и др., пренебрежение этим влиянием может приводить к весьма значительным погрешностям расчета. Для его приближенной оценки необходимо руководствоваться следующими ориентировочными данными, полученными при проведении массовых обследований групповых установок [7, 15].

1. Во всех без исключения известных случаях установки низкочастотных (100—300 *об/мин*) мощных неуравновешенных машин (в первую очередь горизонтальных поршневых компрессоров) на отдельные фундаменты, расположенные на общей площадке (при расстояниях между смежными гранями, не превышающих половины расстояния в осях), их взаимное влияние проявляется вполне отчетливо. Оно заключается в передаче колебаний через грунт от одного фундамента к другому, в результате чего колебания фундаментов могут усиливаться или ослабевать, что следует учитывать в расчетах фундаментов.

2. Наиболее сильное влияние на колебания фундамента, входящего в состав группы таких же фундаментов под одинаковые машины, оказывают соседние машины. Если принять за 100% величину амплитуды колебаний отдельного фундамента, то приращение ее от колебаний соседних фундаментов (при указанных выше расстояниях между ними) в слабых водонасыщенных грунтах можно считать равным 40—50% — одного соседнего фундамента, 60—70% — от двух, 80—90% — от трех и до 100% — от четырех. В слабовлажных грунтах это приращение оказывается в 2—3 раза меньшим, чем в слабых водонасыщенных грунтах.

6.5. Определение динамических характеристик основания

Определение коэффициентов жесткости естественных оснований

Для определения коэффициентов жесткости естественных оснований используются формулы:

$$\left.\begin{aligned} K_z &= C_z F; \\ K_x &= C_x F; \\ K_\varphi &= C_\varphi J; \\ K_\psi &= C_\psi J_z, \end{aligned}\right\} \qquad (6.78)$$

где C_z, C_x — коэффициенты упругого равномерного сжатия и сдвига основания; C_φ, C_ψ — коэффициенты упругого неравномерного сжатия и сдвига основания; F — площадь подошвы фундамента; J — момент инерции этой площади относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести параллельно оси Oy (см. рис. 6.1); J_z — полярный момент инерции площади подошвы.

Величины C_z, C_x, C_φ и C_ψ не являются постоянными и зависят не только от упругих свойств грунта, но также и от ряда других факторов, главнейшие из которых — размеры и форма подошвы фундамента, характер напластований грунтов и их плотность (инерционные свойства). Если в качестве исходной расчетной модели основания принять невесомое упругое полупространство, то для фундаментов с прямоугольной подошвой зависимость коэффициентов C_z, C_x и C_φ от размеров подошвы и характеристик упругости грунта может быть приближенно представлена в виде:

$$C_z = \varkappa_z \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{F}}; \qquad C_\varphi = \chi_\varphi \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{F}};$$

$$C_x = \varkappa_z \frac{E}{(1+\varkappa_x \mu)(1+\mu)} \cdot \frac{1}{\sqrt{F}}. \qquad (6.79)$$

где $\varkappa_z$, $\varkappa_\varphi$, $\varkappa_x$ — коэффициенты, зависящие только от соотношения сторон подошвы $a:b$ (табл. 6.5) $a:b \leqslant 1$ при повороте продольной оси, $a:b > 1$ при повороте поперечной оси; E, μ — модуль упругости грунта и коэффициент Пуассона.

Таблица 6.5

Значения коэффициентов $\varkappa_z$, $\varkappa_\varphi$ (по М. И. Горбунову-Посадову) [6] и $\varkappa_x$ (по О. А. Савинову) [14]

$a:b$	$\varkappa_z$	$\varkappa_\varphi$	$\varkappa_x$
0,2	1,30	2,31	0,53
0,333	1,21	2,36	0,53
0,5	1,17	2,44	0,54
1	1,14	2,83	0,50
1,5	1,15	3,22	0,45
2	1,17	3,54	0,42
3	1,21	4,15	0,37
5	1,30	5,45	0,29

По Д. Д. Баркану [2], между коэффициентами C_ψ и C_x существует простое соотношение: $C_\psi \approx 1{,}5 C_x$.

В действительности коэффициенты C_z, C_φ, C_x и C_ψ с увеличением площади F уменьшаются не так интенсивно, как это следует из зависимостей (6.90) — (6.92). Поэтому последними рекомендуется пользоваться только при $F \leqslant 10$ $м^2$, а при $F > 10$ $м^2$ принимать значения C_z, C_φ и C_x постоянными, соответствующими $F = 10$ $м^2$. Расчетные значения коэффициента C_z для естественных оснований, относящихся к $F > 10$ $м^2$ и рекомендуемые СНиП II-Б.7-70, приводятся ниже:

R, $кгс/см^2$	1	2	3	4	5
C_z, $кгс/см^3$	2	4	5	6	7

(здесь R — расчетное сопротивление грунта основания).

При этом величины C_x и C_φ допускается, независимо от соотношения размеров подошвы, принимать равными: $C_x = 0{,}7 C_z$; $C_\varphi = 2 C_z$.

Для приближенного определения коэффициентов жесткости основания с учетом влияния размеров фундамента и инерции грунта можно пользоваться формулами [14]:

$$\left.\begin{aligned} C_z &= C_0\left[1+\frac{2(a+b)}{\Delta F}\right]\sqrt{\frac{p}{p_0}}\,; \\ C_\varphi &= C_0\left[1+\frac{2(a+3b)}{\Delta F}\right]\sqrt{\frac{p}{p_0}}\,; \\ C_x &= D_0\left[1+\frac{2(a+b)}{\Delta F}\right]\sqrt{\frac{p}{p_0}}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (6.80)$$

где C_0 и D_0 — постоянные упругости основания, не зависящие от размеров фундамента; p — удельное статическое давление, передаваемое проектируемым фундаментам на основание; p_0 — то же, под опытным штампом, использованным для определения коэффициентов C_0 и D_0.

Установлено, что между коэффициентами C_0 и D_0 существует зависимость:

$$D_0 = \frac{1-\mu}{1-0{,}5\mu}\,C_0. \qquad (6.81)$$

В практических расчетах можно принимать $D_0=0{,}7C_0$ и $\Delta=1$ $м^{-1}$. Если известно значение E ($кгс/см^2$) модуля упругости грунта, определенное по результатам лабораторных или полевых динамических испытаний грунта, то по этому значению коэффициент C_0 может быть найден из приближенной зависимости

$$C_0 \approx 2{,}1E\cdot 10^{-3}\ кгс/см^3. \qquad (6.82)$$

Таблица 6.6

Значения коэффициента C_0 при удельном давлении $p_0=0{,}2$ $кгс/см^2$ (по О. А. Савинову [14])

Категория	Характеристика оснований	Грунт	C_0, $кгс/см^3$ (при $p_0=0{,}2$ $кгс/см^2$)
1	Нежесткие	Глины текучепластичные ($B>0{,}75$) Суглинки текучепластичные ($B>0{,}75$)	0,6 0,7
2	Малой жесткости	Суглинки и глины мягкопластичные ($0{,}5<B\leqslant0{,}75$) Супеси пластичные ($0{,}5<B\leqslant1$) Пески пылеватые, водонасыщенные, рыхлые ($\varepsilon>0{,}80$)	0,8 1,0 1,2
3	Средней жесткости	Глины и суглинки тугопластичные ($0{,}25<B\leqslant0{,}5$) Супеси пластичные ($0<B\leqslant0{,}5$) Пески пылеватые средней плотности и плотные ($\varepsilon\leqslant0{,}8$) Пески мелкие, средней крупности и крупные, независимо от плотности и влажности	2,0 1,6 1,4 1,8
4	Жесткие	Глины и суглинки твердые ($B<0$) Супеси твердые ($B<0$) Щебень, гравий, галька, дресва	3,0 2,2 2,6

Численные значения коэффициента C_0 для различных грунтов, рекомендуемые для практических расчетов, приводятся в табл. 6.6.

Формулы (6.80) неприменимы для расчета крупных тяжелых сооружений и фундаментов, передающих на основание статическое давление более 2 *кгс/см*².

Значение модуля затухания Ф в расчетах фундаментов под машины с динамическими нагрузками (в случаях, указанных в пп. 6.2 и 6.3) рекомендуется принимать по табл. 6.7.

Таблица 6.7

Значения модуля Ф (по О. А. Савинову) [14]

Характеристика грунтов	Ф, *сек*
Плотные песчаные грунты, пластичные глины и суглинки, находящиеся в условиях естественного залегания	0,004—0,006
Рыхлые и средней плотности пески, любые насыпные грунты	0,007—0,008

При проектировании крупных промышленных предприятий, в которых намечается установка большого количества машин с динамическими нагрузками, характеристики жесткости основания рекомендуется определять по результатам исследований грунтов; необходимые сведения по методике исследований можно найти в книгах Д. Д. Баркана [2] и О. А. Савинова [14].

Определение коэффициентов жесткости основания для свайных фундаментов

По СНиП II-Б.7-70 коэффициент жесткости свайного основания при упругом равномерном сжатии (для висячих свай) определяется по формуле

$$K_z = uC', \tag{6.83}$$

где u — число свай; C' — коэффициент упругого сопротивления одной сваи в *тс/м*, величину которого рекомендуется определять по формуле

$$C' = \eta S l, \tag{6.84}$$

где S и l — соответственно периметр поперечного сечения и длина сваи в *м*; η — коэффициент, зависящий от характера грунта; ориентировочные значения η (при расстоянии между сваями 4—5d, где d — диаметр или размер поперечного сечения сваи) принимаются равными:

Для пластичных слабых (с нормативным давлением до 1 *кгс·см*²) глин и суглинков	750 *т/м*³
Для мелких пылеватых водонасыщенных песков . . .	1000 »
Для песков (кроме мелких пылеватых водонасыщенных), а также плотных глин, лёссовидных суглинков естественной влажности	2500 »

Коэффициент жесткости K_φ (в *тм*) при неравномерном сжатии основания из висячих свай определяется по формуле

$$K_\varphi = C' \sum_{i=1}^{i=u} r_i^2, \tag{6.85}$$

где r_i — расстояние от оси сваи до оси вращения подошвы фундамента.

Коэффициент жесткости K_x при упругом равномерном сдвиге свайных фундаментов принимается: для деревянных свай — таким же, как и для естественного основания [см. формулу (6.78)]; для железобетонных свай $K_x = 2C_xF$, где F — площадь подошвы свайного ростверка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аграновский Г. Г. Результаты обследования сборных и сборно-монолитных фундаментов под машины. «Промышленное строительство», 1965, № 12.

2. Баркан Д. Д. Динамика оснований и фундаментов. Стройвоенморизлат, 1948.

3. Блехман И. И. О самосинхронизации механических вибраторов. Известия АН СССР, ОТН, 1958, № 7.

4. Бородачев Н. М. Вертикальные колебания кругового штампа на упругом полупространстве. «Строительная механика и расчет сооружений», 1964, № 5.

5. Бородачев Н. М. Вынужденные колебания жестких плит и массивов, лежащих на упругом полупространстве. «Основания, фундаменты и механика грунтов», 1966, № 1.

6. Горбунов-Посадов М. И. Расчет конструкций на упругом основании. Стройиздат, 1953.

7. Забылин М. И. Экспериментальные исследования вибраций фундаментов под компрессоры. Известия вузов. «Строительство и архитектура», 1964, № 5.

8. Инструкция по определению динамических нагрузок от машин. Стройиздат, 1965.

9. Кац А. М. Вынужденные колебания при прохождении через резонанс. «Инженерный сборник» Ин-та механики АН СССР, т. 3, вып. 2, 1947.

10. Кондин А. Д., Клатцо М. М. и др. Рациональные конструкции фундаментов промышленных зданий. Стройиздат, 1963.

11. Кондин А. Д. Влияние сопротивлений на колебания сплошных фундаментов. Труды НИС Треста глубинных работ, вып. 1. Стройиздат, 1940.

12. Коренев Б. Г., Пикулев Н. А., Шейнин И. С. О методах уменьшения вибраций при прохождении через резонанс во время пуска и остановки оборудования. В сб.: «Колебания зданий и сооружений». Госстройиздат, 1963.

13. Лурье А. И. Влияние упругости основания на частоты свободных колебаний турбофундаментов. В сб.: «Вибрация фундаментов рамного типа», ОНТИ, 1933.

13а. Рауш Э. Фундаменты машин. Стройиздат, 1965.

14. Савинов О. А. Современные конструкции фундаментов под машины и их расчет. Стройиздат, 1964.

15. Савинов О. А., Клатцо М. М., Часов Э. И. Особенности расчета фундаментов под неуравновешенные машины при их групповой установке. «Промышленное строительство», 1966, № 4.

16. Фундаменты машин с динамическими нагрузками. Нормы проектирования. СНиП II-Б.7-70. Стройиздат, 1971.

17. Шейнин И. С. О пусковых резонансах в линейных системах. В сб.: «Исследования по динамике сооружений и расчету конструкций на упругом основании», Госстройиздат, 1961.

18. Шехтер О. Я. Об учете инерционных свойств грунтов при расчете вертикальных вынужденных колебаний массивных фундаментов. Труды НИИ оснований. Стройвоенморизлат, 1948.

19. Руководство по проектированию виброизоляции машин и оборудования. Стройиздат, 1972.

20. Arnold R. N., Bycroft Ct. N., Warburton G. B. Forced vibration of a body on an elastic solid. Journal of Applied Mechanics. Transaction of the ASME, vol. 22, № 3, 1955.

21. Major A. Vibration analysis and design of foundations for machines and turbines. London, Collets, 1962.

РАЗДЕЛ 7

КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

(А. М. Сизов)

7.1. Основные положения

Различают три типа колебаний стержней: продольные, поперечные, или колебания изгиба, и крутильные.

При продольных колебаниях сечения стержня колеблются вдоль оси стержня около положения равновесия. При этом элемент стержня то укорачивается, то удлиняется. При поперечных колебаниях сечения стержня смещаются нормально к его оси поочередно по одну и другую сторону от положения равновесия, поворачиваясь вокруг своих нейтральных осей. При крутильных колебаниях сечения стержня поворачиваются вокруг оси стержня попеременно в одну и другую стороны.

Далее рассматриваются поперечные, или изгибные, колебания стержней и стержневых систем. Предполагается, что колебания малы и зависимость между силами и вызываемыми ими перемещениями линейна. Допущение о линейности перемещений практически приемлемо для большинства строительных конструкций, выполненных из упругих материалов, подчиняющихся при малых перемещениях закону Гука.

Для характеристики поведения сооружения при динамическом действии нагрузки большое значение имеет понятие числа степеней свободы, т. е. количества независимых геометрических параметров, определяющих положения всех масс сооружения при колебаниях. По числу степеней свободы расчетные схемы сооружений при динамическом расчете подразделяются на схемы с конечным и бесконечным числом степеней свободы.

Сооружения с дискретным (точечным) распределением масс рассматриваются как системы с конечным числом степеней свободы. Такие расчетные схемы применяются для динамического расчета различных сооружений и конструкций: каркасных зданий, высоких сооружений башенного или мачтового типа, открытых этажерок и технологического оборудования колонного типа, ферм покрытий промышленных сооружений и т. п. Сооружения с непрерывным распределением масс рассматриваются как системы с бесконечным числом степеней свободы.

Реальные конструкции зданий и сооружений (балки, плиты, фермы, рамы и т. п.), как правило, загружены распределенными и сосредоточенными нагрузками. Такие конструкции представляют собой системы с бесконечным числом степеней свободы. Однако в ряде случаев при расчете на динамические воздействия за расчетную схему конструкции можно принять систему с конечным числом степеней свободы. Так, конструкции, загруженные тяжелым сосредоточенным грузом (мощный электродвигатель, вентилятор и т. п.), по сравнению с которым собственный вес конструкции мал, могут рассматриваться как системы с одной степенью свободы.

За расчетную схему конструкции, загруженной несколькими тяжелыми сосредоточенными грузами, может быть принята система с соответствующим числом степеней свободы. Примерами таких конструкций служат легкие кон-

сольные балки с установленными на них мощными вентиляторами или другими установками, балки перекрытий и покрытий, рамы с сосредоточенными грузами, превышающими во много раз их собственный вес, сквозные фермы с сосредоточенными в узлах массами и т. п.

В приближенных динамических расчетах конструкции с распределенными массами часто рассматриваются как системы с конечным числом степеней свободы, поскольку расчет сложных систем в этом случае упрощается, а иногда является единственно практически возможным.

7.2. Системы с одной степенью свободы

Системой с одной степенью свободы называется система, геометрическое состояние которой в пространстве в любое мгновение однозначно определяется одним параметром, а движение системы под действием приложенных к ней сил — изменением этого параметра во времени. Физическая природа и размерность параметра могут быть весьма разнообразными, например этим

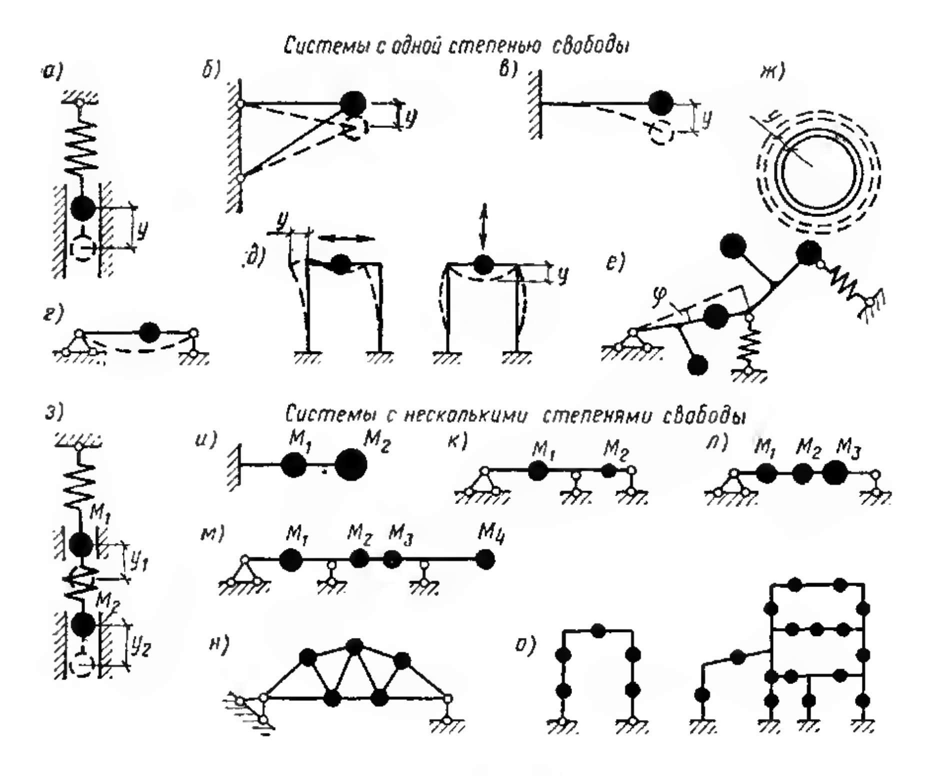


Рис. 7.1. Схемы стержневых систем

а — простейшая система — груз на невесомой пружине; *б—д* — схемы различных инженерных конструкций с одной сосредоточенной массой; *е* — жесткий недеформируемый рычаг с несколькими сосредоточенными массами; *ж* — труба при осесимметричных колебаниях; *з* — простейшая система — два груза на невесомых пружинах; *и—о* — схема различных инженерных конструкций с несколькими сосредоточенными массами

параметром может быть линейное смещение (прогиб), угол поворота и др. Однако этот параметр должен быть таким, чтобы через него можно было однозначно определить положение любой точки системы. На рис. 7.1 показаны примерные схемы систем с одной и несколькими степенями свободы. При этом в качестве параметра, определяющего положение системы на рис. 7.1, *а—д*, служит линейное смещение y сосредоточенной массы M; на рис. 7.1, *е* — угловое смещение φ жесткого недеформируемого рычага; на рис. 7.1, *ж* — радиальное смещение стенок тонкостенной трубы при ее осесимметричных колебаниях.

При динамическом расчете любая инженерная конструкция, загруженная большой сосредоточенной нагрузкой, по сравнению с которой собственный вес конструкции мал и им можно пренебречь, может рассматриваться как система с одной степенью свободы. В практических динамических расчетах как системы с одной степенью свободы в первом приближении часто рассматривают конструкции с распределенной массой, которая заменяется одной эквивалентной массой, сосредоточенной в том или ином сечении конструкции[1].

Эквивалентная сосредоточенная масса для конструкции с распределенной и несколькими сосредоточенными массами может определяться из условия равенства потенциальной энергии деформаций, равенства статических прогибов и других условий. При этом принятые условия эквивалентности масс будут отражаться на степени точности динамического расчета.

Собственные колебания

Если вывести упругую систему из состояния равновесия (отклонив ее от положения равновесия или приложив к ней импульс), а затем предоставить систему самой себе, то она будет совершать свободные или собственные колебания. При отсутствии рассеивания энергии перемещения во времени будут изменяться по гармоническому закону. Число колебаний системы в одну секунду называется частотой собственных колебаний n, а форма колебаний или закон изменения отклонений различных точек системы называется формой собственных колебаний.

Частота собственных колебаний системы является одной из главнейших динамических характеристик системы. При этом у системы с одной степенью свободы может быть только одна частота собственных колебаний, а у системы с несколькими степенями свободы — несколько частот, число которых равно числу степеней свободы системы. Каждой частоте собственных колебаний соответствует своя форма собственных колебаний.

За единицу измерения частоты колебаний принимается герц (*гц*) — одно колебание в секунду.

При динамическом расчете и в теории колебаний часто применяется понятие круговой или циклической частоты θ, которая соответствует числу колебаний за время 2π *сек*:

$$\theta = 2\pi n. \tag{7.1}$$

Единицей измерения круговой частоты служит *рад/сек*, которую часто записывают *сек*$^{-1}$.

---

[1] Такая замена распределенной нагрузки сосредоточенной производится в случае, если нужно определить приближенное значение только основной (низшей) частоты собственных колебаний конструкции, а остальные, более высокие частоты и формы колебаний определять не требуется. Следует иметь в виду, что определением основной частоты собственных колебаний можно ограничиться при частоте вынужденных колебаний, равной или меньшей основной частоты. Если частота вынужденных колебаний больше основной собственной частоты, то определение последующих частот и форм колебаний конструкции, как правило, необходимо.

$$y_{ст} = \frac{25}{n^2}$$

Рис. 7.2. График зависимости частоты собственных колебаний системы с одной степенью свободы от ее статического прогиба при нагрузке, равной Mg

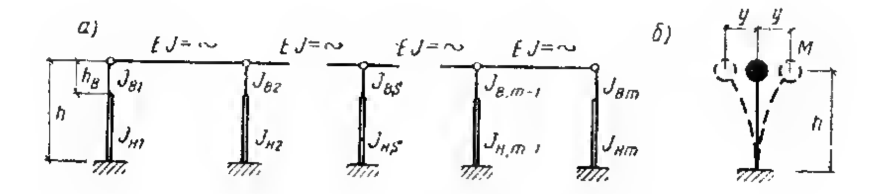


Рис. 7.3. Многопролетная рама

а — схема; *б* — расчетная схема рамы, рассматриваемой при горизонтальных колебаниях как система с одной степенью свободы

Собственные колебания системы без затухания с одной степенью свободы описываются дифференциальным уравнением $M\ddot{y}+Cy=0$. При этом смещение массы M в момент времени t

$$y(t) = y_0 \cos \theta t + \frac{V_0}{\theta} \sin \theta t,$$

а амплитуда колебаний (наибольшее отклонение массы M при колебаниях относительно положения статического равновесия)

$$y_{\text{макс}} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{V_0}{\theta}\right)^2}.$$

Здесь $M=P/g$ — масса системы; P — вес; $g=981$ *см/сек*^{2} — ускорение силы тяжести; y_0 — начальное отклонение массы M от положения равновесия (при $t=0$); V_0 — начальная скорость (при $t=0$); θ — круговая частота собственных колебаний; C — коэффициент жесткости системы численно равный силе, вызывающей перемещение системы $y=1$. Круговая частота собственных колебаний системы с одной степенью свободы без затухания определяется одним из следующих выражений:

$$\theta = \sqrt{\frac{C}{M}} = \sqrt{\frac{Cg}{P}} = \sqrt{\frac{g}{y_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{1}{M\delta_{11}}}. \tag{7.2}$$

Здесь $y_{\text{ст}}$ — статическое перемещение массы M от нагрузки $P=Mg$; δ_{11} — перемещение массы M от единичной силы, приложенной к массе.

Для определения коэффициента жесткости системы следует в соответствующем направлении приложить силу P и затем определить статическое перемещение $y_{\text{ст}}$. Коэффициент жесткости определяется выражением

$$C = \frac{P}{y_{\text{ст}}} = \frac{1}{\delta_{11}}. \tag{7.3}$$

На рис. 7.2 дан график для приближенного определения частот собственных колебаний системы с одной степенью свободы по ее статическому прогибу от нагрузки, равной Mg.

Одноэтажные многопролетные рамы с шарнирно опертыми ригелями и ступенчатыми защемленными стойками (рис. 7.3) при горизонтальных колебаниях в первом приближении могут рассматриваться как системы с одной степенью свободы. Статическое горизонтальное смещение ригеля рамы от горизонтальной силы P, приложенной на уровне ригеля,

$$y_{\text{ст}} = \frac{\eta P h^3}{k_0 E J_{\text{н}1}}. \tag{7.4}$$

Коэффициент жесткости соответствующей простейшей системы

$$C = \frac{k_0 E J_{\text{н}1}}{\eta h^3}; \tag{7.5}$$

здесь P — горизонтальная сила на уровне ригеля, равная нагрузке на ригель, его весу и весу части стоек рамы; h — высота стойки; $J_{\text{н}1}$ — момент инерции поперечного сечения в нижнем сечении левой крайней стойки;

$$k_0 = \frac{3n}{n + (1-n)\lambda^3};$$

$n = J_{в1}/J_{н1}$ — отношение моментов инерции верхнего и нижнего поперечного сечений стойки ступенчатого сечения; $\lambda = h_в/h$ — отношение высот стойки; η — коэффициент, зависящий от числа стоек рамы и их характеристик.

Для одноэтажных рам, высоты и моменты инерции стоек которых одинаковы, $\eta = 1/m$ (m — число стоек). Для рам, высоты всех стоек которых одинаковы, а моменты инерции крайних стоек одинаковы, но не равны одинаковым моментам инерции промежуточных стоек, коэффициент η определяется по табл. 7.1.

Таблица 7.1

Коэффициент η

ν	Число стоек m								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,25	0,500	0,167	0,100	0,071	0,056	0,049	0,039	0,035	0,029
0,50	0,500	0,250	0,167	0,126	0,100	0,089	0,071	0,065	0,056
0,75	0,500	0,300	0,215	0,167	0,136	0,125	0,100	0,090	0,079
1,00	0,500	0,333	0,250	0,200	0,167	0,150	0,125	0,113	0,100
1,50	0,500	0,374	0,300	0,250	0,214	0,195	0,167	0,153	0,136
2,00	0,500	0,400	0,333	0,286	0,250	0,230	0,200	0,183	0,167

При этом

$$\nu = \frac{J_{н1} k_{01}}{J_{нs} k_{0s}}, \tag{7.6}$$

где

$$k_{0s} = \frac{3n_s}{n_s + (1 - n_s)\lambda^3}; \qquad n_s = \frac{J_{вs}}{J_{нs}}.$$

(второй подстрочный индекс при k_0 обозначает номер стойки s).

Частота собственных горизонтальных колебаний рамы определяется по формулам (7.1) и (7.2).

Любая линейно деформируемая система с одной степенью свободы может быть приведена к ее простейшей схеме [41]. При этом приведенная масса будет определяться выражением

$$M_э = \sum_{i=1}^{n_1} m_i \left(\frac{\dot{y}_i}{\dot{y}_k}\right)^2; \tag{7.7}$$

коэффициент жесткости эквивалентной упругой связи (пружины)

$$C_э = \sum_{j=1}^{n_2} C_j \left(\frac{y_j}{y_k}\right)^2 \cos\gamma_j; \tag{7.8}$$

приведенная возмущающая сила

$$P_э(t) = \sum_{p=1}^{n_3} P_p(t) \frac{y_p}{y_k} \cos\gamma_p. \tag{7.9}$$

Здесь m_i — i-я масса заданной системы; $\dot{y}_i$ — скорость массы m_i; C_j — коэффициент жесткости упругой связи в точке j заданной системы; y_j — перемещение в точке j, где прикреплена упругая связь C_j; γ_j — угол между направлением реакции j-й упругой связи C_j и перемещением ее точки прикрепления y_j; $P_p(t)$ — внешняя возмущающая сила, приложенная в точке P; y_p — перемещение в точке приложения силы $P_p(t)$; γ_p — угол между направлением силы $P_p(t)$ и перемещением y_p; $M_э$ — масса эквивалентной системы; $P_э(t)$ — внешняя возмущающая сила в эквивалентной системе.

Эквивалентная масса, реакция упругой связи и приведенная возмущающая сила прикладывается к произвольной точке k, жестко связанной с заданной системой. При этом направление деформации эквивалентной упругой связи в точке k определяется связями заданной системы. В эквивалентной же системе внешняя сила, реакция упругой связи и перемещение массы направлены по одной прямой.

На рис. 7.4 для иллюстрации [41] приведена схема сложной системы жестких стержней с сосредоточенными массами и упругими связями, обладающей одной степенью свободы, а в табл. 7.2 даны результаты определения частот собственных колебаний масс, закрепленных на жестком стержне, вычисленных с использованием (7.7) и (7.8) по формуле

$$n_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C_э}{M_э}}.$$

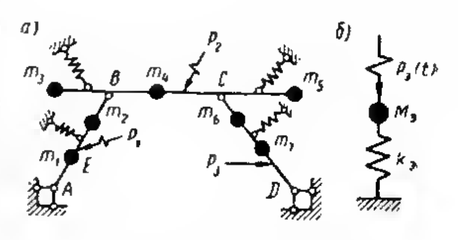


Рис. 7.4. Эквивалентные системы с одной степенью свободы

а — заданная линейно-деформируемая система, состоящая из абсолютно жестких стержней; *б* — эквивалентная система $k_э = C_э$

Таблица 7.2

Частоты собственных колебаний масс, закрепленных на жестком невесомом стержне

Схема	Частота колебаний в *гц*
	$n_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Ca^2}{\sum\limits_1^n m_i a_i^2}}$
	$n_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sum\limits_1^n C_j a_j^2}{ma^2}}$

Таблица 7.3

Коэффициенты жесткости пружин и их соединений (при продольных перемещениях)

Описание	Схема	Коэффициент жесткости C в *кгс/см*
Цилиндрическая винтовая пружина с круглым поперечным сечением витков, работающая на растяжение или сжатие	d, R, P	$C = \frac{Gd^4}{64iR^3}$ R — средний радиус пружины; i — число рабочих витков; d — диаметр проволоки; G — модуль упругости при сдвиге
Коническая винтовая пружина с круглым поперечным сечением витков при $P_{макс} < P_{пос}$; $P_{пос}$ — усилие, при котором часть витков выключается	R_1, P, d, h=const, h, P, R_2	$C = \frac{Gd^4}{16i\left(R_1^2+R_2^2\right)\left(R_1+R_2\right)}$
Плоская система натянутых пружин, присоединенных к одному центру; α_i — наименьший угол, образуемый i-й пружиной с горизонтальной плоскостью при равновесии (до нагружения)	α_1, α_2, α_3, C_1, C_2, C_3, P_x, P_y	$C_x = \sum_1^n C_i \cos^2 \alpha_i;$ $C_y = \sum_1^n C_i \sin^2 \alpha_i$
Параллельное соединение пружин	C_1, C_2, P; C_1, m, C_2	$C = C_1 + C_2;$ $C = \sum_{i=1}^n C_i$
Последовательное соединение пружин	C_1, C_2, m	$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}; \quad C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$ $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$

Описание	Схема	Коэффициент жесткости C в *кгс/см*
Смешанное соединение пружин		$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1+C_2}+\frac{1}{C_3};$$ $$C=\frac{(C_1+C_2)\,C_3}{C_1+C_2+C_3}$$

Таблица 7.4

Коэффициенты жесткости системы, состоящей из невесомой балки и груза на пружине

Схема соединения груза и балки	Коэффициент жесткости C
	$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$; $C=\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}$ C_1 — коэффициент жесткости балки в месте подвеса груза: C_2 — коэффициент жесткости пружины
	$C=C_1+C_2$

Вынужденные колебания

При действии на систему без затухания с одной степенью свободы внешней возмущающей силы, изменяющейся по гармоническому закону $P(t) = P_0 \sin \omega t$, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$M\ddot{y} + Cy = P_0 \sin \omega t.$$

Общее решение этого уравнения

$$y(t) = A \sin(\theta t + \varphi) + \frac{y_{ст}}{1 - \left(\frac{\omega}{\theta}\right)^2} \sin \omega t.$$

При этом первый член решения описывает собственные незатухающие колебания, а второй — вынужденные колебания. При практических расчетах интерес представляет второй член решения, поскольку реальные системы обладают затуханием и поэтому по истечении некоторого времени собственные колебания в системе затухнут и останутся только вынужденные колебания:

$$y(t) = \frac{y_{ст}}{1 - \left(\frac{\omega}{\theta}\right)^2} \sin \omega t. \quad (7.10)$$

Здесь $y_{ст} = P_0/C$ — прогиб системы при статическом действии силы P_0; ω — круговая частота вынужденных колебаний; θ — круговая частота собственных колебаний.

Из (7.10) следует, что при положительном знаменателе ($\omega/\theta < 1$) направление действия гармонической силы $P(t)$ и направление гармонического перемещения $y(t)$ находятся в одной фазе, что с физической точки зрения означает совпадение направления действия силы и перемещения; при отрицательном знаменателе ($\omega/\theta > 1$) направлние силы $P(t)$ и перемещения $y(t)$ находятся в противофазе, т. е. направление действия гармонической силы противоположно называемому ею перемещению.

При совпадении частоты вынужденных колебаний с частотой собственных колебаний, т. е. при $\omega/\theta = 1$ амплитуды вынужденных колебаний неограниченно возрастают — возникает явление, называемое резонансом. Неограниченное возрастание амплитуд колебаний при вычислениях по формуле (7.10) объясняется тем, что поглощение энергии при колебаниях не учитывается. Поэтому в резонансных и околорезонансных режимах [см. формулу (7.29)] амплитуды вынужденных колебаний следует определять с учетом рассеивания энергии. При гармонической возмущающей силе и рассеивании энергии колебаний по теории Е. С. Сорокина [47] амплитуда колебаний определяется по формуле

$$y_{макс} = \frac{y_{ст}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\theta_1}\right)^2\right]^2 + \gamma^2}}. \quad (7.11)$$

Здесь γ — коэффициент неупругого сопротивления материала, связанный с коэффициентом поглощения ψ и логарифмическим декрементом колебаний δ соотношением (см. раздел 3)

$$\gamma = \frac{\psi}{2\pi} = \frac{\delta}{\pi}. \quad (7.12)$$

7.3. Системы с несколькими степенями свободы

Здесь рассматриваются собственные и вынужденные колебания систем с конечным числом степеней свободы применительно к стержневым системам: балкам, стержневым фермам, рамам. При этом предполагается, что каждая масса системы обладает одной степенью свободы. В частности, при рассмотрении поперечных колебаний балок перемещения масс вдоль оси балки не учитываются.

Частоты и формы собственных колебаний

Система с двумя степенями свободы. Простейшим примером системы с двумя степенями свободы может служить невесомая балка с двумя сосредоточенными грузами в пролете. Невесомая П-образная рама с одним грузом, произвольно расположенным на ригеле в случае, если горизонтальные и вертикальные колебания груза рассматриваются совместно, также представляет систему с двумя степенями свободы.

Дифференциальные уравнения собственных колебаний могут быть записаны в виде:

$$\left.\begin{aligned} M_1\,\delta_{11}\,\ddot{y}_1 + M_2\,\delta_{12}\,\ddot{y}_2 + y_1 = 0; \\ M_1\,\delta_{21}\,\ddot{y}_1 + M_2\,\delta_{22}\,\ddot{y}_2 + y_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (7.13)$$

Здесь M_1, M_2 — сосредоточенные массы; δ_{11}, δ_{12} — перемещения 1-й массы от единичной силы, прикладываемой к 1-й и 2-й массам соответственно; δ_{21}, δ_{22} — перемещения 2-й массы от единичной силы, прикладываемой к 1-й и 2-й массам соответственно; y_1, y_2 — перемещения 1-й и 2-й масс системы.

Частоты собственных колебаний системы определяются из квадратного уравнения:

$$M_1 M_2 \left(\delta_{11}\,\delta_{12} - \delta_{12}^2\right) z^2 - \left(M_1\,\delta_{11} + M_2\,\delta_{22}\right) z + 1 = 0, \quad (7.14)$$

где $z = \theta^2$ — квадрат круговой частоты собственных колебаний:

$$\theta_S^2 = \frac{M_1\,\delta_{11} + M_2\,\delta_{22} \pm \sqrt{\left(M_1\,\delta_{11} - M_2\,\delta_{22}\right)^2 + 4M_1 M_2\,\delta_{12}^2}}{2M_1 M_2\left(\delta_{11}\,\delta_{22} - \delta_{12}^2\right)}; \quad (7.15)$$

S — порядковый номер корня уравнений (7.14), (7.18), (7.21), (7.26), соответствующий номеру частоты и формы собственных колебаний.

Для системы с двумя степенями свободы $S = 1$; 2, при этом система имеет две формы собственных колебаний, каждая из которых соответствует определенному значению круговой частоты θ_S.

Ординаты форм собственных колебаний при $X_{1S}^* = 1$ определяются выражениями:

---

* Индексы ординат форм собственных колебаний X_{kS} означают: первый индекс k — порядковый номер массы, для которой определена данная ордината формы собственных колебаний; второй индекс S — порядковый номер формы собственных колебаний. При этом следует иметь в виду, что $X_{kS} \neq X_{Sk}$. Величина X_{kS} представляет собой отно-

$$X_{2S} = -\frac{M_1\delta_{11} - \dfrac{1}{\theta_S^2}}{M_2\delta_{12}}, \text{ или } X_{2S} = -\frac{M_1\delta_{21}}{M_2\delta_{22} - 1/\theta_S^2}. \quad (7.16)$$

Системы с тремя степенями свободы. Дифференциальные уравнения собственных колебаний системы с тремя степенями свободы могут быть записаны в виде:

$$\left.\begin{aligned} M_1\delta_{11}\ddot{y}_1 + M_2\delta_{12}\ddot{y}_2 + M_3\delta_{13}\ddot{y}_3 + y_1 = 0;\\ M_1\delta_{21}\ddot{y}_1 + M_2\delta_{22}\ddot{y}_2 + M_3\delta_{23}\ddot{y}_3 + y_2 = 0;\\ M_1\delta_{31}\ddot{y}_1 + M_2\delta_{32}\ddot{y}_2 + M_3\delta_{33}\ddot{y}_3 + y_3 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (7.17)$$

Здесь приняты обозначения, аналогичные обозначениям в (7.13). Частоты собственных колебаний системы определяются из кубического уравнения

$$A_3z^3 - A_2z^2 + A_1z - A_0 = 0. \quad (7.18)$$

Здесь

$$A_3 = M_1M_2M_3\left[\delta_{11}\left(\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{23}^2\right) - \delta_{12}\left(\delta_{12}\delta_{33} - \delta_{13}\delta_{23}\right) + \delta_{13}\left(\delta_{12}\delta_{23} - \delta_{13}\delta_{22}\right)\right];$$

$$A_2 = M_1M_2\left(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2\right) + M_1M_3\left(\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2\right) + M_2M_3\left(\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{23}^2\right);$$

$$A_1 = M_1\delta_{11} + M_2\delta_{22} + M_3\delta_{33}; \quad A_0 = 1.$$

Относительные ординаты форм собственных колебаний системы при $X_{1S} = 1$ определяются из уравнений:

$$M_1\delta_{11} - \frac{1}{\theta_S^2} + M_2\delta_{12}X_{2S} + M_3\delta_{13}X_{3S} = 0; \quad (7.19)$$

$$M_1\delta_{21} + \left(M_2\delta_{22} - \frac{1}{\theta_S^2}\right)X_{2S} + M_3\delta_{23}X_{3S} = 0.$$

Проверка решения уравнений (7.19) возможна подстановкой найденных значений X_{2S} и X_{3S} в уравнение

$$M_1\delta_{31} + M_2\delta_{32}X_{2S} + \left(M_3\delta_{33} - \frac{1}{\theta_S^2}\right)X_{3S} = 0. \quad (7.20)$$

сительную ординату S-й формы колебаний k-й массы, т. е. $X_{kS} = \dfrac{a_{kS}}{a_{1S}}$, где a_{kS} — перемещение k-й массы по S-й форме собственных колебаний; a_{1S} — перемещение 1-й массы по той же форме. Следовательно, $X_{1S} = 1$.

Система с тремя степенями свободы имеет три формы собственных колебаний, каждая из которых соответствует определенному значению круговой частоты θ_S.

Система с четырьмя степенями свободы. Для получения дифференциальных уравнений собственных колебаний системы с четырьмя степенями свободы необходимо к трем уравнениям для системы с тремя степенями свободы добавить четвертое уравнение колебаний массы M_4, а также в каждое из трех уравнений добавить член $M_4 \delta_{i4} \ddot{y}_4$, которым определяется перемещение i-й массы от инерционной силы четвертой массы.

Частоты собственных колебаний системы с четырьмя степенями свободы определяются из уравнения

$$A_4 z^4 - A_3 z^3 + A_2 z^2 - A_1 z + A_0 = 0. \qquad (7.21)$$

Здесь:

$$A_4 = M_1 M_2 M_3 M_4 \{\delta_{11} [\delta_{22} (\delta_{33} \delta_{44} - \delta_{34}^2) - \delta_{23} (\delta_{23} \delta_{44} - \delta_{24} \delta_{34}) + \delta_{24} (\delta_{23} \delta_{34} - \delta_{24} \delta_{33})] - \delta_{12} [\delta_{12} (\delta_{33} \delta_{44} - \delta_{34}^2) - \delta_{23} (\delta_{13} \delta_{44} - \delta_{14} \delta_{34}) + \delta_{24} (\delta_{13} \delta_{34} - \delta_{14} \delta_{33})] + \delta_{13} [\delta_{12} (\delta_{23} \delta_{44} - \delta_{24} \delta_{34}) - \delta_{22} (\delta_{13} \delta_{44} - \delta_{14} \delta_{34}) + \delta_{24} (\delta_{14} \delta_{23} - \delta_{13} \delta_{24})] - \delta_{14} [\delta_{12} (\delta_{23} \delta_{34} - \delta_{24} \delta_{33}) - \delta_{22} (\delta_{13} \delta_{34} - \delta_{14} \delta_{33}) + \delta_{23} (\delta_{13} \delta_{24} - \delta_{14} \delta_{23})]\};$$

$$A_3 = M_1 M_2 M_3 [\delta_{11} (\delta_{22} \delta_{33} - \delta_{23}^2) - \delta_{12} (\delta_{12} \delta_{33} - \delta_{13} \delta_{23}) + \delta_{13} (\delta_{12} \delta_{23} - \delta_{13} \delta_{22})] + M_1 M_2 M_4 [\delta_{11} (\delta_{22} \delta_{44} - \delta_{24}^2) - \delta_{12} (\delta_{14} \delta_{24} - \delta_{12} \delta_{44}) + \delta_{14} (\delta_{14} \delta_{22} - \delta_{12} \delta_{24})] + M_1 M_3 M_4 [\delta_{11} (\delta_{33} \delta_{44} - \delta_{34}^2) - \delta_{13} (\delta_{13} \delta_{44} - \delta_{14} \delta_{34}) + \delta_{14} (\delta_{13} \delta_{34} - \delta_{14} \delta_{33})] + M_2 M_3 M_4 [\delta_{22} (\delta_{33} \delta_{44} - \delta_{34}^2) - \delta_{23} (\delta_{24} \delta_{34} - \delta_{23} \delta_{44}) + \delta_{24} (\delta_{24} \delta_{33} - \delta_{23} \delta_{34})];$$

$$A_2 = M_1 M_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) + M_1 M_3 (\delta_{11} \delta_{33} - \delta_{13}^2) + M_1 M_4 (\delta_{11} \delta_{44} - \delta_{14}^2) + M_2 M_3 (\delta_{22} \delta_{33} - \delta_{23}^2) + M_2 M_4 (\delta_{22} \delta_{44} - \delta_{24}^2) + M_3 M_4 (\delta_{33} \delta_{44} - \delta_{34}^2);$$

$$A_1 = M_1 \delta_{11} + M_2 \delta_{22} + M_3 \delta_{33} + M_4 \delta_{44}.$$

$$A_0 = 1.$$

Относительные ординаты форм собственных колебаний системы при $X_{1S}=1$ определяются из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &M_1\,\delta_{11}-\frac{1}{\theta_S^2}+M_2\,\delta_{12}X_{2S}+M_3\,\delta_{13}\,X_{3S}+M_4\,\delta_{14}X_{4S}=0;\\ &M_1\,\delta_{21}+\left(M_2\,\delta_{22}-\frac{1}{\theta_S^2}\right)X_{2S}+M_3\,\delta_{23}X_{3S}+M_4\,\delta_{24}\,X_{4S}=0;\\ &M_1\,\delta_{31}+M_2\,\delta_{32}X_{2S}+\left(M_3\,\delta_{33}-\frac{1}{\theta_S^2}\right)X_{3S}+M_4\,\delta_{34}X_{4S}=0.\end{aligned}\right\} \quad (7.22)$$

Систему (7.22) удобно решать с помощью сведения ее к системе треугольного вида [20, 34].

Проверка решения уравнений (7.22) возможна подстановкой найденных значений X_{2S}, X_{3S}, X_{4S} в уравнение

$$M_1\,\delta_{41}+M_2\,\delta_{42}X_{2S}+M_3\,\delta_{43}\,X_{3S}+\left(M_4\,\delta_{44}-\frac{1}{\theta_S^2}\right)X_{4S}=0. \quad (7.23)$$

Система с n степенями свободы. Собственные колебания системы с n степенями свободы без учета затухания описываются системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} M_k\,\delta_{jk}\,\ddot{y}_k+y_j=0, \quad (j=1,2\ldots,k,\ldots,n), \quad (7.24)$$

где M_k — сосредоточенные массы; δ_{jk} — перемещение j-й массы от единичной силы, приложенной к k-й массе; y_k — перемещения масс системы в направлениях, допускаемых связями.

Частоты собственных колебаний системы определяются из условия нетривиального решения уравнений (7.24), т. е. такого решения, при котором не все амплитуды колебаний масс системы одновременно равны нулю:

$$\begin{vmatrix} m_1\,\delta_{11}-\dfrac{1}{M_0\theta^2}\ldots m_k\,\delta_{1k}\ldots m_n\,\delta_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_1\,\delta_{k1}\quad\ldots m_k\,\delta_{kk}-\dfrac{1}{M_0\theta^2}\ldots m_n\delta_{kn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_1\,\delta_{n1}\quad\ldots m_k\,\delta_{nk}\quad\ldots m_n\,\delta_{nn}-\dfrac{1}{M_0\theta^2}\end{vmatrix}=0. \quad (7.25)$$

Здесь $m_k=M_k/M_0$ — некоторые безразмерные коэффициенты, равные отношению сосредоточенных масс к одной из них M_0, принятой за основную.

Левая часть уравнения (7.25) может быть представлена в виде многочлена n-й степени:

$$A_n\,z^n-A_{n-1}\,z^{n-1}+\ldots+(-1)^{n-k}A_k\,z^k+\cdots+$$

$$+(-1)^{n-1} A_1 z + (-1)^n A_0 = 0, \qquad (7.26)$$

где $z = M_0 \theta^2$.

В теории колебаний доказывается, что частотное уравнение n-й степени (7.26) имеет n действительных положительных корней. Следовательно, система с n степенями свободы имеет n частот θ, обозначаемых в дальнейшем $\theta_1, \ldots, \theta_S, \ldots, \theta_n$ и являющихся круговыми частотами собственных колебаний системы.

Каждой частоте собственных колебаний θ_S соответствует определенная S-я форма колебаний, называемая формой собственных колебаний. При этом число форм колебаний равно числу частот собственных колебаний.

Относительные ординаты X_{kS} форм собственных колебаний системы с n степенями свободы определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(m_1 \delta_{11} - \frac{1}{M_0 \theta_S^2}\right) X_{1S} + m_2 \delta_{12} X_{2S} + \ldots + m_k \delta_{1k} X_{kS} + \ldots + \\
&\qquad + m_n \delta_{1n} X_{nS} = 0; \\
&m_1 \delta_{21} X_{1S} + \left(m_2 \delta_{22} - \frac{1}{M_0 \theta_S^2}\right) X_{2S} + \ldots + m_k \delta_{2k} X_{kS} + \ldots + \\
&\qquad + m_n \delta_{2n} X_{nS} = 0; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&m_1 \delta_{n-1,1} X_{1S} + \ldots + m_k \delta_{n-1,k} X_{kS} + \ldots + (m_{n-1} \delta_{n-1,n-1} - \\
&\qquad - \left.\frac{1}{M_0 \theta_S^2}\right) X_{n-1,S} + m_n \delta_{n-1,n} X_{nS} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.27)$$

Для получения S-й формы собственных колебаний в уравнения (7.27) подставляется значение круговой частоты θ_S, определяемой из (7.26). Решение уравнений (7.27) дает значения относительных ординат S-й формы собственных колебаний. При этом следует иметь в виду, что $X_{1S} = 1$.

Проверка решения системы уравнений (7.27) возможна подстановкой найденных значений относительных ординат форм собственных колебаний $X_{2S}, \ldots, X_{nS}$ в уравнение

$$m_1 \delta_{n1} X_{1S} + \ldots + m_k \delta_{nk} X_{kS} + \ldots + \left(m_n \delta_{nn} - \frac{1}{M_0 \theta_S^2}\right) X_{nS} = 0. \qquad (7.28)$$

Вынужденные колебания системы с n степенями свободы

При отсутствии поглощения энергии колебаний. В областях, достаточно удаленных от резонансной, влияние внутреннего поглощения энергии колебаний на амплитуды вынужденных колебаний незначительно[1]. Амплитуды вынужденных колебаний в этих областях обычно можно определять без учета затухания.

---

[1] При практических расчетах строительных конструкций резонансной частотой вынужденных колебаний считается частота ω, удовлетворяющая неравенству

$$(1 - \varepsilon)\, \theta_S \leqslant \omega < (1 + \varepsilon)\, \theta_S, \qquad (7.29)$$

При действии на систему с n степенями свободы динамической нагрузки $P(t)$ дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы отличаются от аналогичных уравнений собственных колебаний (7.24) наличием правой части, зависящей от динамической нагрузки:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{jk}\delta_{kj}\ddot{y}_k + y_j = \delta_{jp} P(t), \quad (j=1, 2, \ldots n). \tag{7.30}$$

Здесь M_k — масса, сосредоточенная в точке k; y_k, y_j — перемещение k-й или j-й массы системы при вынужденных колебаниях; δ_{jp} — перемещение j-й массы в направлении, предоставленном рассматриваемой степенью свободы от единичной силы, приложенной в точке p по направлению действия силы $P(t)$; $P(t)$ — сосредоточенная динамическая нагрузка, приложенная в точке p и изменяющаяся во времени по произвольному закону.

Амплитуды вынужденных колебаний масс системы определяются по формуле

$$y_k = \sum_{S=1}^{n} X_{kS}\,\theta_S\,F_{pS}\int_0^t P(\tau)\sin\theta_S(t-\tau)\,d\tau, \quad (k=1,2,\ldots,n). \tag{7.31}$$

Здесь X_{kS} — относительная ордината S-й формы собственных колебаний k-й массы; θ_S — круговая частота собственных колебаний, соответствующая S-й форме собственных колебаний;

$$F_{pS} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k\,\delta_{kp}\,X_{kS}}{\sum_{k=1}^{n} m_k\,X_{kS}^2} = \frac{m_1\,\delta_{1p}\,X_{1S} + \ldots + m_n\,\delta_{np}\,X_{nS}}{m_1\,X_{1S}^2 + \ldots + m_n\,X_{nS}^2} \tag{7.32}$$

— коэффициент влияния, учитывающий форму собственных колебаний, распределение масс системы и перемещения от сосредоточенной единичной силы, действующей в точке p.

При косинусоидальном изменении динамической нагрузки $P(t) = P\cos\omega t$ перемещения масс системы будут:

$$y_k = P\cos\omega t\sum_{S=1}^{n}\frac{X_{kS}\,F_{pS}}{\rho_S}, \quad (k=1,2,\ldots,n) \tag{7.33}$$

где $\omega = 2\pi n_0$ — круговая частота вынужденных колебаний в *рад/сек*; n_0 — частота вынужденных колебаний в *гц*; $\rho_S = 1 - \left(\frac{\omega}{\theta_S}\right)^2$ — коэффициент, учитывающий соотношение частот вынужденных и собственных колебаний; P — амплитудное значение возмущающей нагрузки; S — порядковый номер формы собственных колебаний.

Обозначив $F_{pS}/\rho_S = \beta_S$, формулы для перемещений при вынужденных колебаниях системы можем записать в виде:

где ε — погрешность определения частот собственных колебаний, обусловленная условностями расчетной схемы, отклонениями жесткостей поперечных сечений, изменчивостью постоянных нагрузок и другими несовершенствами расчета.

По действующим инструкциям для расчета строительных конструкций на динамические нагрузки [18, 20, 22] погрешность ε принимается в пределах от 0,15 до 0,35 в зависимости от вида конструкции.

$$\left.\begin{array}{l}
y_1 = (\beta_1 X_{11} + \dots + \beta_S X_{1S} + \dots + \beta_n X_{1n}) P \cos \omega t; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_k = (\beta_1 X_{k1} + \dots + \beta_S X_{kS} + \dots + \beta_n X_{kn}) P \cos \omega t; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_n = (\beta_1 X_{n1} + \dots + \beta_S X_{nS} + \dots + \beta_n X_{nn}) P \cos \omega t .
\end{array}\right\} \quad (7.34)$$

Из (7.34) следует, что перемещение y_k выражается суммой перемещений, каждое слагаемое которой представляет перемещение k-й массы по соответствующей форме собственных колебаний. При этом коэффициентом β_S учитывается влияние соответствующей формы собственных колебаний на форму вынужденных колебаний. Коэффициент β_S может быть назван динамическим коэффициентом. При отсутствии затухания коэффициентом β_S определяется также знак перемещения соответствующей формы, а следовательно, фаза перемещения. Положительному значению коэффициента β_S соответствует сдвиг фаз между направлением силы и вызываемым ею перемещением, равный нулю, а отрицательному — сдвиг фаз, равный π. Максимальное значение перемещения y_k (7.34) будет при $\cos \omega t = 1$:

$$y_k^{\text{макс}} = P (\beta_1 X_{k1} + \dots + \beta_S X_{kS} + \dots + \beta_n X_{kn}), \quad (7.35)$$

т. е. амплитуда колебаний k-й массы при внерезонансном соотношении частот колебаний системы с n степенями свободы без затухания равна алгебраической сумме амплитуд, соответствующих всем формам собственных колебаний.

При поглощении энергии колебаний. Если при отношениях частот ω/θ_S, близких к резонансным, внутреннее поглощение энергии колебаний не учитывается, то это приводит к преувеличению расчетных амплитуд колебаний, а при резонансе — к их неограниченному возрастанию.

В реальных конструкциях амплитуды вынужденных колебаний при резонансе хотя и увеличиваются, но не безгранично. Ограничение амплитуд колебаний при резонансе конечным значением происходит вследствие рассеивания энергии колебаний в основном за счет внутреннего трения.

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы с n степенями свободы при учете внутреннего поглощения энергии колебаний, по теории Е. С. Сорокина [47, 48], имеют вид:

$$\sum_{k=1}^{n} M_k \delta_{jk} \ddot{y}_k + (1 + i\gamma) y_j = \delta_{jp} P(t),$$

$$(j = 1, \dots, k, \dots n), \quad (7.36)$$

где γ — коэффициент неупругого сопротивления материала (см. раздел 3); $i = \sqrt{-1}$.

При косинусоидальном законе изменения сосредоточенной динамической нагрузки $P(t) = P \cos \omega t$ решения уравнений (7.36) имеют вид:

$$y_k = P \sum_{S=1}^{n} \frac{X_{kS} F_{pS}}{\rho} \cos(\omega t - \nu_S), \qquad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (7.37)$$

где

Формулы для определения амплитуд вынужденных колебаний y_k

№ п/п	Частотная зона	Интервал изменения частот зоны	Амплитуда перемещения y_k
1	Предрезонансная	$n_0 < n_1'$	$y_k = P(\beta_1 X_{k1} + \ldots + \beta_S X_{kS} + \ldots + \beta_n X_{kn})$
2	1-я резонансная	$n_1' \leqslant n_0 \leqslant \leqslant n_1''$	$y_k = P\sqrt{(\beta_1 X_{k1})^2 + (\beta_2 X_{k2} + \ldots + \beta_n X_{kn})^2}$
3	Межрезонансная	$n_1'' < n_0 < < n_2'$	$y_k = P(\beta_1 X_{k1} + \beta_2 X_{k2} + \ldots + \beta_n X_{kn})$
4	2-я резонансная	$n_2' \leqslant n_0 \leqslant \leqslant n_2''$	$y_k = P\sqrt{(\beta_2 X_{k2})^2 + (\beta_1 X_{k1} + \beta_3 X_{k3} + \ldots + \beta_n X_{kn})^2}$
5	Межрезонансная	$n_2'' < n_0 < < n_3'$	$y_k = P(\beta_1 X_{k1} + \beta_2 X_{k2} + \beta_3 X_{k3} + \ldots + \beta_n X_{kn})$
6	3-я резонансная	$n_3' \leqslant n_0 \leqslant \leqslant n_3''$	$y_k = P\sqrt{(\beta_3 X_{k3})^2 + (\beta_1 X_{k1} + \beta_2 X_{k2} + \beta_4 X_{k4} + \ldots + \beta_n X_{kn})^2}$
7	Межрезонансная	$n_3'' < n_0 < < n_4'$	$y_k = P(\beta_1 X_{k1} + \beta_2 X_{k2} + \beta_3 X_{k3} + \beta_4 X_{k4} + \ldots + \beta_n X_{kn})$
. .			. . . .

Таблица 7.5

системы с n степенями свободы

Коэффициент β
$\beta_1=\dfrac{F_{p1}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{n_0}{n'_1}\right)^2\right]^2+\gamma^2}}$; $\beta_2=\dfrac{F_{p2}}{1-\left(\frac{n_0}{n'_2}\right)^2}$;...; $\beta_S=\dfrac{F_{pS}}{1-\left(\frac{n_0}{n'_S}\right)^2}$;...
$\beta_1=\dfrac{F_{p1}}{\gamma}$; $\beta_2=\dfrac{F_{p2}}{1-\left(\frac{n_0}{n'_2}\right)^2}$; $\beta_3=\dfrac{F_{p3}}{1-\left(\frac{n_0}{n'_3}\right)^2}$;...
$\beta_1=\dfrac{F_{p1}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{n_0}{n''_1}\right)^2\right]^2+\gamma^2}}$; $\beta_2=\dfrac{F_{p2}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{n_0}{n'_2}\right)^2\right]^2+\gamma^2}}$; $\beta_3=\dfrac{F_{p3}}{1-\left(\frac{n_0}{n'_3}\right)^2}$;...
$\beta_1=\dfrac{F_{p1}}{1-\left(\frac{n_0}{n''_1}\right)^2}$; $\beta_2=\dfrac{F_{p2}}{\gamma}$; $\beta_3=\dfrac{F_{p3}}{1-\left(\frac{n_0}{n'_3}\right)^2}$;...
$\beta_1=\dfrac{F_{p1}}{1-\left(\frac{n_0}{n''_1}\right)^2}$; $\beta_2=\dfrac{F_{p2}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{n_0}{n'_2}\right)^2\right]^2+\gamma^2}}$; $\beta_3=\dfrac{F_{p3}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{n_0}{n'_3}\right)^2\right]^2+\gamma^2}}$; $\beta_4=\dfrac{F_{p4}}{1-\left(\frac{n_0}{n'_4}\right)^2}$;...
$\beta_1=\dfrac{F_{p1}}{1-\left(\frac{n_0}{n''_1}\right)^2}$; $\beta_2=\dfrac{F_{p2}}{1-\left(\frac{n_0}{n''_2}\right)^2}$; $\beta_3=\dfrac{F_{p3}}{\gamma}$; $\beta_4=\dfrac{F_{p4}}{1-\left(\frac{n_0}{n'_4}\right)^2}$;...
...; $\beta_2=\dfrac{F_{p2}}{1-\left(\frac{n_0}{n''_2}\right)^2}$; $\beta_3=\dfrac{F_{p3}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{n_0}{n''_3}\right)^2\right]^2+\gamma^2}}$; $\beta_4=\dfrac{F_{p4}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{n_0}{n'_4}\right)^2\right]^2+\gamma^2}}$; $\beta_5=\dfrac{F_{p5}}{1-\left(\frac{n_0}{n'_5}\right)^2}$;...
. . . .

№ п/п	Частотная зона	Интервал изменения частот зоны	Амплитуда перемещения y_k
	Межрезонансная	$n''_{r-1} < n_0 < n'_r$	$y_k = P \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_{ki}$
	r-я резонансная	$n'_r \leqslant n_0 \leqslant n''_r$	$y_k = P\sqrt{(\beta_r X_{kr})^2 + \left(\sum_{i=1}^{i=n} \beta_i X_{ki}\right)^2}$ при $i \neq r$

Примечания: 1. При $0{,}85 \leqslant n_0/n_S \leqslant 1{,}15$ коэффициент β_S рекомендуется определять

2. Обозначения: P — амплитуда возмущающей гармонической нагрузки; X_{k1}, X_{k2} F_{p1}, $F_{p2}, \ldots, F_{pS}, \ldots$ — коэффициенты влияния, учитывающие формы собственных колеба ся по формуле (7.32)]; n_0 — частота вынужденных колебаний; n'_1, $n''_1, \ldots, n'_S$, $n''_S, \ldots$ — ственных колебаний (см. сноску на стр. 163 и 164).

3. При определении коэффициента β_S по формуле п. 1 примечаний в знаменателе

где $\nu_S = \operatorname{arctg} \dfrac{\gamma}{1 - \dfrac{\omega^2}{\theta_S^2}}$ — угол сдвига фазы между силой и перемещением по S-й форме колебаний;

$$\rho_S = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\theta_S}\right)^2\right]^2 + \gamma^2}.$$

Остальные обозначения даны выше.

Обозначая $F_{pS}/\rho_S = \beta_S$, формулу (7.37) можно записать в развернутом виде:

$$y_k = P\left[\beta_1 X_{k1} \cos(\omega t - \nu_1) + \ldots + \beta_S X_{kS} \cos(\omega t - \nu_S) + \right.$$
$$\left. + \ldots + \beta_n X_{kn} \cos(\omega t - \nu_n)\right]. \qquad (7.38)$$

Перемещения y_k определятся как сумма гармонических составляющих, соответствующих формам собственных колебаний. В областях, близких к резонансу по S-й форме, коэффициент β_S сильно возрастает, так как $\omega/\theta_S \to 1$, и форма вынужденных колебаний в этом случае становится близкой к S-й форме собственных колебаний. В этих областях влияние резонансной формы собственных колебаний на амплитуды вынужденных колебаний является преобладающим. Однако роль перемещений по другим формам колебаний часто также остается существенной. Максимальное значение y_k при заданном

Коэффициент β
$\ldots\beta_{r-2}=\dfrac{F_{p,\,r-2}}{1-\left(\dfrac{n_0}{n''_{r-2}}\right)^2};\quad \beta_{r-1}=\dfrac{F_{p,\,r-1}}{\sqrt{\left[1-\left(\dfrac{n_0}{n''_{r-1}}\right)^2\right]^2+\gamma^2}};$ $\beta_r=\dfrac{F_{pr}}{\sqrt{\left[1-\left(\dfrac{n_0}{n'_r}\right)^2\right]^2+\gamma^2}};\quad \beta_{r+1}=\dfrac{F_{p,\,r+1}}{1-\left(\dfrac{n_0}{n'_{r+1}}\right)^2}\ldots$
$\ldots\beta_{r-2}=\dfrac{F_{p,\,r-2}}{1-\left(\dfrac{n_0}{n''_{r-2}}\right)^2};\quad \beta_{r-1}=\dfrac{F_{p,\,r-1}}{1-\left(\dfrac{n_0}{n''_{r-1}}\right)^2};\quad \beta_r=\dfrac{F_{pr}}{\gamma};\quad \beta_{r+1}=\dfrac{F_{p,\,r+1}}{1-\left(\dfrac{n_0}{n'_{r+1}}\right)^2};\ldots$

с учетом затухания по формуле $\beta_S=\dfrac{F_{pS}}{\sqrt{\left[1-\left(\dfrac{n_0}{n_S}\right)^2\right]^2+\gamma^2}}$.

…, X_{kS}, … — ординаты 1-й, 2-й, …, S-й форм собственных колебаний для k-й массы; ний, распределение масс и перемещения от сосредоточенной силы в точке p [определяют- границы частотных зон, определенных с учетом погрешности определения частот соб- перед корнем принимается знак выражения $1-(n_0/n_S)^2$.

отношении частот ω/θ_S зависит от соотношений между углами сдвига фаз ν_1, …, ν_S, …, ν_n.

Максимальное значение перемещения k-й массы в рассматриваемом направлении определяется выражением

$$y_k^{\text{макс}}=P\sqrt{U_k^2+W_k^2}. \tag{7.39}$$

При этом

$$U_k=\sum_{S=1}^{n}\beta_S X_{kS}\cos\nu_S;\qquad W_k=\sum_{S=1}^{n}\beta_S X_{kS}\sin\nu_S. \tag{7.40}$$

О приближенном определении амплитуд вынужденных колебаний при резонансе. Как хорошо известно из теории колебаний [3, 6, 28, 47], угол сдвига фазы ν_S между возмущающей силой и вызываемым ею перемещением равен:

а) при дорезонансных [см. формулу (7.29)] соотношениях частот $\omega/\theta_S<1-\varepsilon$ близок к 0;

б) при резонансных соотношениях $1-\varepsilon\leqslant\omega/\theta_S\leqslant1+\varepsilon$ равен $\pi/2$;

в) при зарезонансных соотношениях $\omega/\theta_S>1+\varepsilon$ близок к π.

Учитывая эти закономерности изменения угла сдвига фазы ν_S, амплитуды вынужденных колебаний при резонансных соотношениях частот, с достаточной при технических расчетах точностью, можно определять в предположении, что для всех дорезонансных форм собственных колебаний $\nu_S=0$, резонансных $\nu_S=\pi/2$ и зарезонансных $\nu_S=\pi$.

В этом случае формула (7.38) для вычисления перемещения k-й массы при резонансе по r форме собственных колебаний примет вид:

$$y_k = P\sqrt{a_{kS}^2 + A_{kr}^2}\,\sin(\omega t + \lambda_k). \qquad (7.41)$$

Максимальное значение перемещения k-й массы

$$y_k^{\text{макс}} = P\sqrt{a_{kS}^2 + A_{kr}^2}, \qquad (7.42)$$

т. е. амплитуда колебаний k-й массы при резонансном отношении частот колебаний равна геометрической сумме амплитуды по резонансной форме колебаний и суммарной амплитуды внерезонансных форм колебаний. При этом суммарная амплитуда внерезонансных форм колебаний равна алгебраической сумме амплитуд составляющих по формам собственных колебаний (исключая амплитуду резонансной формы). Здесь: $a_{kS}=\sum\limits_{S=1}^{n}\beta_S X_{kS}$ (при $S\neq r$) — алгебраическая сумма внерезонансных форм колебаний; $A_{kr}=\beta_r X_{kr}$ — амплитуда резонансной формы колебаний.

Указанный приближенный способ вычисления амплитуд колебаний может привести в некоторых случаях на небольшом участке внерезонансных областей, примыкающем к резонансным областям, к превышению амплитудой внерезонансных колебаний (7.35) амплитуды резонансных колебаний, определенной по (7.42), однако это превышение не выходит за пределы точности инженерных расчетов.

В табл. 7.5 приводятся развернутые формулы для определения амплитуд вынужденных колебаний системы с n степенями свободы, основанные на упрощении зависимости сдвига фаз от соотношения частот собственных и вынужденных колебаний.

7.4. Поперечные колебания балок с распределенной массой

Рассматриваются поперечные колебания балок с распределенной массой, расчетные схемы которых принимаются в виде систем с бесконечным числом степеней свободы.

Система с бесконечным числом степеней свободы лучше отражает действительные условия колебаний реальных балок, загруженных распределенными и небольшими по сравнению с распределенными сосредоточенными нагрузками.

Однако при некоторой и часто вполне достаточной схематизации явлений, возникающих при колебаниях конструкций с распределенными массами, последние могут рассчитываться как системы с конечным числом степеней свободы по формулам предыдущих глав.

Собственные поперечные колебания балки постоянного сечения, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой $q=mg$, описываются без учета рассеивания энергии колебаний (затухания) [1] уравнением

[1] В связи с тем что рассеивание энергии колебаний на частоты и формы собственных колебаний строительных конструкций влияет незначительно, затуханием при их вычислении обычно пренебрегают.

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0. \qquad (7.43)$$

Здесь E — модуль упругости; J — момент инерции поперечного сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести поперечного сечения перпендикулярно плоскости колебаний; $m=q/g$ — масса на единицу длины балки; q — равномерно распределенная нагрузка (собственный вес и т. п.) на единицу длины балки; g — ускорение силы тяжести; x — расстояние вдоль оси балки от начала координат, которое обычно принимается на левом конце, до рассматриваемого поперечного сечения $y(x, t)$ — поперечное смещение центра тяжести сечения балки от положения его статического равновесия; t — время.

Решение (7.43) можно представить в форме Фурье $y(x, t)=X(x)\,.\,T(t)$, что приводит к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^4X}{dx^4}-\frac{m\theta^2}{EJ}X=0; \qquad (7.44)$$

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\theta^2T=0. \qquad (7.45)$$

Решением уравнения (7.44) является функция

$$X(x)=A\sin\lambda x+B\cos\lambda x+C\,\mathrm{sh}\,\lambda x+D\,\mathrm{ch}\,\lambda x, \qquad (7.46)$$

которая определяет форму изгибных колебаний балки по ее длине, а решение уравнения (7.45) имеет вид:

$$T(t)=C_1\sin\theta t+C_2\cos\theta t \qquad (7.47)$$

и характеризует изменение формы колебаний во времени.

Здесь $\lambda=\sqrt[4]{\frac{m\theta^2}{EJ}}$ — характеристическое число; θ — круговая частота собственных поперечных колебаний балки (*рад/сек*); C_1, C_2 — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями (начальными отклонением и скоростью); A, B, C, D — произвольные постоянные, определяемые условиями на опорах балки (граничными условиями).

Колебания балки постоянного сечения, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, при действии постоянной сжимающей продольной силы N. Уравнение колебаний имеет вид:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+N\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0. \qquad (7.48)$$

Форма изгибных колебаний балки по ее длине определяется решением уравнения

$$\frac{d^4X}{dx^4}+\alpha^2\frac{d^2X}{dx^2}-\lambda^4X=0, \qquad (7.49)$$

а именно

$$X(x)=C_1\sin S_1x+C_2\cos S_1x+C_3\,\mathrm{sh}\,S_2x+C_4\,\mathrm{ch}\,S_2x, \qquad (7.50$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 = \frac{N}{EJ}\ ; \quad S_1 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + \lambda^4}}; \\ S_2 = \sqrt{-\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + \lambda^4}}\ . \end{aligned}\right\} \tag{7.51}$$

Изменение формы колебаний во времени определяется формулой (7.47). При растягивающей силе N знак перед второй производной по x в уравнениях (7.48) и (7.49) меняется на обратный.

При нагружении балки продольными силами частóты и формы ее собственных колебаний изменяются. Сжимающие силы уменьшают частоту собственных колебаний, а растягивающие увеличивают ее (см. табл. 7.10).

Колебания балки с учетом инерции вращения поперечных сечений. Уравнение колебаний имеет вид:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - m\rho^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = 0, \tag{7.52}$$

где $\rho = \sqrt{\frac{J}{F}}$ — радиус инерции поперечного сечения балки; F — площадь поперечного сечения.

Форма изгибных колебаний балки по ее длине определяется решением уравнения (7.49), т. е. формулой (7.50), в которой $\alpha^2 = \rho^2\lambda^4$, а значения S_1 и S_2 определяются по (7.51).

Колебания балки с учетом влияния сдвига (поперечных сил). Уравнение изгибно-сдвиговых колебаний балки постоянного сечения имеет вид:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - m\rho^2\frac{E}{kG}\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = 0, \tag{7.53}$$

где G — модуль упругости при сдвиге; k — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения (для прямоугольного поперечного сечения $k = 2/3$).

Форма изгибно-сдвиговых поперечных колебаний балки определяется решением уравнения (7.49) при $\alpha^2 = \lambda^4\rho^2\frac{E}{kG}$.

Колебания балки с учетом совместного влияния инерции вращения поперечных сечений относительно главных осей сечения и сдвига описываются дифференциальным уравнением

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - m\rho^2\left(1 + \frac{E}{kG}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + m\rho^2\frac{m}{kGF}\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0. \tag{7.54}$$

Форма изгибно-сдвиговых поперечных колебаний балки с учетом инерции вращения сечений и сдвига определяется решением уравнения

$$\frac{d^4 X}{dx^4} + \lambda^4\rho^2\left(1 + \frac{E}{kG}\right)\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^4\left(1 - \lambda^4\rho^4\frac{E}{kG}\right)X = 0, \tag{7.55}$$

имеющим вид (7.50) при

$$S_1 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + \beta^4}};\quad S_2 = \sqrt{-\frac{\alpha^2}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + \beta^4}}\ ;$$

Таблица 7.6

Граничные условия на концах стержня и условия сопряжения в сечениях и на промежуточных опорах [38]

№ п/п	Опирание конца балки или сопряжение смежных участков: наименование	Опирание конца балки или сопряжение смежных участков: схема	Граничные условия или условия сопряжения
1.	Шарнирно-опертый		$X = X'' = 0$
2.	Жестко заделанный		$X = X' = 0$
3.	Свободный		$X'' = X''' = 0$
4.	Не может поворачиваться, в остальном свободен		$X' = X''' = 0$
5.	Упруго-опертый (коэффициент жесткости опоры c)		$X'' = 0;\ EJX''' = cX$
			$X'' = 0;\ EJX''' = -cX$
6.	Точечная масса m_1 на свободном конце		$X'' = 0;\ m_1 \theta^2 X = -EJX'''$
			$X'' = 0;\ m_1 \theta^2 X = EJX'''$
7.	Элемент, обладающий моментом инерции J_m, массы m на шарнирно-опертом или свободном конце		$EJX''(0) = J_m \theta^2 X'(0)$
			$EJX'''(0) = m\theta^2 X(0)$

№ п/п	Опирание конца балки или сопряжение смежных участков		Граничные условия или условия сопряжения
	наименование	схема	
8.	Промежуточная опора (R — опорная реакция)	Лев. Пр.	$X_{лев} = X_{пр} = 0$; $X'_{лев} = X'_{пр}$; $(EJX'')_{лев} = (EJX'')_{пр}$; $(EJX''')_{лев} = (EJX''')_{пр} - R$
9.	Промежуточная упругая опора (c — коэффициент жесткости)	Лев. Пр. c	$X_{лев} = X_{пр}$; $X'_{лев} = X'_{пр}$; $(EJX'')_{лев} = (EJX'')_{пр}$; $(EJX''')_{лев} = (EJX''')_{пр} + cX$
10.	Ступенчатое изменение поперечного сечения		$X_{лев} = X_{пр}$; $X'_{лев} = X'_{пр}$; $(EJX'')_{лев} = (EJX'')_{пр}$; $(EJX''')_{лев} = (EJX''')_{пр}$
11.	Сосредоточенная масса	m	$X_{лев} = X_{пр}$; $X'_{лев} = X'_{пр}$; $(EJX'')_{лев} = (EJX'')_{пр}$; $(EJX''')_{лев} = (EJX''')_{пр} - m\theta^2 X$
12.	Сосредоточенная масса с моментом инерции J_m	m, J_m	$X_{лев} = X_{пр}$; $X'_{лев} = X'_{пр}$; $(EJX'')_{лев} = (EJX'')_{пр} + J_m \theta^2 X'_{пр}$; $(EJX''')_{лев} = (EJX''')_{пр} - m\theta^2 X_{пр}$

$$\alpha^2 = \lambda^4 \rho^2 \left(1 + \frac{E}{kG}\right); \quad \beta^4 = \lambda^4 \left(1 - \lambda^4 \rho^4 \frac{E}{kG}\right). \qquad (7.56)$$

Колебания балки переменного сечения описываются уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] + m(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \qquad (7.57)$$

где $J(x)$ — момент инерции поперечного сечения балки, изменяющийся вдоль длины балки; $m(x)$ — погонная масса балки, изменяющаяся по ее длине.

Форма изгибных колебаний балки определяется решением уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EJ(x)\frac{d^2 X(x)}{dx^2}\right] - \theta^2 m(x) X(x) = 0, \qquad (7.58)$$

где θ — круговая частота собственных поперечных колебаний.

Для случаев, когда балка имеет форму клина или конуса, возможно точное решение уравнения (7.58) в бесселевых функциях [26].

Обычно задача о колебаниях балки переменного сечения решается приближенными методами [1, 3].

Точный метод определения частот собственных колебаний однопролетных балок

Общее решение дифференциального уравнения собственных поперечных колебаний балки, описывающего формы колебаний (7.44), (7.49), (7.55), содержит четыре произвольные постоянные A, B, C, D, которые должны быть подобраны так, чтобы для функции $X(x)$ удовлетворялись условия на концах балки, так называемые «граничные» или «краевые» условия («кинематические», определяемые смещениями или углами поворота, и «силовые», определяемые усилиями).

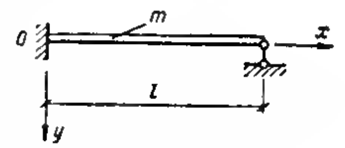


Рис. 7.5. Схема однопролетной балки с левой жестко защемленной и правой шарнирно подвижной опорами

Для однопролетных балок число граничных условий равно числу произвольных постоянных: по два на каждом конце балки (табл. 7.6).

Например, для балки с левым ($x=0$) жестко заделанным и правым ($x=l$) шарнирно опертым концами (рис. 7.5) граничные условия имеют вид (табл. 7.6).

$$X(0) = X'(0) = 0; \quad X(l) = X''(l) = 0.$$

Подстановка заданных граничных условий в решение (7.46) дает для определения произвольных постоянных четыре уравнения

$$\left.\begin{aligned} B + D &= 0; \\ A + C &= 0; \\ A\sin\lambda l + B\cos\lambda l + C\,\mathrm{sh}\,\lambda l + D\,\mathrm{ch}\,\lambda l &= 0; \\ -A\sin\lambda l - B\cos\lambda l + C\,\mathrm{sh}\,\lambda l + D\,\mathrm{ch}\,\lambda l &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Характеристики собственных колебаний однопролетных балок

Схема балки. Частотное уравнение. Коэффициент балочной функции σ_S	Граничные условия	№ формы собственных колебаний S	Корни частотного		
			$\alpha_S=\lambda_S l$	α_S^2	α_S^3
1	2	3	4	5	6
1) Оперт—оперт $\sin\lambda_S l=0$	$X_S(0)=0$ $X''_S(0)=0$ $X_S(l)=0$ $X''_S(l)=0$	1	3,14159	9,8696	31,0063
		2	6,28318	39,4784	248,0502
		3	9,42478	88,8264	837,1693
		4	12,56637	157,9137	1984,4014
		5	15,70796	246,7401	38757,84
		>5	$S\pi$	$S^2\pi^2$	$S^3\pi^3$
2) Защемлен—защемлен $\cos\lambda_S l\cdot\mathrm{ch}\,\lambda_S l-1=0$; $\sigma_S=\dfrac{\mathrm{ch}\,\lambda_S l-\cos\lambda_S l}{\mathrm{sh}\,\lambda_S l-\sin\lambda_S l}$	$X_S(0)=0$ $X'_S(0)=0$ $X_S(l)=0$ $X'_S(l)=0$	1	4,73004	22,3733	105,827
		2	7,8532	61,6728	484,329
		3	10,9956	120,903	1329,41
		4	14,1372	199,859	2825,45
		5	17,2788	298,556	5158,67
		>5	$(2S+1)\dfrac{\pi}{2}$	$(2S+1)^2\dfrac{\pi^2}{4}$	$(2S+1)^3\dfrac{\pi^3}{8}$
3) Свободен—свободен	$X''_S(0)=0$ $X'''_S(0)=0$ $X''_S(l)=0$ $X'''_S(l)=0$	По случаю 2			

(частотные уравнения и их корни, формы колебаний)

уравнения	Форма собственных колебаний (балочная функция) и ее производные	Численное значение коэффициента балочной функции σ_S	Отношение частот	
α_S^4			$\frac{\theta_S}{\theta_1}=\frac{\alpha_S^2}{\alpha_1^2}$	$\frac{\theta_S^2}{\theta_1^2}=\frac{\alpha_S^4}{\alpha_1^4}$
7	8	9	10	11
97,409	$X_S(x)=\sin\lambda_S x=\sin\frac{S\pi x}{l}$;	—	1	1
1558,545	$\lambda_S=\frac{S\pi}{l}$; $\frac{1}{\lambda_S}\cdot\frac{dX_S}{dx}=\cos\lambda_S x$;	—	4	16
7890,134		—	9	81
24936,719	$\frac{1}{\lambda_S^2}\cdot\frac{d^2X_S}{dx^2}=-\sin\lambda_S x$;	—	16	256
60880,662		—	25	625
$S^4\pi^4$	$\frac{1}{\lambda^3}\cdot\frac{d^3x_S}{dx^3}=-\cos\lambda_S x$		S^2	S^4
	$X_S(x)=\Phi_S(x)=\operatorname{ch}\lambda_S x-\cos\lambda_S x-\sigma_S(\operatorname{sh}\lambda_S x-\sin\lambda_S x)$;			
500,564	$\frac{1}{\lambda_S}\cdot\frac{dX_S}{dx}=\Phi'_S=\operatorname{sh}\lambda_S x+$	0,982502	1	1
3803,54	$+\sin\lambda_S x-\sigma_S(\operatorname{ch}\lambda_S x-\cos\lambda_S x)$;	1,000777	2,75654	7,5985
14617,6		0,999966	5,40392	29,2023
39943,8	$\frac{1}{\lambda_S^2}\cdot\frac{d^2X_S}{dx^2}=\Phi''_S=\operatorname{ch}\lambda_S x+$	1,000001	8,93295	79,7976
89135,4	$+\cos\lambda_S x-\sigma_S(\operatorname{sh}\lambda_S x+\sin\lambda_S x)$;	1	13,3443	178,07
$(2S+1)^4\frac{\pi^4}{16}$	$\frac{1}{\lambda_S^3}\cdot\frac{d^3X_S}{dx^3}=\Phi'''_S=\operatorname{sh}\lambda_S x-\sin\lambda_S x-\sigma_S(\operatorname{ch}\lambda_S x+\cos\lambda_S x)$	1	$0,11029(2S+1)^2$	$0,012164(2S+1)^4$
По случаю 2	$X_S(x)=\Phi_S$ (свободен—свободен) $=\Phi''_S$ (защемлен—защемлен) $\frac{1}{\lambda_S}\cdot\frac{dX_S}{dx}=\Phi'_S$ (свободен—свободен) $=\Phi'''_S$ (защемлен—защемлен) $\frac{1}{\lambda_S^2}\cdot\frac{d^2X_S}{dx^2}=\Phi''_S$ (свободен—свободен) $=\Phi_S$ (защемлен—защемлен) $\frac{1}{\lambda_S^3}\cdot\frac{d^3X_S}{dx^3}=\Phi'''_S$ (свободен—свободен) $=\Phi'_S$ (защемлен—защемлен)		По случаю 2	

Схема балки. Частотное уравнение. Коэффициент балочной функции σ_S	Граничные условия	№ формы собственных колебаний S	Корни частотного		
			$\alpha_S=\lambda_S l$	α_S^2	α_S^3
1	2	3	4	5	6
4) Защемлен—свободен $\cos\lambda_S l\ \mathrm{ch}\,\lambda_S l+1=0$; $\sigma_S=\dfrac{\mathrm{sh}\,\lambda_S l-\sin\lambda_S l}{\mathrm{ch}\,\lambda_S l+\cos\lambda_S l}$	$X_S(0)=0$; $X'_S(0)=0$; $X''_S(l)=0$; $X'''_S(l)=0$	1	1,8751	3,51602	6,5929
		2	4,69409	22,0345	103,432
		3	7,85476	61,6972	484,617
		4	10,9955	120,902	1329,38
		5	14,1372	199,86	2825,45
		>5	$(2S-1)\frac{\pi}{2}$	$(2S-1)^2\frac{\pi^2}{4}$	$(2S-1)^3\frac{\pi^3}{8}$
5) Защемлен—оперт $\mathrm{tg}\,\lambda_S l=\mathrm{th}\,\lambda_S l$; $\sigma_S=\mathrm{ctg}\,\lambda_S l=\mathrm{cth}\,\lambda_S l$	$X_S(0)=0$; $X'_S(0)=0$; $X_S(l)=0$; $X''_S(l)=0$	1	3,9266	15,4182	60,5412
		2	7,06858	49,9649	353,181
		3	10,2102	104,248	1064,39
		4	13,3518	178,27	2380,22
		5	16,4934	272,031	4486,71
		>5	$(4S+1)\frac{\pi}{4}$	$(4S+1)^2\frac{\pi^2}{16}$	$(4S+1)^3\frac{\pi^3}{64}$

уравнения α_S^4	Форма собственных колебаний (балочная функция) и ее производные	Численное значение коэффициента балочной функции σ_S	Отношение частот $\frac{\theta_S}{\theta_1}=\frac{\alpha_S^2}{\alpha_1^2}$	Отношение частот $\frac{\theta_S^2}{\theta_1^2}=\frac{\alpha_S^4}{\alpha_1^4}$
7	8	9	10	11
12,3624 485,519 3806,55 14617,3 39943,8 $(2S-1)^4\frac{\pi^4}{16}$	$X_S(x)=\Phi_S(x)=\operatorname{ch}\lambda_S x-\cos\lambda_S x-\sigma_S(\operatorname{sh}\lambda_S x-\sin\lambda_S x)$; $\frac{1}{\lambda_S}\cdot\frac{dX_S}{dx}=\Phi'_S=\operatorname{sh}\lambda_S x+\sin\lambda_S x-\sigma_S(\operatorname{ch}\lambda_S x-\cos\lambda_S x)$; $\frac{1}{\lambda_S^2}\cdot\frac{d^2X_S}{dx^2}=\Phi''_S=\operatorname{ch}\lambda_S x+\cos\lambda_S x-\sigma_S(\operatorname{sh}\lambda_S x+\sin\lambda_S x)$; $\frac{1}{\lambda_S^3}\cdot\frac{d^3X_S}{dx^3}=\Phi'''_S=\operatorname{sh}\lambda_S x-\sin\lambda_S x-\sigma_S(\operatorname{ch}\lambda_S x+\cos\lambda_S x)$	0,734095 1,018466 0,999224 1,000034 0,999999 ~1	1 6,26689 17,5475 34,3861 56,8426 $0,70174(2S-1)^2$	1 39,2739 307,914 1182,4 3231,08 $0,49244(2S-1)^4$
237,721 2496,49 10867,6 31780,1 74000,8 $(4S+1)^4\frac{\pi^4}{256}$	$X_S(x)=\Phi_S(x)=\operatorname{ch}\lambda_S x-\cos\lambda_S x-\sigma_S(\operatorname{sh}\lambda_S x-\sin\lambda_S x)$; $\frac{1}{\lambda_S}\cdot\frac{dX_S}{dx}=\Phi'_S(x)=\operatorname{sh}\lambda_S x+\sin\lambda_S x-\sigma_S(\operatorname{ch}\lambda_S x-\cos\lambda_S x)$; $\frac{1}{\lambda_S^2}\cdot\frac{d^2X_S}{dx^2}=\Phi''_S(x)=\operatorname{ch}\lambda_S x+\cos\lambda_S x-\sigma_S(\operatorname{sh}\lambda_S x+\sin\lambda_S x)$; $\frac{1}{\lambda_S^3}\cdot\frac{d^3X_S}{dx^3}=\Phi'''_S(x)=\operatorname{sh}\lambda_S x-\sin\lambda_S x-\sigma_S(\operatorname{ch}\lambda_S x+\cos\lambda_S x)$	1,0007773 1,0000014 1 1 1 ~1	1 3,24064 6,76134 11,5623 17,6435 $0,04001(4S+1)^2$	1 10,5017 45,7157 133,686 311,293 $0,00160(4S+1)^4$

Схема балки. Частотное уравнение. Коэффициент балочной функции σ_S	Граничные условия	№ формы собственных колебаний S	Корни частотного		
			$\alpha_S=\lambda_S l$	α_S^2	α_S^3
1	2	3	4	5	6
6) Свободен—оперт	$X''_S(0)=0$ $X'''_S(0)=0$ $X_S(l)=0$ $X''_S(l)=0$	По случаю 5			
7) Левый не может поворачиваться, в остальном свободен, правый—оперт $\cos\lambda_S l=0$	$X'_S(0)=0$ $X'''_S(0)=0$ $X_S(l)=0$ $X''_S(l)=0$	1	1,5708	2,4674	3,87578
		2	4,71239	22,20661	104,64625
		3	7,85398	61,68502	484,47276
		4	10,99557	120,90256	1329,39256
		5	14,13717	199,85958	2825,44885
		>5	$(2S-1)\frac{\pi}{2}$	$(2S-1)^2\frac{\pi^2}{4}$	$(2S-1)^3\frac{\pi^3}{8}$
8) Левый и правый не могут поворачиваться, в остальном свободны $\sin\lambda_S l=0$	$X'_S(0)=0$ $X'''_S(0)=0$ $X'_S(l)=0$ $X'''_S(l)=0$	1	3,14159	9,8696	31,0063
		2	6,28318	39,4784	248,0502
		3	9,42478	88,8264	837,1693
		4	12,56637	157,9137	1984,4014
		5	15,70796	246,7401	38757,84
		>5	$S\pi$	$S^2\pi^2$	$S^3\pi^3$

уравнения			Отношение частот	
α_S^4	Форма собственных колебаний (балочная функция) и ее производные	Численное значение коэффициента балочной функции σ_S	$\frac{\theta_S}{\theta_1}=\frac{\alpha_S^2}{\alpha_1^2}$	$\frac{\theta_S^2}{\theta_1^2}=\frac{\alpha_S^4}{\alpha_1^4}$
7	8	9	10	11
По случаю 5	$X_S(x)=\Phi_S$ (свободен—оперт) $=\Phi''_S$ (защемлен—оперт); $\frac{1}{\lambda_S}\cdot\frac{dX_S}{dx}=\Phi'_S$ (свободен—оперт)$=\Phi'''_S$ (защемлен—оперт); $\frac{1}{\lambda_S^2}\cdot\frac{d^2X_S}{dx^2}=\Phi''_S$ (свободен—оперт)$=\Phi_S$ (защемлен—оперт); $\frac{1}{\lambda_S^3}\cdot\frac{d^3X_S}{dX^3}=\Phi'''_S$ (свободен—оперт)$=\Phi'_S$ (защемлен—оперт)	По случаю 5		
6,0881	$X_S(x)=\Phi_S(x)=\cos\lambda_S x=$	—	1	1
493,134	$=\cos\frac{2S-1}{2}\cdot\frac{\pi x}{l};\quad \lambda_S=\frac{(2S-1)\pi}{2l};$	—	9	81
3805,0392	$\frac{1}{\lambda_S}\cdot\frac{dx_S}{dx}=\Phi'_S=-\sin\lambda_S x;$	—	25	625
14617,429	$\frac{1}{\lambda_S^2}\cdot\frac{d^2X_S}{dx^2}=\Phi''_S=-\cos\lambda_S x;$	—	49	2401
39943,852	$\frac{1}{\lambda_S^3}\cdot\frac{d^3X_S}{dx^3}=\Phi'''_S=\sin\lambda_S x$	—	81	6561
$(2S-1)^4\frac{\pi^4}{16}$		—	$(2S-1)^2$	$(2S-1)^4$
97,409	$X_S(x)=\Phi_S(x)=\cos\lambda_S x=$	—	1	1
1558,545	$=\cos\frac{S\pi x}{l};\quad \lambda_S=\frac{S\pi}{l};$	—	4	16
7890,134	$\frac{1}{\lambda_S}\cdot\frac{dX_S}{dx}=\Phi'=-\sin\lambda_S x;$	—	9	81
24936,719	$\frac{1}{\lambda_S^2}\cdot\frac{d^2X_S}{dx^2}=\Phi''=-\cos\lambda_S x;$	—	16	256
60880,662	$\frac{1}{\lambda_S^3}\cdot\frac{d^3X_S}{dx^3}=\Phi'''=\sin\lambda_S x$	—	25	625
$S^4\pi^4$		—	S^2	S^4

Схема балки. Частотное уравнение. Коэффициент балочной функции σ_S	Граничные условия	№ формы собственных колебаний	Корни частотного		
			$\alpha_S=\lambda_S l$	α_S^2	α_S^3
1	2	3	4	5	6
9) Левый—защемлен; правый не может поворачиваться, в остальном свободен. $\operatorname{tg} \lambda_S l+\operatorname{th} \lambda_S l=0$; $\sigma_S=\operatorname{th} \lambda_S l$	$X_S(0)=0$; $X'_S(0)=0$; $X'_S(l)=0$; $X'''_S(l)=0$	1	2,36502	5,59332	13,2283
		2	5,4978	30,2258	166,176
		3	8,63938	74,6389	644,834
		4	11,781	138,791	1635,1
		5	14,9226	222,683	3323
		>5	$(4S-1)\frac{\pi}{4}$	$(4S-1)^2\frac{\pi^2}{16}$	$(4S-1)^3\frac{\pi^3}{64}$
10) Левый—свободен; правый не может поворачиваться, в остальном свободен	$X''_S(0)=0$; $X'''_S(0)=0$; $X'_S(l)=0$; $X'''_S(l)=0$	По случаю 9			

уравнения α_S^4	Форма собственных колебаний (балочная функция) и ее производные	Численное значение коэффициента балочной функции σ_S	Отношение частот $\frac{\theta_S}{\theta_1}=\frac{\alpha_S^2}{\alpha_1^2}$	$\frac{\theta_S^2}{\theta_1^2}=\frac{\alpha_S^4}{\alpha_1^4}$
7	8	9	10	11
31,2852 913,602 5570,963 19263 49587,7 $(4S-1)^4\frac{\pi^4}{256}$	$X_S(x)=\Phi_S(x)=\operatorname{ch}\lambda_S x-\cos\lambda_S x-\sigma_S(\operatorname{sh}\lambda_S x-\sin\lambda_S x)$; $\frac{1}{\lambda_S}\cdot\frac{dX_S}{dx}=\Phi'_S=\operatorname{sh}\lambda_S x+\sin\lambda_S x-\sigma_S(\operatorname{ch}\lambda_S x-\cos\lambda_S x)$; $\frac{1}{\lambda_S^2}\cdot\frac{d^2X_S}{dx^2}=\Phi''_S=\operatorname{ch}\lambda_S x+\cos\lambda_S x-\sigma_S(\operatorname{sh}\lambda_S x+\sin\lambda_S x)$; $\frac{1}{\lambda_S^3}\cdot\frac{d^3X_S}{dx^3}=\Phi'''_S=\operatorname{sh}\lambda_S x-\sin\lambda_S x-\sigma_S(\operatorname{ch}\lambda_S x+\cos\lambda_S x)$	0,982502 0,999966 1 1 1 ~1	1 5,40392 13,3443 24,8138 39,8123 $0,11029(4S-1)^2$	1 29,2023 178,07 615,722 1585,02 $0,012164(4S-1)^4$
По случаю 9	$X_S(x)=\Phi_S$ (свободен—без поворота)$=\Phi''_S$ (защемлен—без поворота) $\frac{1}{\lambda_S}\cdot\frac{dX_S}{dx}=\Phi'_S$(свободен—без поворота)$=\Phi'''_S$ (защемлен—без поворота) $\frac{1}{\lambda_S^2}\cdot\frac{d^2X_S}{dx^2}=\Phi''_S$ (свободен—без поворота)$=\Phi_S$ (защемлен—без поворота) $\frac{1}{\lambda_S^3}\cdot\frac{d^3X_S}{dx^3}=\Phi'''_S$ (свободен—без поворота)$=\Phi'_S$ (защемлен—без поворота)	По случаю 9		

Для нетривиального решения этих уравнений, т. е. такого решения, при котором все произвольные постоянные не были одновременно равны нулю, необходимо, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при произвольных постоянных A, B, C, D, был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \lambda l & \cos \lambda l & \operatorname{sh} \lambda l & \operatorname{ch} \lambda l \\ -\sin \lambda l & -\cos \lambda l & \operatorname{sh} \lambda l & \operatorname{ch} \lambda l \end{vmatrix} = 0$$

Раскрытие определителя дает трансцендентное уравнение для определения величины λl (частотное уравнение):

$$\operatorname{tg} \lambda l = \operatorname{th} \lambda l,$$

корнями которого является бесчисленное множество значений $\lambda_s l$ $(S=1, 2, \ldots)$. Вид частотного уравнения определяется граничными условиями на концах балки.

В табл. 7.7 приведены частотные уравнения, их корни, уравнения для вычисления балочных функций и некоторые другие данные для однопролетных балок, а на рис. 7.6 — схемы форм собственных колебаний.

Каждому значению корня λ_s трансцендентного уравнения соответствует вполне определенная круговая частота собственных колебаний

$$\theta_S = \lambda_S^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \tag{7.59}$$

Часто решение уравнения (7.44) вместо (7.46) представляют в виде:

$$X(x) = AS(x) + BT(x) + CU(x) + DV(x), \tag{7.60}$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные, определяемые граничными условиями на концах балки, а функции $S(x)$, $T(x)$, $U(x)$, $V(x)$, называемые функциями Крылова, представляют собой систему частных решений уравнения (7.44):

$$\left.\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \lambda x + \cos \lambda x); \\ T(x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \lambda x + \sin \lambda x); \\ U(x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \lambda x - \cos \lambda x); \\ V(x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \lambda x - \sin \lambda x). \end{aligned}\right\} \tag{7.61}$$

При $x=0$ функции Крылова (7.61) и их производные по аргументу λx до третьего порядка включительно составляют единичную матрицу (табл. 7.8), вследствие чего их иногда называют функциями с единичной матрицей, а систему (7.61) — нормальной или фундаментальной системой интегралов уравнения (7.44). Последовательные выражения производных по x от функций Крылова до четвертого порядка включительно приведены в табл. 7.9. Функции Крылова обладают свойством круговой замены до производных четвертого порядка включительно.

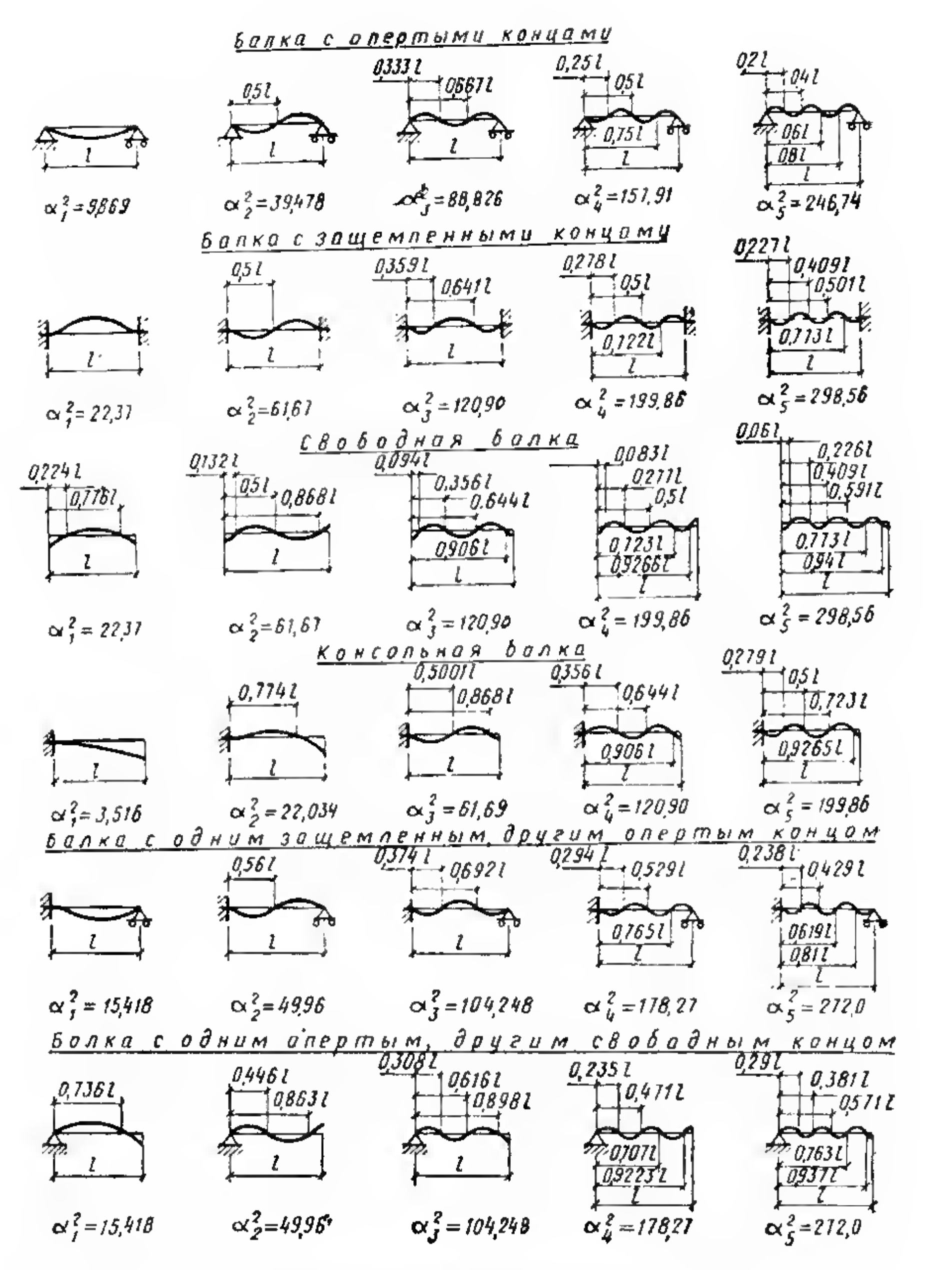


Рис. 7.6. Формы собственных колебаний однопролетных балок и коэффициенты частоты для пяти форм колебаний

Таблица 7.8

Значения функций Крылова S, T, U, V и их производных по λx при $x=0$

Функция	Значения функций S, T, U, V и их производных при $x=0$			
	функция	первая производная	вторая производная	третья производная
$S(0)$	1	0	0	0
$T(0)$	0	1	0	0
$U(0)$	0	0	1	0
$V(0)$	0	0	0	1

Таблица 7.9

Производные по x от функций Крылова

Функция	Первая производная	Вторая производная	Третья производная	Четвертая производная
$S(x)$	$\lambda V(x)$	$\lambda^2 U(x)$	$\lambda^3 T(x)$	$\lambda^4 S(x)$
$T(x)$	$\lambda S(x)$	$\lambda^2 V(x)$	$\lambda^3 U(x)$	$\lambda^4 T(x)$
$U(x)$	$\lambda T(x)$	$\lambda^2 S(x)$	$\lambda^3 V(x)$	$\lambda^4 U(x)$
$V(x)$	$\lambda U(x)$	$\lambda^2 T(x)$	$\lambda^3 S(x)$	$\lambda^4 V(x)$

С помощью функций Крылова упрощается написание общего интеграла уравнения (7.44), который принимается таким, чтобы условия на одном из концов балки при $x=0$ удовлетворялись автоматически.

Для этого необходимо, чтобы соответствующие два коэффициента (7.60) были равны нулю, что легко может быть определено по табл. 7.8 и заданным граничным условиям. В результате решение в каждом конкретном случае будет содержать только две произвольные постоянные, которые определяются из условий на другом конце при $x=l$.

Для рассмотренной балки (рис. 7.5) общее решение будет содержать только функции $U(x)$ и $V(x)$, поскольку (табл. 7.8) для удовлетворения граничных условий на левом конце ($x=0$) необходимо, чтобы коэффициенты A и B в (7.60) были равны нулю. Следовательно, $X(x)=CU(x)+DV(x)$.

Подстановка в граничные условия на правом конце дает для определения произвольных постоянных два уравнения: $X(l)=CU(l)+DV(l)=0$; $X''(l)=CS(l)+DT(l)=0$.

Отсюда

$$\begin{vmatrix} U(l) & V(l) \\ S(l) & T(l) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрытие определителя дает частотное уравнение в функциях Крылова для определения λl:

$$U(l)\,T(l) - V(l)\,S(l) = 0.$$

Собственные колебания неразрезных балок

Уравнение собственных поперечных колебаний неразрезной балки с равномерно распределенной массой аналогично уравнению колебаний однопролетной балки. Для балки с постоянным в каждом пролете поперечным сечением уравнение колебаний имеет вид (7.43), а его решение для каждого пролета имеет вид (7.46). Однако произвольные постоянные A, B, C, D решения (7.46) различны для каждого пролета. Следовательно, для n-пролетной неразрезной балки в общем случае будет $4n$ произвольных постоянных.

Произвольные постоянные A_1, $B_1, \ldots, C_n$, D_n определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений. Система уравнений составляется из условий удовлетворения решения уравнения колебаний (7.46) для каждого пролета граничным условиям на крайних опорах неразрезной балки и условиям сопряжения на промежуточных опорах (см. табл. 7.6). Система таких уравнений однородна, поэтому условием нетривиального решения будет равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при постоянных. Приравнивание нулю определителя позволяет получить уравнение частот собственных колебаний неразрезной балки.

Для определения форм собственных колебаний значения произвольных постоянных и корней частотного уравнения подставляются в решение уравнения колебаний (7.46). Каждому корню частотного уравнения соответствует вполне определенная форма собственных колебаний.

В качестве примера рассмотрим составление частотного уравнения для двухпролетной шарнирно опертой неразрезной балки с неравными пролетами l_1 и l_2 (случай 12, табл. 7.10). Решение уравнения колебаний (7.46):
для первого пролета

$$y_1(x_1) = A_1 \sin \lambda x_1 + B_1 \cos \lambda x_1 + C_1 \operatorname{sh} \lambda x_1 + D_1 \operatorname{ch} \lambda x_1; \text{ при } 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1;$$

для второго пролета

$$y_2(x_2) = A_2 \sin \lambda x_2 + B_2 \cos \lambda x_2 + C_2 \operatorname{sh} \lambda x_2 + D_2 \operatorname{ch} \lambda x_2; \text{ при } 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2.$$

Из граничных условий и условий сопряжения на промежуточной опоре имеем:
$y_1(0) = y''_1(0) = 0$; $y_1(l_1) = y_2(0) = 0$;
$y'_1(l_1) = y_2'(0)$; $y_1''(l_1) = y''_2(0)$;
$y_2(l_2) = y''_2(l_2) = 0$.

Система однородных алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных A_1, B_1, ..., D_2 будет иметь вид:

$$A_1 \sin \lambda l_1 + C_1 \operatorname{sh} \lambda l_1 = 0;$$

$$A_1 \cos \lambda l_1 + C_1 \operatorname{ch} \lambda l_1 - A_2 - C_2 = 0;$$

$$-A_1 \sin \lambda l_1 + C_1 \operatorname{sh} \lambda l_1 - 2D_2 = 0;$$

$$A_2 \sin \lambda l_2 + C_2 \operatorname{sh} \lambda l_2 + (\operatorname{ch} \lambda l_2 - \cos \lambda l_2)\, D_2 = 0;$$

$$-A_2 \sin \lambda l_2 + C_2 \operatorname{ch} \lambda l_2 + (\operatorname{ch} \lambda l_2 + \cos \lambda l_2)\, D_2 = 0.$$

Для существования нетривиального решения этой системы необходимо, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных произвольных постоянных A_1, C_1, A_2, C_2, D_2, был равен нулю. Равенство нулю этого определителя дает трансцендентное уравнение для вычисления значения λ:

$$\operatorname{sh} \mu\lambda l \cdot \operatorname{sh}(1-\mu)\lambda l \cdot \sin \lambda l - \sin \mu\lambda l \cdot \sin(1-\mu)\lambda l \cdot \operatorname{sh} \lambda l = 0,$$

где $\mu = l_1/l$; $l = l_1 + l_2$.

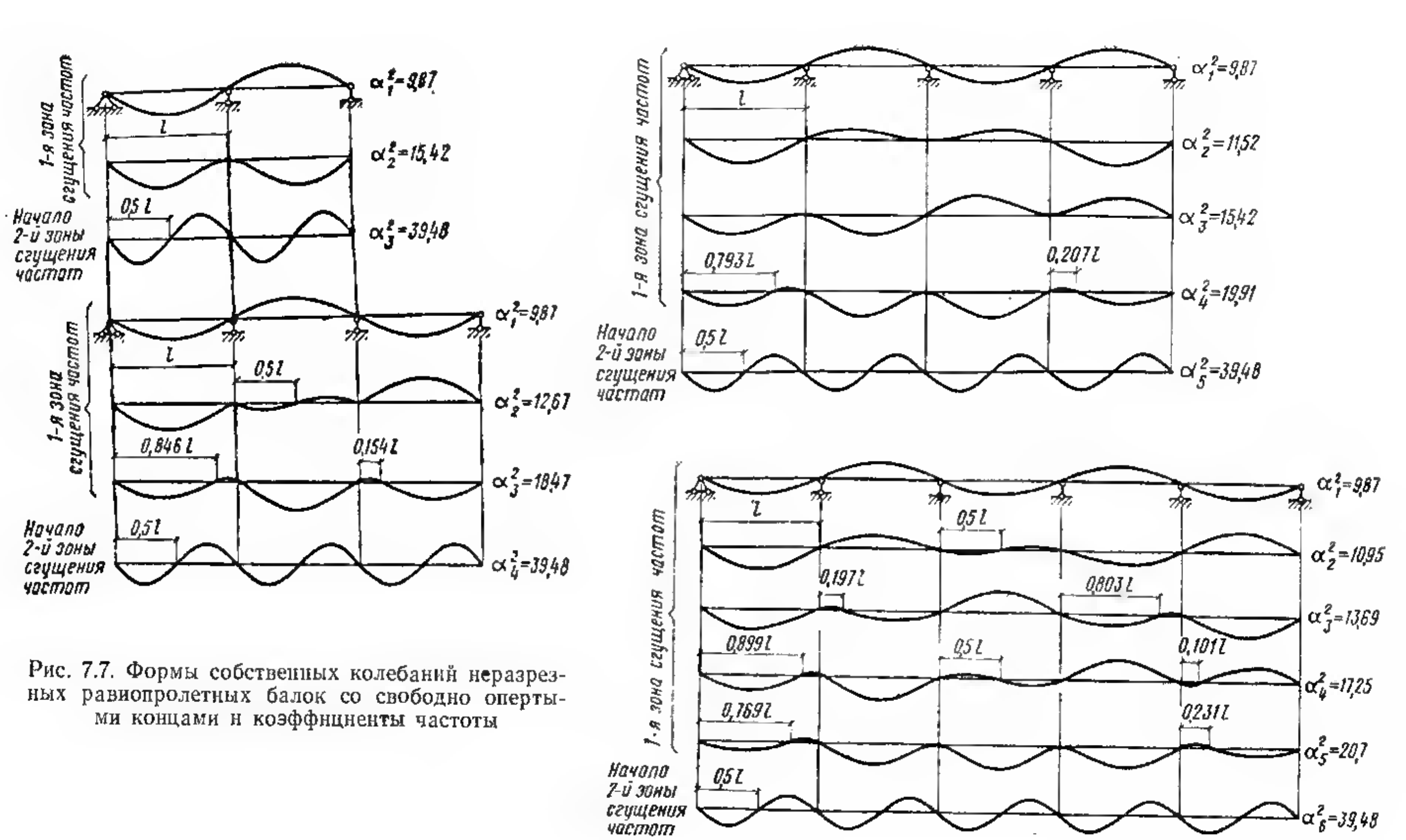


Рис. 7.7. Формы собственных колебаний неразрезных равнопролетных балок со свободно опертыми концами и коэффициенты частоты

Значения $\lambda l = \alpha_1$ для первого (основного) тона собственных колебаний двухпролетной балки приведены в табл. 7.10, где имеются также коэффициенты частоты для некоторых других схем неразрезных балок.

На рис. 7.7, приведены формы собственных колебаний неразрезных равнопролетных балок со свободно опертыми концами и коэффициенты частоты для этих балок.

Частотные уравнения для неразрезных балок, у которых сечение остается постоянным в пределах каждого пролета, но может изменяться при переходе от одного пролета к другому, удобно составлять в форме уравнения трех моментов [24, 38, 45]:

$$\frac{\psi_n}{i_n} M_{n-1} + \left(\frac{\varphi_n}{i_n} + \frac{\varphi_{n+1}}{i_{n+1}} \right) M_n + \frac{\psi_{n+1}}{i_{n+1}} M_{n+1} = 0. \qquad (7.62)$$

Здесь M_n — опорный момент на n-й опоре; $i_n = \frac{EJ_n}{l_n}$ — погонная жесткость n-го пролета; n — номер пролета, совпадающий с номером правой опоры данного пролета;

$$\left. \begin{aligned} \psi_n &= \frac{1}{\lambda l_n} \cdot \frac{V_n}{T_n^2 - V_n^2} = \frac{\operatorname{csc} \lambda l_n - \operatorname{csch} \lambda l_n}{2\lambda l_n}; \\ \varphi_n &= \frac{2}{\lambda l_n} \cdot \frac{T_n U_n - S_n V_n}{T_n^2 - V_n^2} = \frac{\operatorname{ctgh} \lambda l_n - \operatorname{ctg} \lambda l_n}{2\lambda l_n}; \end{aligned} \right\} \qquad (7.63)$$

S_n, T_n, U_n, V_n — функции Крылова [см. (7.61)].

Для неразрезной балки можно составить столько уравнений вида (7.62), сколько имеется опор. Все эти уравнения относительно моментов будут однородными. Поэтому задача вычисления частот сводится к составлению определителя для коэффициентов уравнения трех моментов и решения частотного уравнения. Частотное уравнение неразрезных балок можно также составлять по методу перемещений (деформаций) [см. 7.5].

Таблицы для расчета однопролетных и неразрезных балок имеются в ряде работ, например [18, 19, 22, 28], где даны также коэффициенты приведения сосредоточенных нагрузок к распределенным.

Частоты собственных поперечных колебаний балок

Частоты собственных поперечных колебаний балок постоянного сечения с жесткими и упругими опорами вычисляются по формуле

$$n_S = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\alpha_S^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{\lambda_S^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \qquad (7.64)$$

Здесь n_S — число колебаний в 1 *сек* (частота) (*гц*); l — пролет балки; α_S, λ_S — корни характеристического уравнения, принимаемые по табл. 7.7 и 7.10 в зависимости от числа пролетов балки, номера формы собственных колебаний S и характера опорных закреплений, при этом $\alpha_S = \lambda_S l$; m — постоянная равномерно распределенная масса; E — модуль упругости материала балки; J — момент инерции поперечного сечения (постоянный вдоль всей длины балки).

Вынужденные колебания балок

При действии на балку внешней нагрузки, изменяющейся во времени, вынужденные колебания балки относительно положения статического равновесия описываются неоднородными дифференциальными уравнениями, левая часть которых совпадает с уравнениями (7.43), (7.48), (7.52), (7.53) и (7.57).

Общее решение неоднородного уравнения состоит из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. При этом общим решением однородного уравнения характеризуются свободные колебания, а частным решением неоднородного уравнения — вынужденные колебания. При гармонической возмущающей силе вынужденные колебания происходят с частотой возмущающей силы.

Здесь рассматриваются только установившиеся чисто вынужденные колебания при действии гармонических сил.

При отсутствии поглощения энергии колебаний

Для изгибных колебаний балки постоянного сечения с равномерно распределенной массой дифференциальное уравнение вынужденных колебаний при отсутствии рассеивания энергии имеет вид:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p(x,t). \qquad (7.65)$$

Здесь $p(x, t)$ — возмущающая нагрузка, изменяющаяся во времени.

Если $p(x,t)=q(x)\sin(\omega t+\alpha)$, то решение (7.65) ищут в форме $y(x,t)=W(x)\sin(\omega t+\alpha)$, и тогда для функции $W(x)$, характеризующей форму вынужденных поперечных колебаний балки, получают дифференциальное уравнение

$$EJ\frac{d^4 W}{dx^4}-m\omega^2 W=q(x). \qquad (7.66)$$

Воспользовавшись методом разложения решения по формам собственных колебаний балки, для случая сосредоточенной гармонической силы $P(t)=P\sin(\omega t+\alpha)$, действующей в сечении $x=a$, получаем следующее выражение для динамического прогиба (амплитуды вынужденных колебаний):

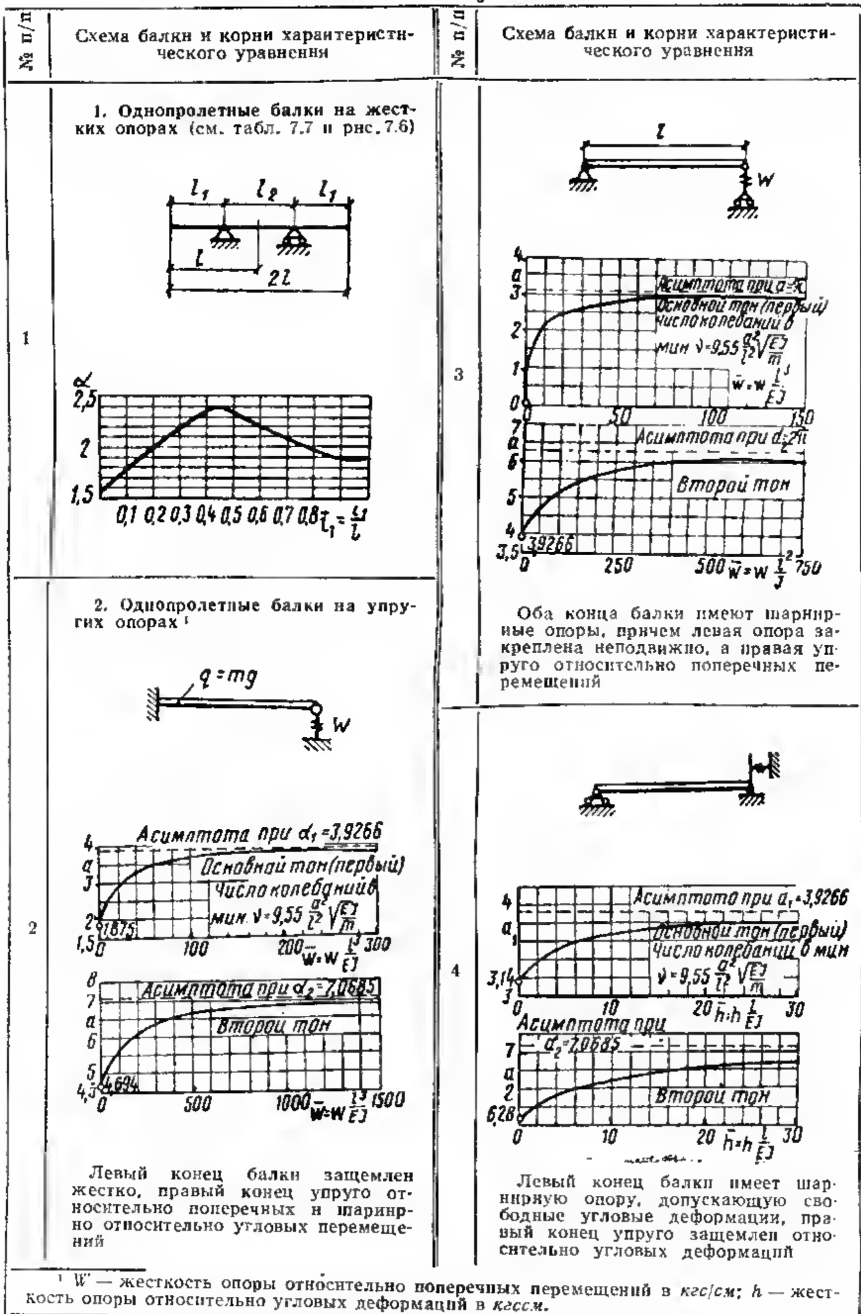
$$\max W(\xi)=\frac{P}{ml}\sum_{S=1}^{\infty}\frac{\overline{X}_S(\xi)\overline{X}_S(\xi_a)}{\theta_S^2\left(1-\frac{\omega^2}{\theta_S^2}\right)\int\limits_0^1\overline{X}_S^2(\xi)\,d\xi}. \qquad (7.67)$$

Здесь P — амплитуда гармонической силы; ω — круговая частота вынужденных колебаний;

$\theta_S=\frac{\alpha_S^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}=\lambda_S^2\sqrt{\frac{EJ}{m}}$ — круговая частота собственных поперечных колебаний балки по S-му тону; $S=1, 2, \ldots$ — порядковый номер частоты и соответствующей ей формы собственных колебаний балки; $\alpha_S=\lambda_S l$ — корень характеристического уравнения (табл. 7.7 и 7.10); $\overline{X}_S(\xi)$ — балочная функция, соответствующая S-й форме собственных колебаний рассматриваемой балки;

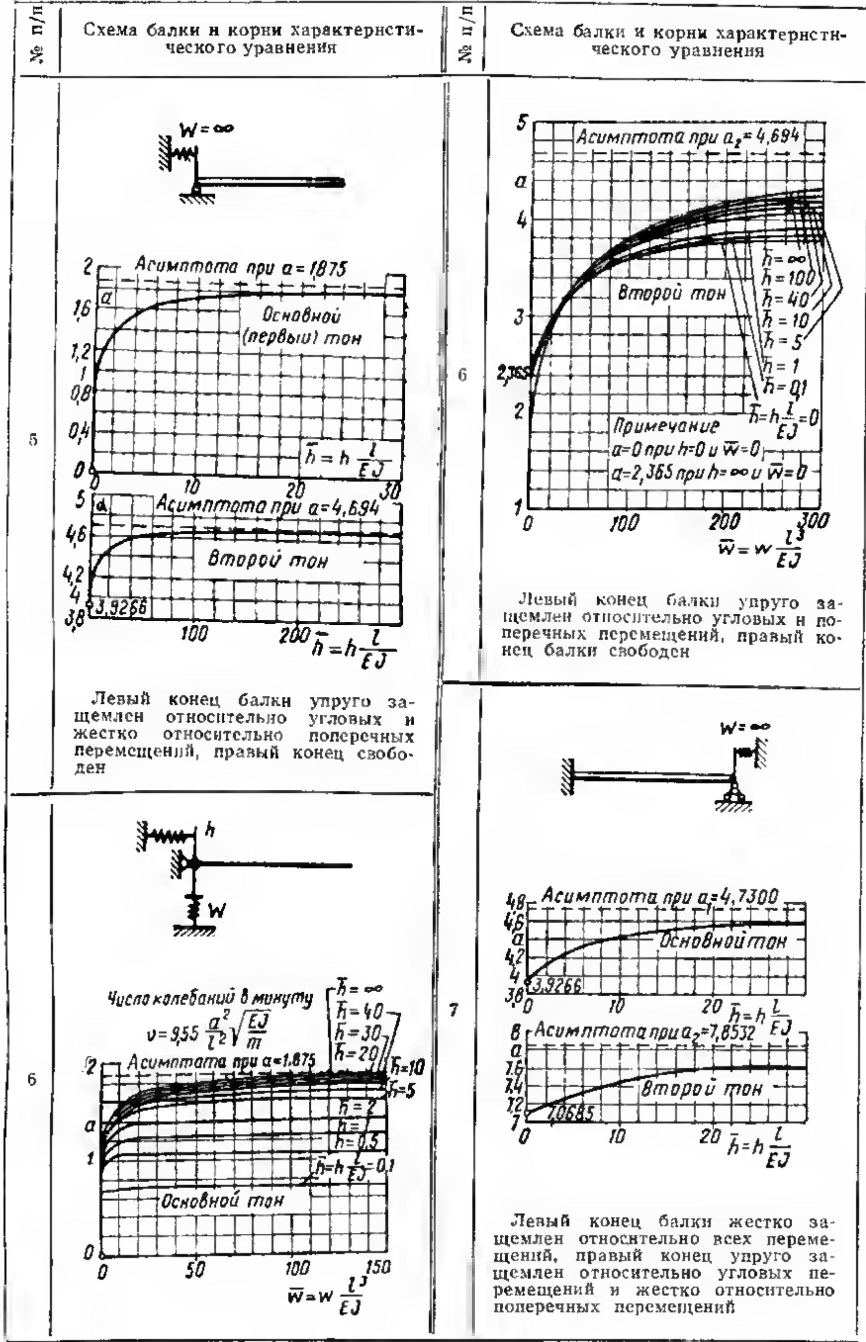
Таблица 7.10

Значения коэффициента α_s в формуле (7.64)

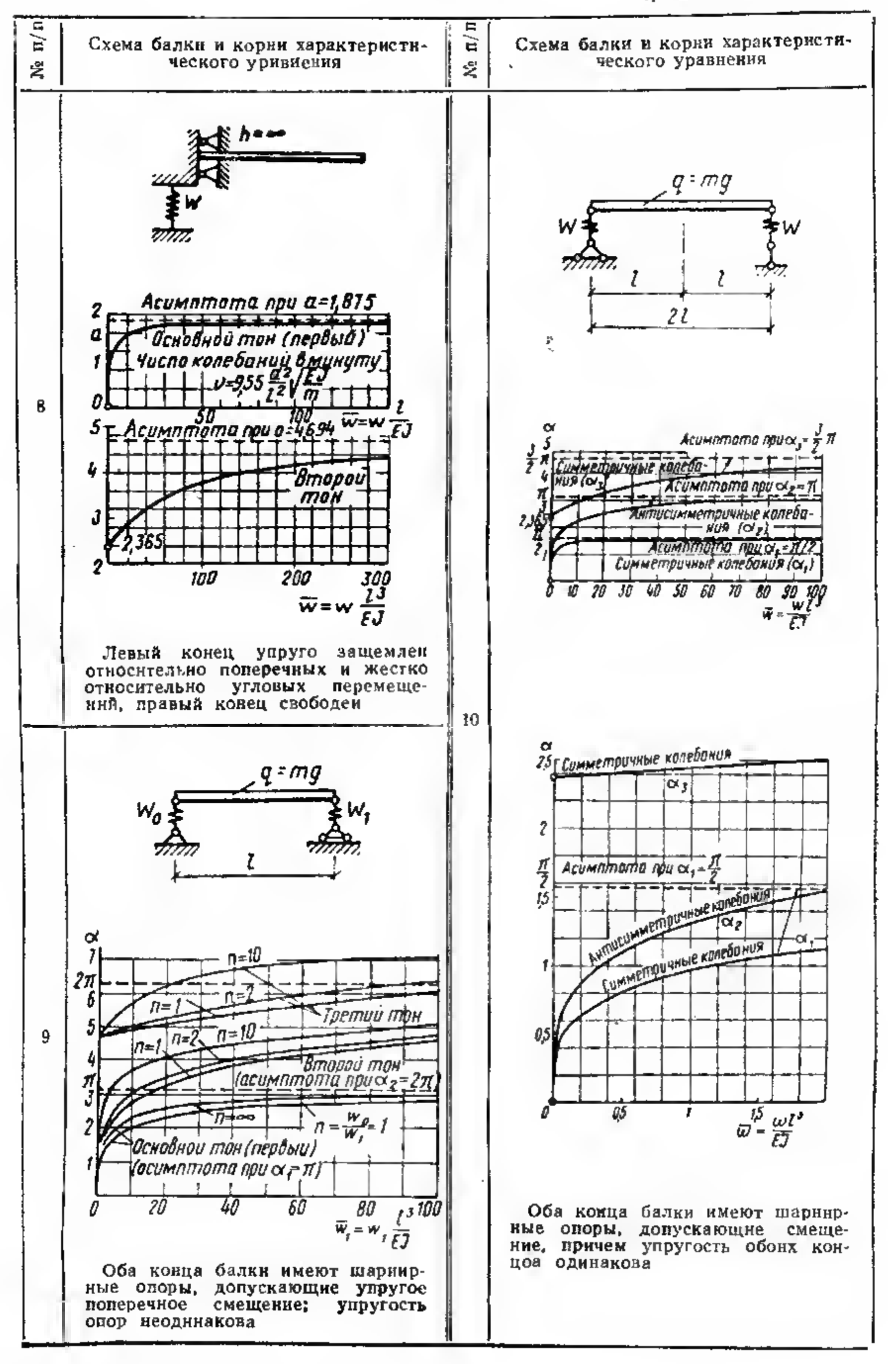


№ п/п	Схема балки и корни характеристического уравнения	№ п/п	Схема балки и корни характеристического уравнения
1	**1. Однопролетные балки на жестких опорах** (см. табл. 7.7 и рис. 7.6)	3	Оба конца балки имеют шарнирные опоры, причем левая опора закреплена неподвижно, а правая упруго относительно поперечных перемещений
2	**2. Однопролетные балки на упругих опорах**[1] Левый конец балки защемлен жестко, правый конец упруго относительно поперечных и шарнирно относительно угловых перемещений	4	Левый конец балки имеет шарнирную опору, допускающую свободные угловые деформации, правый конец упруго защемлен относительно угловых деформаций

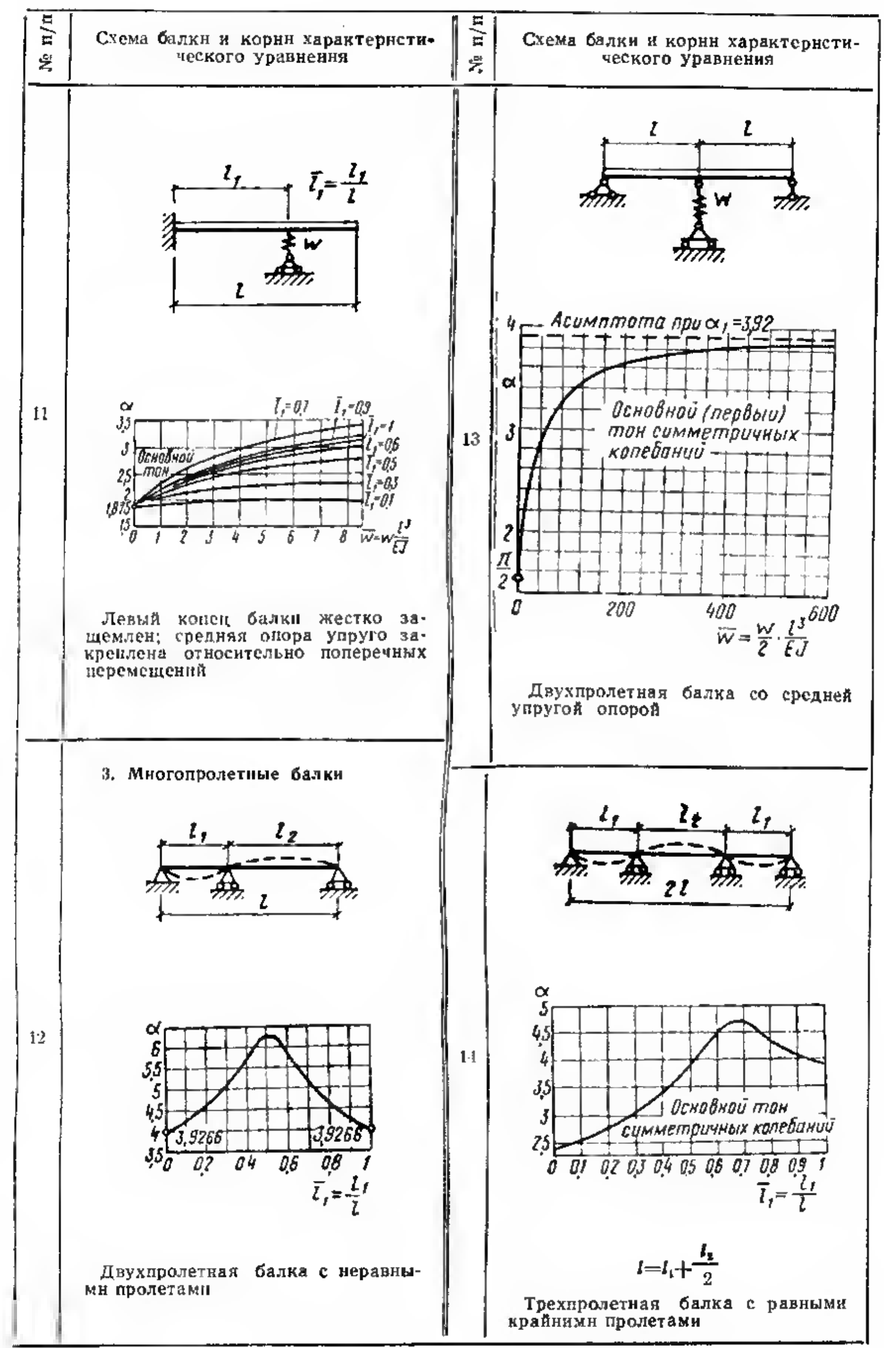
[1] W — жесткость опоры относительно поперечных перемещений в *кгс/см*; h — жесткость опоры относительно угловых деформаций в *кгссм*.



№ п/п	Схема балки и корни характеристического уравнения	№ п/п	Схема балки и корни характеристического уравнения
5	Левый конец балки упруго защемлен относительно угловых и жестко относительно поперечных перемещений, правый конец свободен	6	Левый конец балки упруго защемлен относительно угловых и поперечных перемещений, правый конец балки свободен
6		7	Левый конец балки жестко защемлен относительно всех перемещений, правый конец упруго защемлен относительно угловых перемещений и жестко относительно поперечных перемещений



№ п/п	Схема балки и корни характеристического уравнения	№ п/п	Схема балки и корни характеристического уравнения
8	Левый конец упруго защемлен относительно поперечных и жестко относительно угловых перемещений, правый конец свободен	10	Оба конца балки имеют шарнирные опоры, допускающие смещение, причем упругость обоих концов одинакова
9	Оба конца балки имеют шарнирные опоры, допускающие упругое поперечное смещение; упругость опор неодинакова		



№ п/п	Схема балки и корни характеристического уравнения	№ п/п	Схема балки и корни характеристического уравнения
11	Левый конец балки жестко защемлен; средняя опора упруго закреплена относительно поперечных перемещений	13	Двухпролетная балка со средней упругой опорой
12	**3. Многопролетные балки** Двухпролетная балка с неравными пролетами	14	$l = l_1 + \frac{l_2}{2}$ Трехпролетная балка с равными крайними пролетами

Продолжение табл. 7.10

№ п/п	Схема балки и корни характеристического уравнения	№ п/п	Схема балки и корни характеристического уравнения
15	l_1, l_2, l_3; W, W; l; $2l$ Трехпролетная балка с упругими крайними опорами и равными крайними пролетами	15	Числа колебаний в минуту $\nu = 9{,}55\frac{a^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$, где $l = l_1 + \frac{l_2}{2}$, $\bar{l}_1 = \frac{l_1}{l}$ a: 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4 $\bar{l}_1 = 0{,}6$; Асимптота при $a = 3{,}926$ ($\bar{w} = \infty$) $\bar{l}_1 = 0{,}5$; $\bar{l}_1 = 0{,}4$; $a = 3{,}42$ ($\bar{w} = \infty$) $\bar{l}_1 = 0{,}3$; $a = 3{,}05$ ($\bar{w} = \infty$) $\bar{l}_1 = 0{,}2$; $a = 2{,}765$ ($\bar{w} = \infty$) $\bar{l}_1 = 0{,}1$; $a = 2{,}54$ ($\bar{w} = \infty$) Основной тон симметричных колебаний 0 25 50 75 100 125 150 175 200 $\bar{w} = \frac{wl^3}{EJ}$

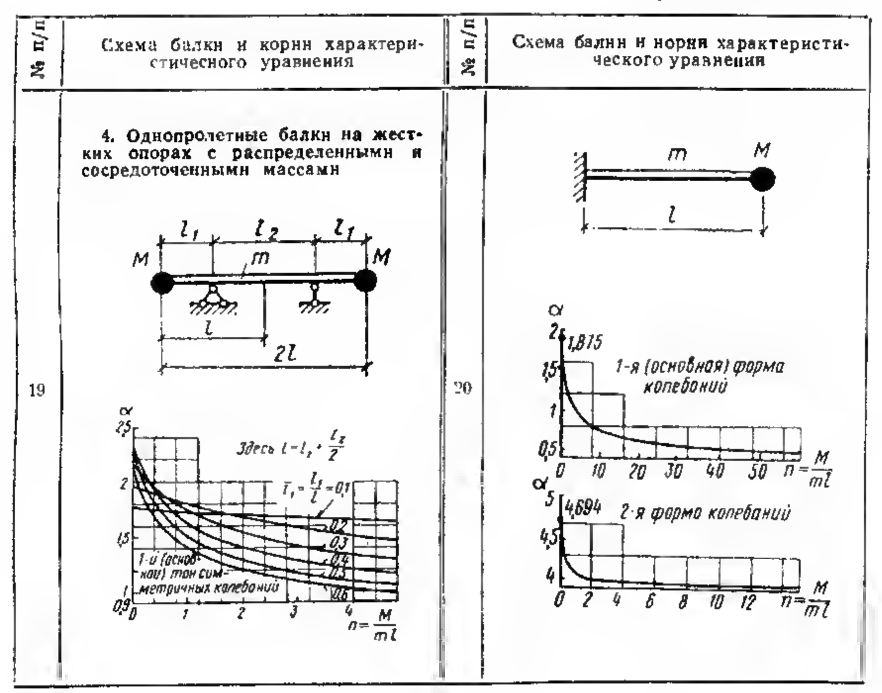
Продолжение табл. 7.10

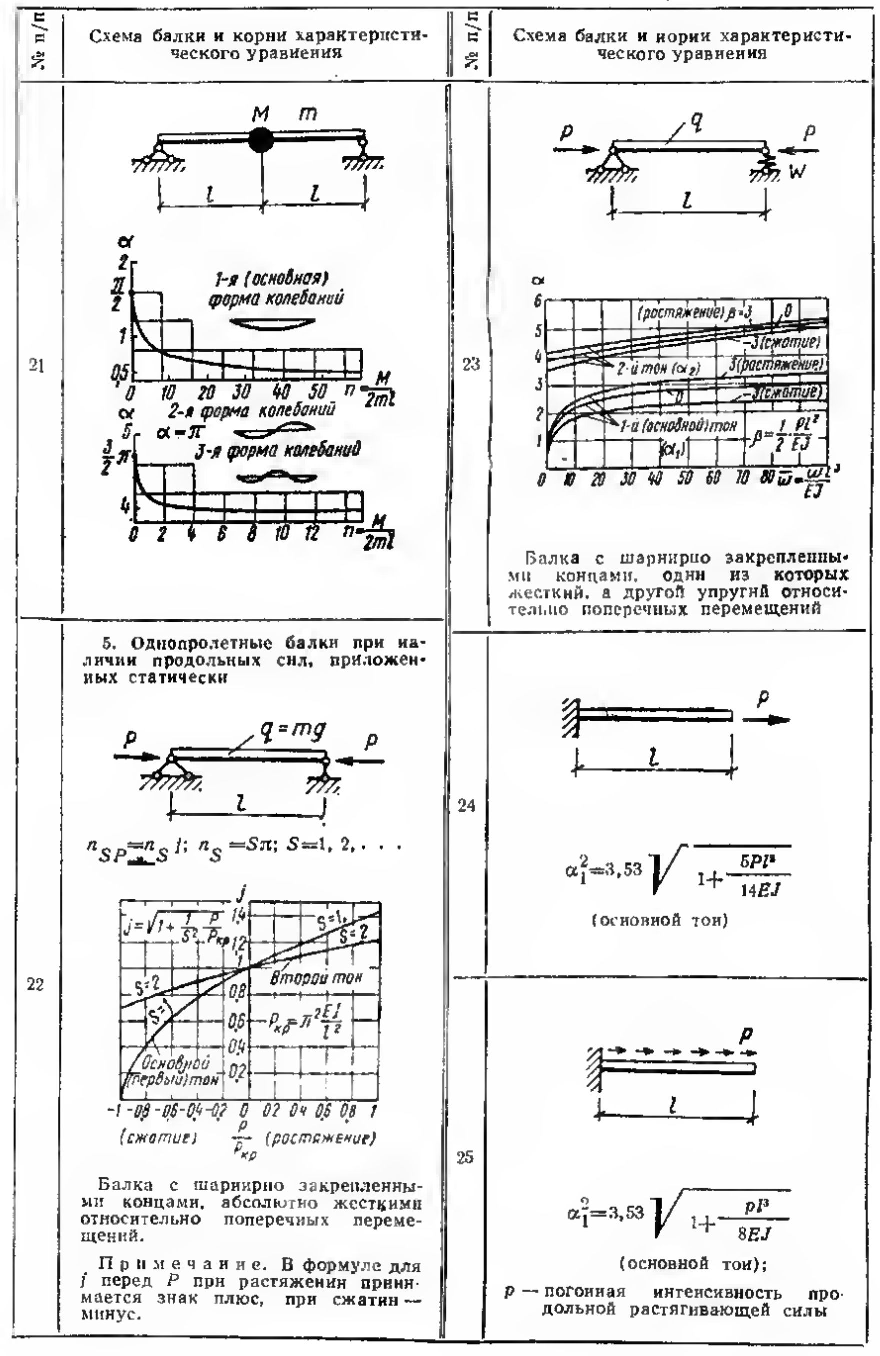
№ п/п	Схема балки	Число пролетов n	Корни характеристического уравнения. Номер формы колебаний S: 1	2	3	4	5
16	l, l, l; nl Крайние концы балки имеют шарнирные опоры; промежуточные опоры шарнирные (см. примечание). Формы собственных колебаний см. рис. 7.7	1	3,142	6,283	9,425	12,566	15,708
		2	3,142	3,927	6,283	7,069	9,425
		3	3,142	3,550	4,304	6,283	6,692
		4	3,142	3,393	3,927	4,461	6,283
		5	3,142	3,299	3,707	4,147	4,555
		6	3,142	3,267	3,550	3,927	4,304
		7	3,142	3,236	3,456	3,770	4,084
		8	3,142	3,205	3,393	3,644	3,927
		9	3,142	3,205	3,330	3,550	3,801
		10	3,142	3,205	3,299	3,487	3,707
		11	3,142	3,173	3,267	3,424	3,613
		12	3,142	3,173	3,267	3,393	3,550
17	l, l, l; nl Крайние концы балки имеют жесткое защемление; промежуточные опоры шарнирные (см. примечание)	1	4,730	7,853	10,995	14,137	17,279
		2	3,927	4,744	7,069	7,855	10,210
		3	3,550	4,304	4,744	6,692	7,446
		4	3,393	3,927	4,461	4,744	6,535
		5	3,299	3,707	4,147	4,555	4,744
		6	3,267	3,550	3,927	4,304	4,587
		7	3,236	3,456	3,770	4,084	4,398
		8	3,205	3,393	3,644	3,927	4,210
		9	3,205	3,330	3,550	3,801	4,053
		10	3,205	3,299	3,487	3,707	3,927
		11	3,173	3,267	3,424	3,613	3,832
		12	3,173	3,267	3,393	3,550	3,739

№ п/п	Схема балки	Корни характеристического уравнения					
		Число пролетов	Номер формы колебаний S				
			1	2	3	4	5
18	l l l nl Крайний левый конец балки имеет жесткое защемление; промежуточные и крайняя правая опоры — шарнирные (см. примечание)	1	3,927	7,069	10,210	13,352	16,494
		2	3,393	4,461	6,535	7,603	9,677
		3	3,267	3,927	4,587	6,409	7,069
		4	3,205	3,644	4,210	4,650	6,347
		5	3,205	3,487	3,927	4,367	4,681
		6	3,173	3,393	3,739	4,116	4,461
		7	3,173	3,330	3,613	3,927	4,242
		8	3,173	3,299	3,393	3,770	4,084
		9	3,142	3,267	3,519	3,676	3,927
		10	3,142	3,236	3,456	3,582	3,801
		11	3,142	3,236	3,362	3,519	3,707
		12	3,142	3,236	3,380	3,487	3,644

Примечание. Частоты неразрезной балки постоянного сечения образуют зоны сгущения, в каждой из которых число частот равно числу пролетов балки, а значения частот близки между собой. В пп. 16—18 жирной чертой отделены коэффициенты для определения частот 1-й зоны сгущения от коэффициентов последующих зон.

№ п/п	Схема балки и корни характеристического уравнения	№ п/п	Схема балки и корни характеристического уравнения
19	**4. Однопролетные балки на жестких опорах с распределенными и сосредоточенными массами**	20	





№ п/п	Схема балки и корни характеристического уравнения
21	(схема и графики)
22	**5. Однопролетные балки при наличии продольных сил, приложенных статически** $n_{SP} = n_S\, j;\ n_S = S\pi;\ S = 1, 2, \ldots$ Балка с шарнирно закрепленными концами, абсолютно жесткими относительно поперечных перемещений. Примечание. В формуле для j перед P при растяжении принимается знак плюс, при сжатии — минус.
23	Балка с шарнирно закрепленными концами, один из которых жесткий, а другой упругий относительно поперечных перемещений
24	$\alpha_1^2 = 3{,}53\sqrt{1 + \frac{5Pl^3}{14EJ}}$ (основной тон)
25	$\alpha_1^2 = 3{,}53\sqrt{1 + \frac{pl^3}{8EJ}}$ (основной тон); p — погонная интенсивность продольной растягивающей силы

$\xi = x/l$ — относительное расстояние от левой опоры; l — пролет балки; x — расстояние от левой опоры до сечения, где определяется прогиб $W(\xi)$; $\xi_a = a/l$.

В случае, если балочные функции $\overline{X}_S(\xi)$ нормированы условием $\int_0^1 \overline{X}_S^2(\xi)\,d\xi = 1$ для однопролетных балок и условием $\sum_{r=1}^{N}\int_0^1 \overline{X}_{Sr}^2(\xi)\,d\xi = 1$, где r — номер пролета балки ($r = 1, 2, \ldots, N$), для неразрезных N-пролетных балок выражение (7.67) после преобразований может быть записано в виде:

$$\max W(\xi) = \frac{Pl^3}{\alpha_1^4 EJ}\sum_{S=1}^{\infty}\frac{X_S(\xi)\,X_S(\xi_a)}{\frac{\alpha_S^4}{\alpha_1^4}\left(1-\frac{\omega^2}{\theta_S^2}\right)}. \qquad (7.68)$$

Здесь $X_S(\xi)$, $X_S(\xi_a)$ — нормированные балочные функции, определяемые по таблицам балочных функций[1].

При наличии внутреннего поглощения энергии колебаний

Дифференциальное уравнение вынужденных поперечных колебаний балки постоянного сечения при гармонической нагрузке и учете внутреннего поглощения энергии по теории Е. С. Сорокина имеет вид:

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (1 + i\gamma)\,EJ\,\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = P(x)\,e^{i\omega t}. \qquad (7.69)$$

Здесь γ — коэффициент неупругого сопротивления материала.

Остальные обозначения приведены выше [см. пояснения обозначений к формулам (7.43) и (7.67)].

Для функции $W(\xi)$, характеризующей форму вынужденных колебаний балки при действии сосредоточенной силы $P(t) = P\sin(\omega t + \chi)$, решение уравнения (7.69) при разложении решения по нормированным формам собственных колебаний будет иметь вид:

$$W(\xi) = \frac{Pl^3}{\alpha_1^4 EJ}\sum_{S=1}^{\infty}\frac{X_S(\xi)\,X_S(\xi_a)}{\frac{\alpha_S^4}{\alpha_1^4}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\theta_S^2}\right)^2+\gamma^2}}\sin(\omega t - v_S). \qquad (7.70)$$

Здесь

$v_S = \operatorname{arctg}\dfrac{\gamma}{1-\omega^2/\theta_S^2}$ — угол сдвига фазы между силой и перемещением по S-й форме собственных колебаний.

Максимальное значение динамического перемещения (амплитуда колебаний) в сечении $\xi = x/l$ при действии в сечении $\xi_a = a/l$ сосредоточенной гар-

---

[1] Подробные таблицы балочных функций и их производных для однопролетных и неразрезных равнопролетных балок со свободно опертыми концами приведены, например, в [19, 22].

Таблица 7.11

Амплитудные значения перемещений и усилий в изгибаемых балках при вынужденных колебаниях, вызываемых сосредоточенной гармонической силой или моментом

Амплитудное значение в сечении $\xi = \frac{x}{l}$	При отсутствии внутреннего поглощения энергии колебаний	
	при действии сосредоточенной гармонической силы $P(t) = P \sin(\omega t + \chi)$ в сечении $\xi_a = \frac{a}{l}$	при действии сосредоточенного гармонического момента $M(t) = M \sin(\omega t + \chi)$ в сечении $\xi_a = \frac{a}{l}$
Перемещение $W(\xi)$	$\frac{Pl^3}{\alpha_1^4 EJ} \sum\limits_{S=1}^{\infty} X_S(\xi)\, X_S(\xi_a)\, \rho_S$	$\frac{Ml^2}{\alpha_1^4 EJ} \sum\limits_{S=1}^{\infty} X_S(\xi)\, X'_S(\xi_a)\, \rho_S$
Угол поворота $W'(\xi)$	$\frac{Pl^2}{\alpha_1^4 EJ} \sum\limits_{S=1}^{\infty} X'_S(\xi)\, X_S(\xi_a)\, \rho_S$	$\frac{Ml}{\alpha_1^4 EJ} \sum\limits_{S=1}^{\infty} X'_S(\xi)\, X'_S(\xi_a)\, \rho_S$
Изгибающий момент $M(\xi)$	$-\frac{Pl}{\alpha_1^4} \sum\limits_{S=1}^{\infty} X''_S(\xi)\, X_S(\xi_a)\, \rho_S$	$-\frac{M}{\alpha_1^4} \sum\limits_{S=1}^{\infty} X''_S(\xi)\, X'_S(\xi_a)\, \rho_S$
Поперечная сила $Q(\xi)$	$-\frac{P}{\alpha_1^4} \sum\limits_{S=1}^{\infty} X'''_S(\xi)\, X_S(\xi_a)\, \rho_S$	$-\frac{M}{\alpha_1^4 l} \sum\limits_{S=1}^{\infty} X'''_S(\xi)\, X'_S(\xi_a)\, \rho_S$
$\rho_S = \dfrac{1}{\dfrac{\theta_S^2}{\theta_1^2}\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\theta_S^2}\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{\alpha_S^4}{\alpha_1^4}\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\theta_S^2}\right)}$		

Продолжение табл. 7.11

Амплитудное значение в сечении $\xi = \frac{x}{l}$	При наличии внутреннего поглощения энергии колебаний			
	при действии сосредоточенной гармонической силы $P(t) = P\sin(\omega t + \chi)$ в сечении $\xi_a = \frac{a}{l}$		при действии сосредоточенного гармонического момента $M(t) = M\sin(\omega t + \chi)$ в сечении $\xi_a = \frac{a}{l}$	
Перемещение $W(\xi)$	$\frac{Pl^3}{\alpha_1^4 EJ}\sqrt{U_{pa}^2(\xi) + V_{pa}^2(\xi)}$	$U_{pa}(\xi) = \sum_{S=1}^{\infty} X_S(\xi) X_S(\xi_a) \times \rho_{S\gamma} \sin\nu_S;$ $V_{pa}(\xi) = \sum_{S=1}^{\infty} X_S(\xi) X_S(\xi_a) \times \rho_{S\gamma} \cos\nu_S$	$\frac{Ml^2}{\alpha_1^4 EJ}\sqrt{U_{Ma}^2(\xi) + V_{Ma}^2(\xi)}$	$U_{Ma}(\xi) = \sum_{S=1}^{\infty} X_S(\xi) X'_S(\xi_a) \times \rho_{S\gamma} \sin\nu_S;$ $V_{Ma}(\xi) = \sum_{S=1}^{\infty} X_S(\xi) X'_S(\xi_a) \times \rho_{S\gamma} \cos\nu_S$
Угол поворота $W'(\xi)$	$\frac{Pl^2}{\alpha_1^4 EJ}\sqrt{U'^2_{pa}(\xi) + V'^2_{pa}(\xi)}$	$U'_{pa}(\xi) = \sum_{S=1}^{\infty} X'_S(\xi) X_S(\xi_a) \times \rho_{S\gamma} \sin\nu_S;$ $V'_{pa}(\xi) = \sum_{S=1}^{\infty} X'_S(\xi) X_S(\xi_a) \times \rho_{S\gamma} \cos\nu_S$	$\frac{Ml}{\alpha_1^4 EJ}\sqrt{U'^2_{Ma}(\xi) + V'^2_{Ma}(\xi)}$	$U'_{Ma}(\xi) = \sum_{S=1}^{\infty} X'_S(\xi) X'_S(\xi_a) \times \rho_{S\gamma} \sin\nu_S;$ $V'_{Ma}(\xi) = \sum_{S=1}^{\infty} X'_S(\xi) X'_S(\xi_a) \times \rho_{S\gamma} \cos\nu_S$

Изгибающий момент $M(\xi)$	$-\frac{Pl}{\alpha_1^4}\sqrt{U''^{2}_{pa}(\xi)+V''^{2}_{pa}(\xi)}$	$U''_{pa}(\xi)=\sum_{S=1}^{\infty} X''_S(\xi)\,X_S(\xi_a)\times$ $\times\rho_{S\gamma}\sin\nu_S$; $V''_{pa}(\xi)=\sum_{S=1}^{\infty} X''_S(\xi)\,X_S(\xi_a)\times$ $\times\rho_{S\gamma}\cos\nu_S$	$-\frac{M}{\alpha_1^4}\sqrt{U''^{2}_{Ma}(\xi)+V''^{2}_{Ma}(\xi)}$	$U''_{Ma}(\xi)=\sum_{S=1}^{\infty} X''_S(\xi)\,X'_S(\xi_a)\times$ $\times\rho_{S\gamma}\sin\nu_S$; $V''_{Ma}(\xi)=\sum_{S=1}^{\infty} X''_S(\xi)\,X'_S(\xi_a)\times$ $\times\rho_{S\gamma}\cos\nu_S$
Поперечная сила $Q(\xi)$	$-\frac{P}{\alpha_1^4}\sqrt{U'''^{2}_{pa}(\xi)+V'''^{2}_{pa}(\xi)}$	$U'''_{pa}(\xi)=\sum_{S=1}^{\infty} X'''_S(\xi)\,X_S(\xi_a)\times$ $\times\rho_{S\gamma}\sin\nu_S$; $V'''_{pa}(\xi)=\sum_{S=1}^{\infty} X'''_S(\xi)\,X_S(\xi_a)\times$ $\times\rho_{S\gamma}\cos\nu_S$	$-\frac{M}{\alpha_1^4 l}\sqrt{U'''^{2}_{Ma}(\xi)+V'''^{2}_{Ma}(\xi)}$	$U'''_{Ma}(\xi)=\sum_{S=1}^{\infty} X'''_S(\xi)\,X'_S(\xi_a)\times$ $\times\rho_{S\gamma}\sin\nu_S$; $V'''_{Ma}(\xi)=\sum_{S=1}^{\infty} X'''_S(\xi)\,X'_S(\xi_a)\times$ $\times\rho_{S\gamma}\cos\nu_S$

$$\rho_{S\gamma}=\frac{1}{\frac{\theta_S^2}{\theta_1^2}\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\theta_S^2}\right)^2+\gamma^2}}=\frac{1}{\frac{\alpha_S^4}{\alpha_1^4}\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\theta_S^2}\right)^2+\gamma^2}};\quad \nu_S=\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{1-\frac{\omega^2}{\theta_S^2}}.$$

Примечание. При пользовании формулами таблицы и формулами (7.67), (7.68) и (7.71) следует иметь в виду, что: 1) значения функций $X_S(\xi_a)$ и $X_S(\xi_a)$ всегда предполагаются положительными для всех форм колебаний, т. е. направление перемещения или угла поворота в сечении, где приложена сила или момент совпадает с направлением действия силы; 2) знаки функций $X_S(\xi)$, $X'_S(\xi)$, $X''_S(\xi)$, $X'''_S(\xi)$ определяются S-й формой колебания при условии, что $X_S(\xi_a)>0$ (при действии сосредоточенной силы в сечении a) или $X'_S(\xi_a)>0$ (при действии сосредоточенного момента в сечении a); 3) знак коэффициента $\rho_{S\gamma}$ определяется знаком выражения $1-\frac{\omega^2}{\theta_S^2}$.

моинческой силы и заданном отношении частот ω/θ_S определяется выражением

$$W(\xi) = \frac{Pl^3}{\alpha_1^4 EJ} \sqrt{U_{pa}^2(\xi) + V_{pa}^2(\xi)} . \qquad (7.71)$$

Здесь

$$U_{pa}(\xi) = \sum_{S=1}^{\infty} \frac{X_S(\xi) X_S(\xi_a)}{\frac{\alpha_S^4}{\alpha_1^4} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\theta_S^2}\right)^2 + \gamma^2}} \sin \nu_S ;$$

$$V_{pa}(\xi) = \sum_{S=1}^{\infty} \frac{X_S(\xi) X_S(\xi_a)}{\frac{\alpha_S^4}{\alpha_1^4} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\theta_S^2}\right)^2 + \gamma^2}} \cos \nu_S .$$

Следует еще раз отметить, что в областях, удаленных от резонансных отношений частот ω/θ_S, влияние затухания на амплитуды вынужденных колебаний незначительно и в этих областях расчет можно производить без учета затухания. Все упрощения расчета, описанные ранее, вполне применимы при вынужденных колебаниях систем с распределенными параметрами.

В табл. 7.11 приведена сводка формул для определения амплитуд колебаний, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил при действии на балку одной сосредоточенной силы или одного момента, изменяющихся во времени по гармоническому закону.

7.5. Колебания плоских рам

Рассматриваются общие методы определения частот и форм собственных колебаний плоских статически неопределимых рам. При этом влияние переменных продольных сил на изгибающие моменты, влияние сдвига и инерции вращения поперечных сечений не учитываются.

Метод сил. При динамическом расчете рам по методу сил основная система для заданной системы образуется путем отбрасывания связей, так же как при статическом расчете, и заменой их реакциями. При установившихся колебаниях от гармонической нагрузки с частотой ω все внутренние силы и перемещения будут изменяться по гармоническому закону с частотой ω. Следовательно, реакции в отброшенных связях будут $X_1(t) = X_1 \sin \omega t$, ..., $X_n(t) = X_n \sin \omega t$, где $X_1, \ldots, X_n$ — амплитуда усилия неизвестной реакции связи.

Как известно [40], система канонических уравнений метода сил составляется из условия отсутствия перемещения в направлении отброшенных связей. Поэтому для k-й отброшенной связи каноническое уравнение будет иметь вид:

$$\delta_{k1} X_1 + \cdots + \delta_{km} X_m + \cdots + \delta_{kk} X_k + \cdots + \delta_{kn} X_n + \Delta_{kp} = 0;$$
$$k = 1, \ldots, n, \qquad (7.72)$$

где δ_{km} — амплитуда перемещения по направлению неизвестной реакции отброшенной связи X_k от единичной силы $X_m = 1 \cdot \sin \omega t$; Δ_{kp} — амплитуда перемещения от внешней гармонической нагрузки в том же направлении.

Таблица 7.12

Единичные реакции r_{ik} и свободные члены R_{kp}

Тип смещения	Схема стержня и расчетные формулы
Единичный поворот	$r_{kk} = \frac{\alpha EJ\,(SV - TU)}{U^2 - TV}$; $r_{ik} = \frac{\alpha^2 EJ\,(SU - V^2)}{U^2 - TV}$; $r_{mk} = \frac{\alpha EJV}{U^2 - TV}$; $r_{nk} = \frac{-\alpha^2 EJU}{U^2 - TV}$
—	$r_{kk} = \frac{\alpha EJ\,(T^2 - V^2)}{SV - TU}$; $r_{ik} = \frac{\alpha^2 EJ\,(UV - ST)}{SV - TU}$; $r_{nk} = \frac{\alpha^2 EJT}{SV - TU}$; $\varphi = -\frac{V}{SV - TU}$
Единичное смещение	$r_{ii} = \frac{\alpha^3 EJ\,(ST - UV)}{U^2 - TV}$; $r_{ki} = \frac{\alpha^2 EJ\,(V^2 - SU)}{U^2 - TV}$; $r_{mi} = \frac{\alpha^2 EJU}{U^2 - TV}$; $r_{ni} = -\frac{\alpha^3 EJT}{U^2 - TV}$
То же	$r_{ii} = \frac{\alpha^3 EJ\,(U^2 - S^2)}{SV - TU}$; $r_{ki} = \frac{\alpha^2 EJ\,(ST - UV)}{SV - TU}$; $r_{ni} = \frac{\alpha^3 EJS}{SV - TU}$; $\varphi = -\frac{\alpha U}{SV - TU}$
—	$R_{kp} = \frac{P}{2\alpha} \cdot \frac{U_a}{S_a T_a - U_a V_a}$; $R_{ip} = \frac{P}{2} \cdot \frac{T_a}{S_a T_a - U_a V_a}$
—	$R_{kp} = P\,\frac{U_{2a} T_a - S_{2a} V_a}{U_{2a} T_{2a} - S_{2a} V_{2a}}$; $R_{ip} = \frac{P}{\alpha} \cdot \frac{T_{2a} V_a - V_{2a} T_a}{U_{2a} T_{2a} - S_{2a} V_{2a}}$

Единичные перемещения δ_{km} и свободные члены Δ_{kp} определяются по формулам:

$$\delta_{km} = \Sigma \int \overline{M}_k \frac{\overline{M}_m}{EJ} dS; \quad \Delta_{kp} = \Sigma \int \overline{M}_k \frac{M_p}{EJ} dS. \tag{7.73}$$

Здесь $\overline{M}k$ — изгибающие моменты от статической силы $X_k=1$; $\overline{M}_m$ и M_p — амплитуды изгибающих моментов от динамической силы $X_m = 1\cdot\sin\omega t$ и от заданной внешней нагрузки.

Для определения частоты собственных колебаний в уравнении (7.72) принимается $\Delta_{kp}=0$. Тогда канонические уравнения будут однородными, и для получения значений неизвестных усилий в отброшенных связях X_m, отличных от нуля, необходимо, чтобы определитель из коэффициентов этих канонических уравнений был равен нулю. Раскрытие определителя дает трансцендентное уравнение для определения частот собственных колебаний рамы.

Метод сил для практического динамического расчета рам в общем случае является чрезвычайно сложным и применяется в случаях, когда вычисление коэффициентов канонических уравнений не представляет затруднений [24].

Метод перемещений (деформаций) является одним из наиболее удобных методов динамического расчета рамных систем [38, 45, 50].

Основная система образуется путем наложения дополнительных связей, препятствующих поворотам и линейным смещениям узлов рамы. За «лишние» неизвестные принимаются линейные и угловые смещения узлов рамы, для определения которых составляются канонические уравнения, выражающие условие равенства нулю реакций в наложенных связях.

Каноническое уравнение для k-й связи:

$$r_{k1} Z_1 + \cdots + r_{km} Z_m + \cdots + r_{kk} Z_k + \cdots + r_{kn} Z_n + R_{kp} = 0; \quad k=1,\ldots,n. \tag{7.74}$$

Здесь r_{km} — амплитуда реакции, возникающей в k-й связи при единичном смещении в направлении m-й связи; Z_k — «лишнее» неизвестное: амплитуда линейного или углового смещения k-го узла рамы; R_{kp} — амплитуда реакции k-й связи от внешней гармонической нагрузки.

Число уравнений (7.74) будет равно числу связей, введенных для закрепления системы. Реакции r_{km} и R_{kp} определяются по данным табл. 7.12 [4, 38], в которой S, T, U, V — функции Крылова для соответствующего стержня рамы.

Собственные колебания рамы описываются системой уравнений (7.74), в которой принимают $R_{kp}=0$.

Приравнивание нулю определителя однородных уравнений метода перемещений позволяет получить частотное уравнение. Примеры динамического расчета плоских рам имеются в ряде работ [14, 28, 32, 38, 45, 50, 51].

Точные методы динамического расчета рам как систем с распределенными параметрами даже при использовании ЭВМ являются чрезвычайно трудоемкими. В практических инженерных расчетах рам целесообразно использовать приближенные методы, например, рассматривая рамы как системы с небольшим числом степеней свободы.

7.6. Приближенные методы определения частот собственных колебаний

Необходимость приближенного вычисления частот собственных колебаний возникает в связи с трудностями, а иногда и практической невозможностью точного определения частот при сложных конструктивных схемах сооружений. Одним из наиболее простых приближенных методов динамического расчета реальных конструкций является расчет таких конструкций, как систем с конечным числом степеней свободы.

Ниже приводятся некоторые формулы и методы приближенного определения частот собственных колебаний без приведения расчетной схемы сооружения к системе с дискретными массами.

Формула Дункерлея. В первом приближении круговая частота θ основного тона собственных колебаний системы, загруженной сосредоточенными и распределенными массами, может быть определена по формуле

$$\frac{1}{\theta^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_i^2} + \frac{1}{\theta_0^2}, \tag{7.75}$$

где θ_i — круговая частота собственных колебаний системы в предположении ее загружения только одной сосредоточенной i-й массой, вычисляемая по (7.2); θ_0 — круговая частота собственных колебаний по основному тону системы без сосредоточенных масс (т. е. при действии только распределенных масс), вычисляемая любым методом. Приближенное значение частоты θ_0 может быть определено из условия

$$\frac{1}{\theta_0^2} = \int_0^l m(x)\, \delta_{ii}(x)\, dx,$$

где $\delta_{ii}(x)$ — прогиб в i-м сечении от единичной сосредоточенной силы, приложенной в этом же сечении.

Формула (7.75) дает значение частоты колебаний с недостатком, оценка величины которого возможна только из сравнения результатов, полученных другими методами. В отдельных случаях результаты вычисления частоты по формуле Дункерлея являются ошибочными. В связи с этим при вычислениях по формуле (7.75) рекомендуется применять параллельно другие методы вычислений.

Метод Рэлея. Метод основывается на принципе сохранения энергии колебаний при свободных колебаниях идеальной упругой системы. В соответствии с этим принципом максимальная потенциальная энергия $\Pi_{\text{макс}}$, которой обладает система при наибольшем ее отклонении от положения равновесия, полностью переходит в кинетическую энергию колебаний $K_{\text{макс}}$, которую система имеет при прохождении через положение равновесия

$$K_{\text{макс}} = \Pi_{\text{макс}}. \tag{7.76}$$

В связи с этим метод Рэлея применяется для вычисления частот собственных колебаний систем с малым рассеиванием энергии колебаний, когда влиянием последнего на частоту можно пренебречь.

Для системы с сосредоточенными и распределенной массами при линейных перемещениях кинетическая энергия определяется выражением

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} M_i V_i^2 + \frac{1}{2} \int_L m(x)\, [V(x)]^2\, dx. \tag{7.77}$$

Здесь M_i — сосредоточенная масса в сечении i; V_i, $V(x)$ — скорости колебаний; $m(x)$ — распределенная масса.

Потенциальная энергия системы зависит от вида напряженного состояния. В табл. 7.13 приведены формулы для вычисления потенциальной энергии упругого прямолинейного призматического стержня. В случае если система состоит из нескольких стержней, то ее потенциальная энергия определяется суммой энергий отдельных стержней.

При определении потенциальной энергии системы при совместном действии нескольких нагрузок следует иметь в виду, что потенциальная энергия

Таблица 7.13

Потенциальная энергия упругих деформаций стержня

Напряженное состояние	Потенциальная энергия П
Растяжение или сжатие	$\frac{N\Delta l}{2}=\frac{N^2 l}{2EF}=\frac{EF(\Delta l)^2}{2l}$
Поперечный изгиб без учета энергии деформаций сдвига	$\int_0^l \frac{[M(x)]^2 dx}{2EJ(x)}=\int_0^l \frac{EJ(x)}{2}\left[\frac{d^2X(x)}{dx^2}\right]^2 dx$
Изгиб, сжатие или растяжение и сдвиг	$\int_0^l \frac{[M(x)]^2 dx}{2EJ(x)}+\int_0^l \frac{[N(x)]^2 dx}{2EF(x)}+\int_0^l \frac{\mu[Q(x)]^2 dx}{2GF(x)}$

Обозначения: N — продольная сила, приложенная к стержню; Δl — продольная деформация стержня (удлинение или укорочение от силы N); l — длина стержня; F — площадь поперечного сечения стержня; $M(x)$ — поперечный изгибающий момент; $Q(x)$ — поперечная сила; E, G — модули продольной и поперечной упругости; $X(x)$ — функция, определяющая упругую линию стержня при его деформациях; μ — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению. Для прямоугольных сечений $\mu=1{,}2$; для круглых $\mu=1{,}185$; для прокатных двутавровых балок $\mu=2{,}03\div2{,}39$.

в этом случае не равна сумме потенциальных энергий, вызываемых каждой силой в отдельности.

Сущность метода Рэлея заключается в том, что истинную форму колебаний заменяют подходящей формой, исходя из условий задачи. При этом предполагают, что колебания имеют гармонический характер

$$y(x,t)=X(x)\cdot\sin(\theta t+\varepsilon).$$

Дифференцирование по времени и подстановка в (7.77) позволяет получить максимальное значение кинетической энергии колебаний системы:

$$K_{\text{макс}}=\frac{1}{2}\theta^2\left\{\sum_{i=1}^{n} M_i[X(x_i)]^2+\int_L m(x)[X(x)]^2dx\right\}.$$

Здесь θ — круговая частота собственных колебаний; $X(x)$ — функция, которой аппроксимируется упругая линия при колебаниях, принимаемая по возможности близкой к истинной форме колебаний и удовлетворяющей кинематическим (если возможно и силовым) граничным условиям.

Часто для функции $X(x)$ принимают упругую линию от статического действия нагрузки на систему.

Из условия (7.76) квадрат круговой частоты собственных колебаний будет:

$$\theta^2=\frac{2\Pi_{\text{макс}}}{\sum_{i=1}^{n} M_i[X(x_i)]^2+\int_L m(x)[X(x)]^2dx}. \qquad (7.78)$$

Частота собственных колебаний по методу Рэлея определяется с избытком. Превышение приближенного значения частоты над ее точным значением не может быть установлено без привлечения других методов вычисления. Точность определения частоты зависит от выбора функции $X(x)$. Метод применяется, как правило, для вычисления основной частоты, однако в случае, если для $X(x)$ принята функция, близкая не к первой, а к более высокой

форме собственных колебаний, то и вычисленная по (7.78) частота будет соответствовать этой форме.

Метод Ритца является дальнейшим развитием метода Рэлея. Метод позволяет вычислить как первую основную частоту собственных колебаний, так и частоты более высоких тонов. При этом можно получить ряд последовательно все более точных приближений, для чего рассматривается не одно семейство функций, а несколько семейств, каждое из которых шире предыдущего, причем каждое последующее семейство включает все функции предыдущего семейства. Обычно функция, аппроксимирующая форму упругой линии при колебаниях, принимается в виде

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x), \tag{7.79}$$

коэффициенты которого a_i выбираются из условия максимума правой части выражения (7.78), а именно

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \cdot \frac{П_{макс}}{\sum\limits_{j=1}^{n} M_j [X(x_j)]^2 + \int\limits_L m(x) [X(x)]^2 dx} = 0. \tag{7.80}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

При этом функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ должны быть линейно независимыми, удовлетворять граничным (по крайней мере кинематическим) условиям и соответствовать возможным формам колебаний.

Хорошие результаты получаются, если в качестве функций $\varphi_i(x)$ используются балочные функции, т. е. формы собственных колебаний однородного стержня при аналогичных условиях закрепления [46].

С использованием данных табл. 7.13 условие (7.80) для поперечных колебаний стержня переменного сечения с сосредоточенными и распределенными массами можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \cdot \frac{\int\limits_L EJ(x) [X''(x)]^2 dx}{\sum\limits_{j=1}^{n} M_j [X(x_j)]^2 + \int\limits_L m(x) [X(x)]^2 dx} = 0. \tag{7.81}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Реализация условий (7.80) или (7.81) дает систему однородных уравнений, линейных относительно параметров a_i. Число уравнений будет равно числу параметров a_i выражения (7.79). Эта система уравнений может иметь решения, отличающиеся от нуля, только в случае, если ее определитель будет равен нулю. Условие равенства определителя нулю приводит к уравнению n-й степени, из которого можно определить частоты различных тонов колебаний.

Для первого приближения обычно задаются одним членом суммы (7.79), а именно $\varphi_1(x)$ с коэффициентом a_1. Такое приближение позволяет вычислить только первую (основную) частоту собственных колебаний. Для второго приближения задаются двумя членами суммы (7.79) $X(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x)$. В результате получают две частоты собственных колебаний, из которых первая (основная) частота будет вычислена с точностью второго приближения, а вторая — с точностью первого приближения.

Если функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ выбраны так, что они соответствуют возможным симметричным формам колебаний, то вторая частота будет относиться также к симметричной форме колебаний и, следовательно, если система может иметь вторую несимметричную форму колебаний, то частота этой формы будет при вычислениях утеряна.

Вычисленные по методу Ритца частоты собственных колебаний превышают точные значения частот, поскольку замена истинной формы колебаний «подходящей» формой эквивалентна наложению на систему дополнительных связей, увеличивающих жесткость системы.

Метод Бубнова—Галеркина. При применении метода Бубнова—Галеркина также задаются системой некоторых линейно независимых функций $\varphi_i(x)$. Однако в отличие от подобных функций, принимаемых в методе Ритца, в этом случае аппроксимирующие функции должны удовлетворять как кинематическим, так и силовым граничным условиям.

Решение дифференциального уравнения колебаний ищется в виде суммы (7.79). Подстановка решения (7.79) в уравнение, например, в одно из уравнений (7.44), (7.49), (7.55) и (7.58) с последующим поочередным умножением полученного уравнения на одну из функций $\varphi_i(x)$ и интегрированием в пределах длины стержня приводит к системе алгебраических однородных уравнений, линейных относительно постоянных параметров a_i. При этом число уравнений будет равно числу параметров a_i. Условие нетривиального решения системы однородных алгебраических уравнений приводит к характеристическому уравнению n-й степени для вычисления частот собственных колебаний системы. При вычислении первой (основной) частоты с достаточной для практики точностью обычно можно ограничиться в ряде (7.79) только одним членом, а для уточнения расчета — двумя членами.

При вычислении частот высших тонов колебаний в сумме (7.79) необходимо учитывать несколько членов, число которых определяется сравнением результатов двух последовательных вычислений.

Все замечания относительно выбора аппроксимирующих функций, сделанные при описании метода Ритца, должны быть учтены также и при выборе функций метода Бубнова—Галеркина.

7.7. Динамическая устойчивость призматических стержней

При действии на стержень продольных периодических сил, приложенных центрально, возможно возникновение значительных поперечных колебаний стержня. Это явление возбуждения поперечных колебаний при действии переменных продольных сил называется потерей динамической устойчивости или параметрическим резонансом [8, 13, 14]. Параметрические колебания описываются дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами.

Основное отличие параметрического резонанса от обычного резонанса конструкции, воспринимающей периодическую динамическую нагрузку, заключается в следующем.

1. Динамическая неустойчивость возникает не при одном (для данной S-й формы колебаний) отношении частоты вынужденных колебаний ω к частоте собственных поперечных колебаний θ_S стержня, а при отношениях, близких к:

$$\frac{\omega}{\theta_S}=2,\quad 1,\ \frac{2}{3},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{2}{5},\ \ldots,\ \frac{2}{k},\ \ldots,\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{7.82}$$

При этом в реальных стержнях, обладающих затуханием, наиболее легко потеря динамической устойчивости возникает при вдвое большей частоте возмущающей силы по отношению к собственной частоте поперечных колебаний стержня. Объясняется это тем, что для возбуждения параметрических колебаний в системе с рассеиванием энергии помимо резонансных соотношений (7.82) необходимо также, чтобы амплитуда изменения продольных сил достигала некоторого значения, называемого часто «порогом» возбуждения. Наименьший «порог» возбуждения параметрических колебаний наблюдается при $\omega/\theta_S=2$. С уменьшением этого отношения «порог» возбуждения увеличивается и возбуждение колебаний при $\omega/\theta_S=1$; $2/3, \ldots$ все более и более затрудняется. Практическое значение имеют области вблизи отношения частот $\omega/\theta_S=2$; 1.

2. Для возникновения потери динамической устойчивости необходимым фактором является наличие некоторых начальных несовершенств, например искривления оси стержня, начального эксцентрицитета продольных периодических сил и т. п.

3. Ограниченность амплитуды резонансных параметрических колебаний некоторой конечной величиной происходит вследствие нелинейных сопротивлений, а также нелинейности параметров стержня (нелинейная упругость, нелинейная инерционность, нелинейное затухание). Учет только линейного закона затухания при параметрическом резонансе не ограничивает безграничного роста амплитуд.

Для некоторых конструкций помимо потери динамической устойчивости элементов в целом возможна местная динамическая неустойчивость. К таким конструкциям можно отнести, например, тонкостенные трубы.

Явления потери динамической устойчивости стержней наиболее вероятны для гибких сжатых элементов, гибкость которых приближается к предельной, ограниченной нормами проектирования. В связи с указанным в [20] дается рекомендация проверки связей и отдельных стержней ферм на динамическую устойчивость.

Явление потери динамической устойчивости возможно также для гибких конструкций, применяемых в авиастроении, машиностроении и других областях техники.

Различные случаи расчета стержневых и тонкостенных систем на динамическую устойчивость рассмотрены в работах [8, 13].

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня постоянного сечения при действии продольной силы $P(t) = P_0 + P_{дин} \cos \omega t$ в линейном приближении имеет вид:

$$EJ\,\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + (P_0 + P_{дин} \cos \omega t)\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \qquad (7.83)$$

Здесь P_0 — продольная статическая сила, приложенная центрально; $P_{дин}$ — амплитуда продольной динамической силы; ω — круговая частота возмущающей силы.

При решении уравнения (7.83) методом Бубнова—Галеркина в первом приближении получаем:

$$\frac{d^2 T_S}{dt^2} + \theta_S^2 \left(1 + \frac{\dfrac{P_{дин}}{P_S}}{1 - \nu_S \dfrac{P_0}{P_S}} \cos \omega t \right) T_S = 0. \qquad (7.84)$$

Здесь

$$\theta_S = \theta_{0S} \sqrt{1 - \nu_S \frac{P_0}{P_S}}; \qquad P_S = \frac{EJ\alpha_S^2}{l^2}; \qquad \theta_{0S} = \frac{\alpha_S^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{q}};$$

θ_{0S} — круговая частота собственных поперечных колебаний стержня в $сек^{-1}$ без учета действия продольной силы; α_S — корень характеристического уравнения поперечных колебаний стержня, значения которого приведены в табл. 7.7; ν_S — коэффициент, характеризующий граничные условия и тон колебания стержня как балки (табл. 7.14); P_S — постоянный коэффициент, совпадающий для шарнирно опертого стержня со значением эйлеровой критической силы; l — пролет.

Уравнение типа (7.84) называется уравнением Матье. Его решением определяется закон изменения поперечных перемещений стержня во времени. При этом в зависимости от соотношения параметров уравнения θ_S, ω, $\dfrac{P_{дин}/P_S}{1 - \nu_S P_0/P_S}$ решение может быть ограниченным — «устойчивым» или неограниченно возрастающим — «неустойчивым».

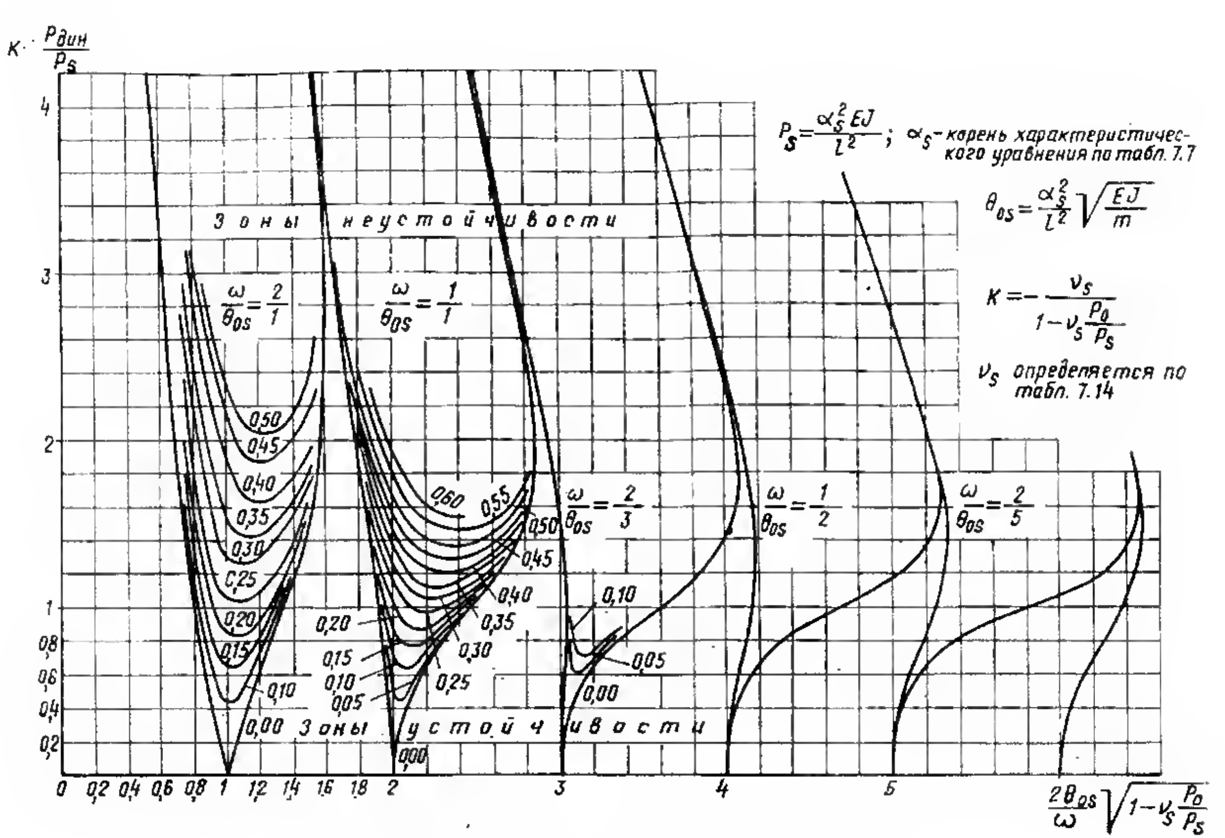


Рис. 7.8. Зоны динамической устойчивости стержня

Таблица 7.14

Значения коэффициента ν_S

Схема	Номер тона S	ν_S	Схема	Номер тона S	ν_S
	1	−1,0		1	−1,3204
	2	−1,0		2	−0,9499
	3	−1,0		3	−1,2585
	4	−1,0		4	−1,2339
	5	−1,0		5	−1,0283
	1	−0,5512		1	−0,7233
	2	−0,7467		2	−0,8598
	3	−0,8181		3	−0,9020
	4	−0,8555		4	−0,9250
	5	−0,8843		5	−0,9394

При неустойчивых решениях амплитуды поперечных колебаний возрастают неограниченно, что соответствует потере динамической устойчивости (параметрическому резонансу).

На рис. 7.8 приведены зоны динамической неустойчивости [14] для призматического стержня постоянного сечения с произвольными граничными условиями и нагрузкой, изменяющейся по косинусоидальному закону. График зон динамической неустойчивости построен с учетом затухания по линейному закону в предположении, что силы внутреннего сопротивления пропорциональны первой степени скорости деформаций. Кривые $\mu=0{,}00$ справедливы для случая отсутствия затухания, а кривые $\mu\neq 0{,}00$ — для того или иного затухания. В практических расчетах рекомендуется пользоваться границами зон неустойчивости при $\mu=0$. При этом если стержень сжат статической силой, то P_0 берется со знаком «минус», а если растянут, то со знаком «плюс». Коэффициент ν_S во всех случаях имеет знак «минус» (см. табл. 7.14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьев И. В., Тимофеев П. Г. Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование. «Машиностроение», 1965.

2. Бабаев Н. Н. О поперечных колебаниях стержня переменного сечения с учетом деформаций сдвига и сил внутреннего неупругого сопротивления, Инженерный сборник, т. 22. Изд-во АН СССР, 1955.

3. Бабаков И. М. Теория колебаний. Гостехтеоретиздат, 1958.

4. Безухов Н. И., Лужин О. В. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. Госстройиздат, 1963.

5. Белоус А. А. Колебания и статическая устойчивость плоских и пространственных рам. В сб.: «Расчет пространственных конструкций», вып. III. Госстройиздат, 1955.

6. Бернштейн С. А. Основы динамики сооружений. Госстройиздат, 1941.

7. Бернштейн С. А., Керопян К. К. Определение частот колебаний стержневых систем методом спектральной функции. Госстройиздат, 1960.

8. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехтеоретиздат, 1956.

9. Болотин В. В. Параметрические колебания упругих систем, т. 3, гл. 6. Справочник «Прочность, устойчивость, колебания». Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. «Машиностроение», 1968.

10. Вондарь Н. Г. Устойчивость и колебания параболических арок. Инженерный сборник, т. XIII. Изд-во АН СССР, ОТН, 1952.

11. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Избранные труды, т. II. Изд-во АН СССР, 1963.

12. Воронцов Г. В. Свободные и вынужденные колебания стержней и рам. Новочеркасский политехнический институт, 1963.
13. Гольденблат И. И. Динамическая устойчивость сооружений. Госстройиздат, 1948.
14. Гольденблат И. И., Сизов А. М. Справочник по расчету строительных конструкций на устойчивость и колебания. Госстройиздат, 1952.
15. Гогенемзер К., Прагер В. Динамика сооружений. ОНТИ, 1936.
16. Завриев К. С. Динамика сооружений. Трансжелдориздат, 1946.
17. Ивович В. А. Переходные матрицы в динамике упругих систем (справочное пособие). Машгиз, 1969.
18. Инструкция по проектированию и расчету несущих конструкций зданий под машины с динамическими нагрузками (И 200-54) (МСПМХП). Госстройиздат, 1955.
19. Инструкция по расчету перекрытий на импульсивные нагрузки (ЦНИИСК). Стройиздат, 1966.
20. Инструкция по расчету покрытий промышленных зданий, воспринимающих динамические нагрузки (ЦНИИСК). Стройиздат, 1967.
21. Инструкция по мерам борьбы с вибрационными воздействиями технологического оборудования при проектировании зданий и сооружений промышленности нерудных строительных материалов. Стройиздат, 1968.
22. Инструкция по расчету несущих конструкций промышленных зданий и сооружений на динамические нагрузки (ЦНИИСК). Стройиздат, 1970.
23. Кин Н. Тонг. Колебания механических систем. «Машиностроение», 1964.
24. Киселев В. А. Строительная механика. Специальный курс. Стройиздат, 1964.
25. Колоушек В. Динамика строительных конструкций. Стройиздат, 1965.
26. Коренев Б. Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях Физматгиз, 1960.
27. Коренев Б. Г., Пановко Я. Г. Динамический расчет сооружений. В сб.: «Строительная механика в СССР. 1917—1967». Под ред. И. М. Рабиновича. Стройиздат, 1969.
28. Коренев В. Г., Сысоев В. И. Динамика сооружений. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический. Под ред. А. А. Уманского. Госстройиздат, 1960.
29. Корчинский И. Л. Расчет строительных конструкций на вибрационную нагрузку. Стройиздат, 1948.
30. Крылов А. Н. Вибрация судов, т. X. Изд-во АН СССР, 1948.
31. Курдюмов А. А. Вибрации корабля. Судпромгиз, 1954.
32. Лисовский А. Колебания прямых стержней и рам. Пер. с польского Г. Н. Вилькова. Под ред. И. Л. Корчинского. Госстройиздат, 1961.
33. Лурье А. И. Методы динамического расчета сооружений. Справочник инженера-проектировщика промсооружений, т. II. Расчетно-теоретический. Госстройиздат, 1934.
34. Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра. Под ред. П. К. Рашевского. Справочная математическая библиотека. Физматгиз, 1962.
35. Новацкий В. Динамика сооружений. Госстройиздат, 1963.
36. Нудельман Я. Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. Гостехиздат, 1949.
37. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. «Машиностроение», 1967.
38. Пановко Я. Г. Свободные и вынужденные колебания стержней и стержневых систем, т. 3, гл. 5. Справочник «Прочность, устойчивость, колебания». Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. «Машиностроение», 1968.
39. Прокофьев И. П., Смирнов А. Ф. Теория сооружений, ч. III. Трансжелдориздат, 1948.
40. Рабинович И. М. Курс строительной механики, т. I, II. Госстройиздат, 1954.
41. Рабинович И. М. Основы динамического расчета сооружений на действие кратковременных и мгновенных сил. Изд. ВИА, 1952.
42. Смирнов А. Ф. Устойчивость и колебания сооружений. Трансжелдориздат, 1958.
43. Смирнов А. Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений. Трансжелдориздат, 1947.
44. Синтко Н. К. Методы расчета сооружений на вибрацию и удар. Госстройиздат, 1953.
45. Синтко Н. К. Динамика сооружений. Госстройиздат, 1960.
46. Сорокин Е. С. Динамика междуэтажных перекрытий. Госстройиздат, 1941.
47. Сорокин Е. С. Метод учета неупругого сопротивления материала при расчете конструкций на колебания. В сб.: «Исследования по динамике сооружений». Под ред. Б. Г. Коренева. Госстройиздат, 1951.
48. Сорокин Е. С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. Госстройиздат, 1956.
49. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. «Наука», 1967.
50. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. «Машиностроение», 1970.
51. Чудновский В. Г. Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем. Киев, Изд-во АН УССР, 1952.

РАЗДЕЛ 8

КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНОК

(Б. Г. Коренев, А. И. Цейтлин)

Пластинкой (тонкой плитой) называется цилиндрическое или призматическое тело, высота (толщина) которого мала по сравнению с остальными размерами. В зависимости от конфигурации основания различают пластинки прямоугольные, круглые, кольцевые, трапециевидные, треугольные и т. п. Пластинки из материала с одинаковыми во всех направлениях механическими свойствами называются изотропными. Если механические свойства материала различны в разных направлениях, то пластинка называется анизотропной. К последнему случаю часто относят также и пластинки с часто расположенными ребрами, ориентированным армированием и т. п. (конструктивная анизотропия).

Обычно рассматривают три основных типа пластинок и плит, с различным отношением толщины к наименьшему размеру основания: 1) толстые плиты; 2) тонкие плиты или «жесткие» пластинки; 3) гибкие пластинки.

Плиту принято считать толстой, если отношение толщины к наименьшему размеру основания превышает $^1/_5$. Напряженное состояние толстых плит описывается общими уравнениями теории упругости. Тонкие плиты («жесткие» пластинки) имеют меньшее отношение, чем $^1/_5$, и их прогибы малы по сравнению с толщиной. Напряженно-деформированное состояние таких плит описывается технической теорией изгиба.

Гибкие пластинки характеризуются малым отношением толщины к размерам в плане и не малыми по сравнению с толщиной прогибами, что приводит к появлению существенных продольных усилий, оказывающих большое влияние на напряженное состояние пластинки.

Такое деление, вообще говоря, является условным, ибо основное значение для определения характера деформирования пластинки имеет не отношение ее толщины к размерам в плане, а отношение толщины к наименьшей длине волны деформирования. Поэтому при изучении свободных колебаний пластинок определение низких частот и форм колебаний обычно основывается на применении технической теории изгиба; для определения сравнительно высоких частот и форм колебаний приходится использовать уточненные теории или общие уравнения теории упругости. Кроме того, применение той или иной теории изгиба пластин, связанной с указанным делением, может зависеть от характера нагружения пластинки и от тех параметров напряженно деформированного состояния, которые определяются в результате расчета.

8.1. Техническая теория изгиба и малые колебания упругих пластинок

Техническая теория изгиба пластинок основывается на следующих допущениях:

1) при деформировании пластинки нормали к срединной плоскости остаются прямыми (гипотеза прямых нормалей);

2) нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности пластинки, отсутствуют.

При этом предполагается также, что деформации пластинки при изгибе остаются малыми, упругими и подчиняющимися закону Гука.

Уравнения движения элементарной призмы, выделенной около точки срединной плоскости с координатами x, y (рис. 8.1), имеют вид:

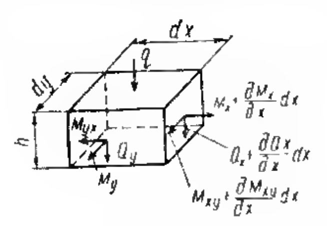


Рис. 8.1

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-q;\\ &\frac{\partial M_x}{\partial x}-\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}=Q_x;\\ &\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=Q_y, \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

где q, m — внешняя нагрузка и масса пластинки на единицу площади; M_x, M_y — изгибающие моменты; M_{xy}, M_{yx} — крутящие моменты; Q_x, Q_y — поперечные силы; w — прогиб (перемещение) пластинки. С помощью закона Гука внутренние усилия в пластинке можно выразить через ее прогиб по формулам:

$$\left.\begin{aligned} &M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\quad M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);\\ &Q_x=-D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w;\quad Q_y=-D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w;\\ &M_{xy}=-M_{yx}=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

Здесь $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластинки; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; h — толщина пластинки; $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа в прямоугольных координатах. Исключая в уравнениях (8.1) поперечные силы, получаем:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-q. \tag{8.3}$$

Подстановка в (8.3) выражений (8.2) в случае, когда пластинка имеет переменную жесткость, дает:

$$D\Delta\Delta w+2\frac{\partial D}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Delta w+2\frac{\partial D}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Delta w+\Delta D\,\Delta w-$$
$$-(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=-m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+q. \tag{8.4}$$

Для пластинки постоянной жесткости уравнение колебаний принимает вид:

$$D\Delta\Delta w+m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q(x,y,t). \tag{8.5}$$

Если в плоскости однородной пластинки действуют продольные силы, то в (8.5) появляются дополнительные члены:

$$D\Delta\Delta w+m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\pm N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\pm N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=q(x,y,t), \tag{8.6}$$

где N_x и N_y — интенсивность продольных сил, параллельных осям x и y соответственно; знак плюс берется при сжимающих силах, знак минус — при растягивающих.

При использовании полярных координат (рис. 8.2) внутренние усилия выражаются через перемещения пластинки по формулам:

$$M_r = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right];$$

$$M_\theta = -D\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right); \tag{8.7}$$

$$M_{r\theta} = -D(1-\nu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial \theta}\right);$$

$$Q_r = -D\frac{\partial}{\partial r}\Delta_r w;\quad Q_\theta = -D\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}\Delta_r w,$$

где $\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ — оператор Лапласа в полярных координатах.

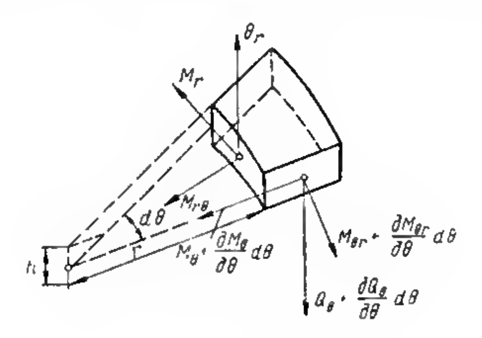


Рис. 8.2

Уравнение колебаний пластинки постоянного сечения в полярных координатах имеет вид:

$$D\Delta_r\Delta_r w + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(r, \theta, t). \tag{8.8}$$

При осесимметричных колебаниях пластинки, когда внешняя нагрузка или начальное возмущение, вызвавшее колебания, не зависят от полярного угла, уравнение (8.8) упрощается:

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 w + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(r, t). \tag{8.9}$$

Моменты и поперечные силы при этом определяются по формулам:

$$M_r = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}\right);\qquad M_\theta = -D\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}\right); \tag{8.10}$$

$$Q_r = -D\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}\right);\qquad Q_\theta = M_{r\theta} = 0.$$

При действии радиальных сил, приложенных к контуру в плоскости пластинки, уравнение колебаний принимает вид:

$$D\Delta_r\Delta_r w \pm N\Delta_r w + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(r, \theta, t),$$

где N — интенсивность продольной силы на контуре; знак плюс берется при сжимающих, минус — при растягивающих силах.

Решение уравнения колебаний пластинки должно удовлетворять граничным условиям, которые зависят от способа закрепления ее краев. Если ограничения накладываются на перемещения и углы поворота, то граничные условия называют геометрическими; граничные условия, налагаемые на моменты и поперечные силы, называют динамическими.

Для прямоугольной пластинки, рассматриваемой в декартовых координатах, граничные условия на краях $x=a$ или $y=b$ задаются в следующем виде.

1. Шарнирно опертый край (прогиб и изгибающий момент равны нулю):

$$\left.\begin{aligned} & w=0;\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \text{ при } x=a; \\ & w=0;\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \text{ при } y=b. \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

Из условия $w=0$ при $x=a$ следует, что $\left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{x=a}=0$, поэтому граничные условия (8.11) можно упростить:

$$\left.\begin{aligned} & w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \text{ при } x=a; \\ & w=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \text{ при } y=b. \end{aligned}\right\} \tag{8.12}$$

2. Защемленный край (прогиб и угол поворота равны нулю):

$$\left.\begin{aligned} & w=\frac{\partial w}{\partial x}=0 \text{ при } x=a; \\ & w=\frac{\partial w}{\partial y}=0 \text{ при } y=b. \end{aligned}\right\} \tag{8.13}$$

3. Свободный край (момент и приведенная поперечная сила

$$Q_x+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \text{ или } Q_y+\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$$

равны нулю):

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0;\quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}=0 \text{ при } x=a; \\ & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0;\quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial y\,\partial x^2}=0 \text{ при } y=b. \end{aligned}\right\} \tag{8.14}$$

4. Смещаемый, но неповорачивающийся край (скользящая заделка) (угол поворота и приведенная поперечная сила равны нулю):

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \text{ при } x=a; \\ & \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}=0 \text{ при } y=b. \end{aligned}\right\} \tag{8.15}$$

Перечисленные граничные условия охватывают основные случаи закрепления краев пластинки. Возможны и более сложные случаи, когда заданы линейные комбинации силовых и кинематических параметров, например при упруго опертом и упруго защемленном крае.

Рассмотренные граничные условия называются однородными. Если же на контуре пластинки заданы кинематические или силовые параметры, то в пра-

вых частях соответствующих равенств появляются заданные функции, и такие граничные условия называются неоднородными.

Для круглых и кольцевых пластинок, рассматриваемых в полярной системе координат, граничные условия на краю $r=a$ имеют вид:

а) защемленный край

$$w(a, \theta, t) = \frac{\partial w}{\partial r}(a, \theta, t) = 0; \tag{8.16}$$

б) свободный край

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right]_{r=a} = 0;\\ &\left[\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{2-\nu}{r^3}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\nu}{r^2}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial r\,\partial \theta^2}\right]_{r=a} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{8.17}$$

в) шарнирно опертый край

$$w(a, \theta, t) = 0; \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}\right]_{r=a} = 0. \tag{8.18}$$

При осесимметричных колебаниях в граничных условиях «б» исчезают производные по полярному углу. Для сплошных пластинок, не имеющих отверстия в начале координат, кроме того, должны ставиться условия в точке $r=0$. При отсутствии сосредоточенной нагрузки в этой точке прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила ограничены и непрерывны. Если в точке $r=0$ действует сосредоточенная сила $P(t)$, то следует положить

$$2\pi r Q|_{r=0} = -P(t)$$

и, следовательно,

$$2\pi D \lim_{r\to 0}\left[r\left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right] = P(t). \tag{8.19}$$

Для пластинки, закрепленной в центре, должно удовлетворяться условие

$$w(0, \theta, t) = 0. \tag{8.20}$$

Потенциальная энергия деформаций пластинки при колебаниях вычисляется по формулам:

в прямоугольных координатах

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint\limits_S D\left\{(\Delta w)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\} ds; \tag{8.21}$$

в полярных координатах

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint\limits_S D\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2\right]\right\} ds. \tag{8.22}$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}\iint\limits_S m\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 ds. \tag{8.23}$$

где s — площадь, занимаемая пластинкой; $ds = dxdy$ — в прямоугольных координатах; $ds = rdrd\theta$ — в полярных координатах.

8.2. Уточненные теории изгиба и колебаний пластинок

Техническая теория изгиба и колебаний пластинок, основанная на гипотезе Кирхгофа—Лява, дает достаточно точные результаты в случае, если отношение толщины пластинки к наименьшей длине волны деформации не превышает $^1/_{10}$. При определении высших частот и форм собственных колебаний или амплитуд вынужденных колебаний при высокочастотном возбуждении эта теория, вообще говоря, неприменима, и пластинка должна рассматриваться как трехмерное упругое тело, колебания которого описываются точными уравнениями теории упругости. Поскольку решение трехмерной динамической задачи теории упругости наталкивается на серьезные трудности, различными авторами были сделаны попытки построить уравнения, которые занимали бы промежуточное положение между уравнениями технической теории и точными уравнениями теории упругости, например уравнений, учитывающих сдвиг, инерцию вращения и т. д. [30, 32] и др.

В прямоугольных координатах x, y, z уточненные уравнения колебаний пластинок, предложенные различными авторами, можно записать в общей форме [14]:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta(\varphi + w) = -\frac{2(1+\nu)}{\beta Eh}\left(q - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right);\\
&\Delta\varphi = -\frac{\nu(1+\nu)}{Eh}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(q - \frac{\rho h}{6}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) +\\
&\quad + \frac{6\beta(1-\nu)}{h^2}(\varphi + w) + \frac{1-\nu^2}{E}\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2};\\
&\Delta\psi = \frac{12\beta}{h^2}\psi + \frac{2(1+\nu)\rho}{E}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},
\end{aligned}\right\} \qquad (8.24)$$

где w — прогиб пластинки; φ, ψ — функции, определяемые следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{h/2} uz\,dz;\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{h/2} vz\,dz.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.25)$$

Компоненты смещений u, v в направлении осей x и y связаны с функциями φ, ψ формулами, учитывающими осредненный поворот и искривление нормали элемента:

$$\left.\begin{aligned}
&u = -[z + f_1(z)]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + f_1(z)\frac{\partial w}{\partial x};\\
&v = -[z + f_1(z)]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + f_1(z)\frac{\partial w}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.26)$$

Компоненты напряжений выражаются через изгибающие, крутящие моменты и поперечные силы по формулам:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{12}{h^3}\left\{M_x z + f_1\left[M_x - D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{\alpha\nu h^3\rho}{12\,\beta(1-\nu)}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]\right\};\\
\sigma_y &= -\frac{12}{h^3}\left\{M_y z + f_1\left[M_y - D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{\alpha\nu h^3\rho}{12\,\beta(1-\nu)}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]\right\};\\
\tau_{xy} &= -\frac{12}{h^3}\left\{M_{xy} z + f_1\left[M_{xy} - D\,(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]\right\};\\
\tau_{xz} &= -\frac{(1+\nu)\,GF'(z)}{EF(h/2)}\,Q_x;\\
\tau_{yz} &= -\frac{(1+\nu)\,GF'(z)}{EF(h/2)}\,Q_y.
\end{aligned}
\right\}\qquad (8.27)
$$

Здесь

$$
\left.
\begin{aligned}
M_x &= D\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right)\right] -\\
&\quad - \frac{\alpha\nu h^2}{12\,\beta(1-\nu^2)}\left[q - (1-\beta)\,\rho h\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right];\\
M_y &= D\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right)\right] -\\
&\quad - \frac{\alpha\nu h^2}{12\beta\,(1-\nu^2)}\left[q - (1-\beta)\,\rho h\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right];\\
M_{xy} &= \frac{D\,(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right);\\
Q_x &= \frac{\beta Eh}{2\,(1+\nu)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\right);\\
Q_y &= \frac{\beta Eh}{2\,(1+\nu)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}\right).
\end{aligned}
\right\}\qquad (8.28)
$$

Функции $f_1(z)$, $F(z)$, связанные соотношением

$$
f_1(z) = \frac{h^3 F(h/2)}{12\int\limits_{-h/2}^{h/2} zF(z)\,dz} - z, \qquad (8.29)
$$

могут иметь различный вид. Обычно полагают

$$
F'(z) = 1 - \frac{4z^2}{h^2}.
$$

При этом $\beta=5/6$, а α принимают либо равным нулю (если пренебрегается напряжением σ_z), либо равным единице.

Граничные условия имеют вид (например, на краю $x=\text{const}$):

для защемленного края

$$
w=0;\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0;
$$

для шарнирно опертого края

$$w=0;\ M_x=0;\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0;$$

для свободного края

$$M_x=0;\quad M_{xy}=0;\quad Q_x=0.$$

В табл. 8.1 приведено сравнение безразмерных частот собственных колебаний $\frac{ap}{\pi}\sqrt{\frac{2\rho(1-\nu^2)}{E}}$, вычисленных на основе различных уравнений [14], для квадратной шарнирно опертой пластинки со сторонами $a=40h$ при $\nu=0{,}3$.

Таблица 8.1

Значения безразмерных частот собственных колебаний

Вид уравнения	Число полуволн формы колебаний							
	$m=1$, $n=1$	$m=1$, $n=2$	$m=1$, $n=3$	$m=2$, $n=2$	$m=2$, $n=3$	$m=3$, $n=3$	$m=7$, $n=7$	$m=10$, $n=10$
Уравнения технической теории	0,0642	0,160	0,321	0,257	0,417	0,577	3,14	6,40
Уточненные уравнения при:								
$\alpha=0,\ \beta=\frac{2}{3}$	0,0639	0,159	0,316	0,254	0,409	0,564	2,80	5,21
$\alpha=0,\ \beta=\frac{5}{6}$	0,0640	0,159	0,317	0,254	0,411	0,566	2,84	5,36
$\alpha=1,\ \beta=\frac{5}{6}$	0,0640	0,159	0,317	0,254	0,411	0,566	2,86	5,38
Точные трехмерные уравнения теории упругости	0,0640	0,159	0,317	0,254	0,411	0,566	2,86	5,39

8.3. Анизотропные пластинки

Если связь между деформациями и напряжениями материала анизотропной пластинки описывается обобщенным законом Гука [10]:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=a_{11}\sigma_x+a_{12}\sigma_y+a_{16}\tau_{xy};\\ \varepsilon_y&=a_{12}\sigma_x+a_{22}\sigma_y+a_{26}\tau_{xy};\\ \gamma_{xy}&=a_{16}\sigma_x+a_{26}\sigma_y+a_{66}\tau_{xy},\end{aligned}\right\}\qquad(8.30)$$

то изгибающие моменты, крутящие моменты и поперечные силы пластинки определяются в прямоугольной системе координат по формулам:

$$\left.\begin{aligned}M_x&=-\left(D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\\ M_y&=-\left(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\\ M_{xy}&=-\left(D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\end{aligned}\right\}\qquad(8.31)$$

$$Q_x = -\left[D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x\, \partial y^2} + D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right];$$
$$Q_y = -\left[D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right], \quad (8.31)$$

где

$$D_{11} = \frac{h^3}{12\Delta_0}\left(a_{22}a_{66} - a_{26}^2\right); \quad D_{22} = \frac{h^3}{12\Delta_0}\left(a_{11}a_{66} - a_{16}^2\right);$$
$$D_{12} = \frac{h^3}{12\Delta_0}(a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}); \quad D_{16} = \frac{h^3}{12\Delta_0}(a_{12}a_{26} - a_{22}a_{16}); \quad (8.32)$$
$$D_{26} = \frac{h^3}{12\Delta_0}\left(a_{12}a_{16} - a_{16}a_{26}\right); \quad D_{66} = \frac{h^3}{12\Delta_0}\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right);$$

Δ_0 — матрица коэффициентов, стоящих в правой части (8.30). Жесткости D_{11} и D_{22} представляют собой жесткость при изгибе вокруг осей x и y; D_{66} — жесткость при кручении. Отношения жесткостей

$$\nu_1 = \frac{D_{11}}{D_{22}}; \quad \nu_2 = \frac{D_{12}}{D_{11}} \quad (8.33)$$

называются приведенными коэффициентами Пуассона.

Уравнение колебаний анизотропной пластинки имеет вид:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} +$$
$$+ D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t). \quad (8.34)$$

Потенциальная энергия деформаций

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint_S \left[D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 +\right.$$
$$\left. + 4D_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + 4\left(D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right] ds. \quad (8.35)$$

В частности для ортотропной пластинки, свойства которой одинаковы в двух взаимно перпендикулярных направлениях, параллельных осям x и y, уравнение колебаний будет:

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (8.36)$$

где

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1\nu_2)}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1\nu_2)};$$
$$D_3 = D_1\nu_2 + 2D_k; \quad D_k = \frac{Gh^3}{12}. \quad (8.37)$$

Изгибающие моменты, крутящие моменты и поперечные силы ортотропной пластинки определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
M_x &= -D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\\
M_y &= -D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);\\
Q_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\\
Q_y &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\\
M_{xy} &= -2D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.38}$$

Потенциальная энергия деформаций ортотропной пластинки

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint\limits_S \left[D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_1\nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right] ds. \tag{8.39}$$

В ряде случаев коэффициенты жесткости D можно определить по приближенным формулам, дающим достаточно точные для практических расчетов результаты [3]:

1. Железобетонные плиты, армированные в двух перекрестных направлениях, параллельных осям x и y (без трещин):

$$\left.\begin{aligned}
D_1 &= \frac{E_б}{1-\nu_б^2}\left[J_б^{(x)} + \left(\frac{E_а}{E_б} - 1\right) J_а^{(x)}\right];\\
D_2 &= \frac{E_б}{1-\nu_б^2}\left[J_б^{(y)} + \left(\frac{E_а}{E_б} - 1\right) J_а^{(y)}\right];\\
D_3 &= \sqrt{D_1 D_2},
\end{aligned}\right\} \tag{8.40}$$

где $E_б$, $E_а$ — модуль упругости бетона и арматуры; $\nu_б$ — коэффициент Пуассона для бетона; $J_б^{(x)}$ — момент инерции бетонного сечения $x = \text{const}$; $J_а^{(x)}$ — — момент инерции арматуры относительно нейтральной оси в сечении $x = \text{const}$; $J_б^{(y)}$, $J_а^{(y)}$ — то же, в сечении $y = \text{const}$.

Подстановкой $y_1 = y(D_1/D_2)^{1/4}$ уравнение колебаний (8.36) при значениях жесткостей (8.40) сводится к уравнению колебаний изотропной пластинки (8.5) с цилиндрической жесткостью $D = D_1$.

2. Гофрированные пластинки (рис. 8.3):

$$\left.\begin{aligned}
D_1 &= \frac{l}{s}\cdot\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad D_2 = EJ;\\
D_3 &= \frac{s}{l}\cdot\frac{Eh^3}{12(1+\nu)},
\end{aligned}\right\} \tag{8.41}$$

где

$$s = l\left(1 + \frac{\pi^2 f^2}{4l^2}\right);$$

$$J = \frac{f^2 h}{2}\left[1 - \frac{0,81}{1 + 2,5\,(f/2l)^2}\right];$$

s — длина дуги полуволны; h — толщина пластинки. Значения величин f и l ясны из рис. 8.3.

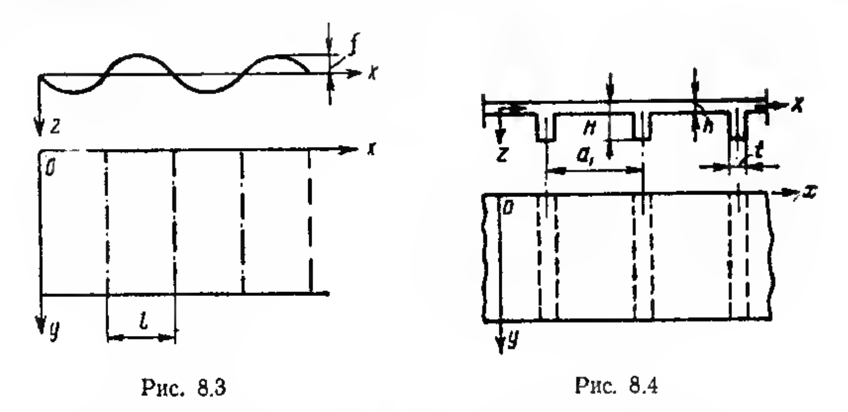


Рис. 8.3

Рис. 8.4

3. Пластинки, усиленные системой равноотстоящих ребер (рис. 8.4):

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= \frac{Ea_1h^3}{12\,(a_1 - t + \alpha^3 t)}; \quad D_2 = \frac{EJ}{a_1}; \\ D_3 &= 2\left(D_3' + \frac{c}{2a_1}\right), \end{aligned}\right\} \tag{8.42}$$

где J — момент инерции таврового сечения с полкой шириной a_1; $\alpha = h/H$; D_3' — крутильная жесткость плиты без ребер; c — крутильная жесткость одного ребра.

8.4. Гибкие пластинки

При малых толщинах пластинки, когда ее прогибы от поперечной нагрузки превышают $^1/_4$—$^1/_5$ толщины, техническая теория дает искаженные результаты, и пластинка должна рассматриваться как гибкая. Теория гибких пластинок основывается на учете наряду с поперечным изгибом также и деформирования пластинок в своей плоскости. Уравнения колебаний гибкой пластинки в прямоугольной системе координат имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} D\Delta\Delta w - h\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) &+ \\ + m\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q\,(x,\, y,\, t)&; \\ \Delta\Delta\Phi = E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]&, \end{aligned}\right\} \tag{8.43}$$

где Φ — функция напряжений, связанная с напряжениями в срединной поверхности пластинки соотношениями:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}. \tag{8.44}$$

Эти уравнения носят название нелинейных уравнений Кармана. Граничные условия для уравнений (8.43) наряду с ограничениями, накладываемыми на функцию w и ее производные, содержат также параметры, выражаемые через функцию напряжений. Условия (8.11) — (8.15), сохраняющие силу при соответствующих способах закрепления, дополняются следующими:

а) край, не закрепленный от смещений вдоль нормали к нему (нормальное напряжение равно нулю):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = a; \\ &\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } y = b; \end{aligned}\right\} \tag{8.45}$$

б) край, не закрепленный от продольных смещений вдоль края (тангенциальное напряжение равно нулю):

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{при } x = a \text{ и при } y = b; \tag{8.46}$$

в) параллельные края $x=0$, $x=a$ или $y=0$, $y=b$ закреплены таким образом, что взаимное смещение их точек вдоль общей нормали невозможно. В этом случае граничное условие имеет интегральный вид:

$$\int_0^a \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{E}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] dx = 0$$

или

$$\int_0^b \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{E}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dy = 0. \tag{8.47}$$

В случае полярной системы координат основные дифференциальные уравнения колебаний гибкой пластинки записываются в форме:

$$\left.\begin{aligned} &D\Delta_r\Delta_r w - hL(w, \Phi) + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(r, \theta, t); \\ &\Delta_r \Delta_r \Phi + \frac{E}{2} L(w, w) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.48}$$

Здесь через $L(w, \Phi)$ обозначено:

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial\theta}\right). \tag{8.49}$$

При осесимметричных колебаниях

$$L(w, \Phi) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right). \tag{8.50}$$

Граничные условия для круглых и кольцевых пластин записываются аналогично тому, как это делается для прямоугольных, в частности, если край

закреплен от радиальных смещений, то на контуре должно быть $u=0$, если же радиальные смещения ничем не стеснены, то $\sigma_r=0$. Кроме того, по всей площади пластинки σ_r должно быть ограничено. Это условие, в частности, требует, чтобы

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial\Phi}{\partial r}=0.$$

8.5. Общие методы решения дифференциальных уравнений колебаний пластинок

Дифференциальные уравнения колебаний пластинок допускают точные решения лишь в отдельных случаях. Эти случаи, вообще говоря, немногочисленны, и поэтому к решению задач о колебаниях пластинок привлекают хорошо разработанные приближенные методы, среди которых наибольшее распространение получили вариационные и конечноразностные.

При изучении колебаний пластинок важнейшее значение имеет уравнение форм свободных колебаний:

$$D\Delta\Delta W - mp^2W = 0. \tag{8.51}$$

Другое важнейшее уравнение — уравнение форм вынужденных гармонических колебаний:

$$D\Delta\Delta W - m\omega^2W = q. \tag{8.52}$$

На примере двух этих уравнений будет показано применение различных приближенных методов. Решение уравнений (8.51) и (8.52) точными методами приводится в п. 8.6 и 8.10.

Вариационные методы, так же как и большинство других приближенных методов, используемых в теории пластинок, связаны с отысканием коэффициентов c_{mn} разложения решения в ряд по некоторой системе функций φ_{mn}, называемых базисными или координатными функциями:

$$W = \sum_{m,n=1}^{k} c_{mn}\varphi_{mn}. \tag{8.53}$$

По методу Ритца минимизирующая форма (8.53) подставляется в выражение $T_{\text{макс}}-\Pi_{\text{макс}}$ и коэффициенты c_{mn} отыскиваются из условия минимума этого выражения, что приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial c_{mn}}(T_{\text{макс}}-\Pi_{\text{макс}})=0,\quad (m,n=1,2,\ldots,k). \tag{8.54}$$

В качестве минимизирующей формы обычно принимается произведение двух функций, одна из которых зависит только от одной координаты, а другая — только от другой. Базисные функции, входящие в минимизирующую форму, должны образовывать полную систему линейно независимых функций и удовлетворять граничным условиям задачи. В методе Ритца требуется удовлетворение, по крайней мере, геометрическим граничным условиям. Наиболее удобно в качестве базисных функций при решении задач в декартовых координатах принимать полиномы или балочные функции.

В случае уравнения (8.51) получающаяся в результате применения метода Ритца система однородных алгебраических уравнений (8.54) имеет нетривиальное решение, если определитель, составленный из ее коэффициентов, равен нулю. Это условие приводит к частотному уравнению, решение которого дает приближенные значения частот собственных колебаний В случае уравнения (8.52) получается система неоднородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения c_{mn}. Метод Ритца для собственных частот дает приближение сверху.

По методу Бубнова—Галеркина форма (8.53) подставляется непосредственно в уравнение колебаний, например в (8.51), в результате получается уравнение

$$\sum_{m,n=1}^{k} c_{mn} (D\Delta\Delta - mp^2)\, \varphi_{mn} = 0. \qquad (8.55)$$

Если функция, стоящая в левой части (8.55), непрерывна, то условие равенства нулю можно рассматривать как требование ортогональности этой функции к любой из линейно независимых функций, образующих полную ортогональную систему. Поэтому для определения k^2 коэффициентов c_{mn} можно воспользоваться условием ортогональности левой части (8.55) к первым k^2 функциям φ_{mn}. Умножая (8.55) на φ_{ij} и интегрируя по всей площади пластинки, получаем k^2 уравнений

$$\iint_S \varphi_{ij}(x, y) \sum_{m,n=1}^{k} c_{mn} (D\Delta\Delta - mp^2)\, \varphi_{mn}\, ds = 0. \qquad (8.56)$$

Условие наличия нетривиальных решений системы уравнений (8.56) приводит к частотному уравнению. При использовании метода Галеркина в задачах о колебаниях пластинок базисные функции должны удовлетворять всем граничным условиям.

Промежуточное положение между методами Ритца и Бубнова—Галеркина, с одной стороны, и точными методами, с другой, занимает метод Канторовича—Власова. В соответствии с этим методом решение уравнения свободных колебаний ищется, например, в виде:

$$W(x, y) = \varphi(x)\, \psi(y), \qquad (8.57)$$

где одна из функций, например $\psi(y)$, задана и удовлетворяет граничным условиям на соответствующих краях пластинки, а другая функция — искомая. Подставляя форму (8.57) в двойной интеграл, соответствующий выражению $T_{\text{макс}} - \Pi_{\text{макс}}$ и выполняя интегрирование по y, приходим к задаче о минимуме однократного интеграла. Если же (8.57) подставить в уравнение свободных колебаний и выписать условие ортогональности полученного выражения к базисной функции $\psi(y)$, то в результате интегрирования можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого позволяет определить приближенные значения собственных частот и приближенные формы собственных колебаний. При необходимости по методу Канторовича—Власова могут быть получены и более высокие приближения, для этого берется необходимое количество функций $\psi_n(y)$ и $\varphi_m(x)$.

При решении задач о вынужденных колебаниях пластинок в некоторых случаях эффективно применение метода компенсирующих нагрузок [9]. Существо этого метода заключается в том, что вместо области, занимаемой пластинкой, рассматривается более широкая область (например, вся плоскость) с двумя нагрузками: первая (основная) совпадает с действующей на рассчитываемую пластинку нагрузкой, а вторая (компенсирующая) выбирается соответствующим образом вне области пластинки так, чтобы на ее контуре удовлетворялись краевые условия. Решение задачи о колебаниях расширенной (неограниченной) пластинки при действии первой нагрузки называется основным, при действии второй — компенсирующим. Сумма этих решений должна удовлетворять уравнению колебаний и всем граничным условиям. Пусть на пластинку действует нагрузка $q_0 \cos\omega t$. Расширим пластинку до неограниченной и приложим вне области, занимаемой ею, компенсирующую нагрузку $q_{\text{к}} \cos\omega t$; удобнее всего приложить ее по некоторой замкнутой линии C. Обозначим через $w_0 \cos\omega t$ основное решение, через $w_{\text{к}} \cos\omega t$ — компенсирующее решение. В большинстве случаев основное решение удается получить в замкнутом виде. Компенсирующее решение, содержащее произвольные постоянные, можно выразить через реакцию неограниченной пластинки на единичную силу, изменяющуюся по гармоническому закону. Подставляя сумму $w_0 + w_{\text{к}}$ в граничные условия, определяем произвольные константы или плотность нагрузки $q_{\text{к}}$.

В общем случае для $q_к$ получается интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. Если в качестве C принять контур пластинки, то в ряде простых случаев можно прийти к системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Применение метода компенсирующих нагрузок к расчету круглых пластинок и подробные формулы приводятся в 8.10.

Конечноразностные методы основаны на замене производных в дифференциальных уравнениях (8.51) — (8.52) конечными разностями с той или иной степенью точности. При этом область, занимаемая пластинкой, разбивается некоторой сеткой, а дифференциальные и другие операции выражаются через значения функций в узлах сетки. В результате получается система алгебраических уравнений, однородная в случае свободных колебаний и неоднородная в случае вынужденных. Конечноразностные уравнения особенно удобны при использовании ЭЦВМ, поэтому в последние годы они получили большое развитие.

Метод коллокаций схож с конечноразностными методами тем, что при его использовании рассматривается конечное число точек внутри области, занимаемой пластинкой (точек коллокации).

Решение задачи по методу коллокаций так же, как и в методах Ритца и Бубнова — Галеркина, разыскивается в виде (8.53), а коэффициенты c_{mn} определяются из условия удовлетворения уравнению колебаний пластинки в точках коллокации. Точки коллокации стараются выбирать вблизи тех точек пластинки, где динамическая податливость максимальна, т. е. в пучностях ожидаемых форм колебаний.

В. В. Болотиным предложен асимптотический метод [2], удобный при определении высших частот собственных колебаний пластинок.

8.6. Свободные колебания прямоугольных пластинок

При отсутствии внешней динамической нагрузки пластинка может совершать свободные колебания, вызванные начальными возмущениями, которые задаются в виде начальных условий:

$$w(x, y, 0) = \varphi(x, y); \qquad \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y). \tag{8.58}$$

Полагая в (8.5) $q=0$ и $w=W(x, y)\sin(pt+\varepsilon)$, получим, как отмечалось выше, дифференциальное уравнение форм свободных (собственных) колебаний пластинки

$$\Delta\Delta W - \frac{mp^2}{D}W = 0, \tag{8.59}$$

где p — круговая частота собственных колебаний.

Используя метод разделения переменных, решение уравнения (8.59) ищут в виде $W(x, y) = X(x)Y(y)$. Переменные разделяются, если

$$X'' = -\alpha_m^2 X; \quad X^{\text{IV}} = -\alpha_m^2 X'' \tag{8.60}$$

или

$$Y'' = -\beta_n^2 Y; \quad Y^{\text{IV}} = -\beta_n^2 Y'', \tag{8.61}$$

где α_m и β_n — некоторые постоянные. Первому условию, в частности, соответствует

$$X(x) = A\sin\alpha_m x + B\cos\alpha_m x. \tag{8.62}$$

Функция $W = Y(y)(A\sin\alpha_m x + B\cos\alpha_m x)$ может удовлетворять только условиям шарнирного опирания краев $x=0$, $x=a$ ($B=0$) или скользящей заделки на этих краях ($A=0$); при этом $\alpha_m = m\pi/a$, $m=1, 2, 3, \ldots$

Аналогичные выражения получаются и при выполнении условия (8.61).

Если $X(x)$ определяется по формуле (8.62), то для $Y(y)$ получается уравнение

$$Y^{IV} - 2\alpha_m^2 Y'' - \left(r^4 - \alpha_m^4 \right) Y = 0; \qquad r^4 = \frac{mp^2}{D}, \tag{8.63}$$

решение которого можно представить в виде:

$$Y(y) = Y(0)\,\overline{A}(y) + Y'(0)\,\overline{B}(y) + Y''(0)\,\overline{C}(y) + Y'''(0)\,\overline{D}(y), \tag{8.64}$$

где

$$\overline{A}(y) = \frac{1}{2r^2}\left(\delta_1^2 \operatorname{ch} \delta_2 y + \delta_2^2 \cos \delta_1 y \right);$$

$$\overline{B}(y) = \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\delta_1^2}{\delta_2} \operatorname{sh} \delta_2 y + \frac{\delta_2^2}{\delta_1} \sin \delta_1 y \right);$$

$$\overline{C}(y) = \frac{1}{2r^2} (\operatorname{ch} \delta_2 y - \cos \delta_1 y); \tag{8.65}$$

$$\overline{D}(y) = \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\operatorname{sh} \delta_2 y}{\delta_2} - \frac{\sin \delta_1 y}{\delta_1} \right);$$

$$\delta_1 = r^2 - \alpha_m^2; \quad \delta_2 = r^2 + \alpha_m^2.$$

Используя (8.64) и краевые условия на сторонах пластинки $y=0$, $y=b$, приходим к уравнению частот. Например, если эти стороны защемлены, то $Y(0) = Y'(0) = 0$; $Y(b) = Y'(b) = 0$ и, следовательно,

$$\overline{C}^2(b) - \overline{D}(b)\,\overline{C}'(b) = 0. \tag{8.66}$$

Уравнение частот (8.66) можно привести к двум следующим уравнениям:

$$\delta_2 \operatorname{th} \frac{\delta_2 b}{2} + \delta_1 \operatorname{tg} \frac{\delta_1 b}{2} = 0 \tag{8.67}$$

и

$$\delta_2 \operatorname{cth} \frac{\delta_2 b}{2} - \delta_1 \operatorname{ctg} \frac{\delta_1 b}{2} = 0, \tag{8.68}$$

которые соответствуют симметричным (8.67) и кососимметричным (8.68) формам собственных колебаний. Каждому значению α_m соответствует бесконечная последовательность корней уравнений (8.67) и (8.68). Таким образом, можно определить последовательные значения r_{mn}, а затем и частоты собственных колебаний по формуле

$$p_{mn} = r_{mn}^2 \sqrt{\frac{D}{m}}. \tag{8.69}$$

Формы собственных колебаний пластинки будут

$$W_{mn}(x, y) = X_m(x)\left[\overline{C}_n(y) - \frac{\overline{D}_n(b)}{\overline{C}_n(b)}\, \overline{D}_n(y) \right]. \tag{8.70}$$

Очевидно, что они определяются с точностью до постоянного сомножителя.

Формы собственных колебаний (собственные функции) пластинки обладают свойством ортогональности, т. е.

$$\iint_S W_{mn}(x, y)\, W_{ij}(x, y)\, dx dy = 0, \tag{8.71}$$

если $m \neq i$ или $n \neq j$. Полагая

$$\iint_S W_{mn}^2(x, y)\,dx\,dy = 1, \tag{8.72}$$

определим нормированные формы собственных колебаний.

Общее решение уравнения (8.59) получается в результате суммирования всех частных решений типа (8.70).

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} W_{mn}(x, y) \sin(p_{mn} t + \varepsilon_{mn}). \tag{8.73}$$

Оставшиеся неизвестными константы A_{mn} и ε_{mn} определяются из начальных условий. Для этого функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ следует представить в виде рядов по собственным функциям:

$$\varphi(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} W_{mn}(x, y); \tag{8.74}$$

$$\psi(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn} W_{mn}(x, y).$$

Коэффициенты рядов (8.74) (собственные функции предполагаются нормированными) можно определить по формулам:

$$\left.\begin{aligned} a_{mn} &= \iint_S \varphi(x, y) W_{mn}(x, y)\,dx\,dy; \\ b_{mn} &= \iint_S \psi(x, y) W_{mn}(x, y)\,dx\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{8.75}$$

Тогда

$$\varepsilon_{mn} = p_{mn} \operatorname{arctg} \frac{a_{mn}}{b_{mn}}; \quad A_{mn} = \frac{a_{mn}}{\sin \varepsilon_{mn}} = \frac{b_{mn}}{p_{mn} \cos \varepsilon_{mn}}. \tag{8.76}$$

Для пластинки, опертой по всему контуру,

$$X(x) = \sin \frac{m\pi x}{a}; \quad Y(y) = \sin \frac{n\pi y}{b}$$

и частотное уравнение имеет вид:

$$\sin \delta_1 b = 0. \tag{8.77}$$

Отсюда

$$r_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \tag{8.78}$$

Таким образом, если два противоположных края прямоугольной пластинки шарнирно оперты или имеют скользящую заделку, то удается получить точное решение задачи в виде рядов по собственным функциям (формам собственных колебаний). При любых других краевых условиях можно получить только приближенное решение. Однако и в этих случаях форму колебаний можно принимать в виде $W_{mn} = A_{mn} X_m(x) Y_n(y)$, где $X_m(x)$ и $Y_n(y)$ — балочные функции, удовлетворяющие условиям закрепления, соответствующим закреплению краев пластинки, а частоты собственных колебаний и коэффициенты A_{mn} определяются с помощью приближенных методов [см. (8.5)].

При колебаниях пластинки по одной из собственных форм на ее поверхности образуются линии, соединяющие точки, в которых прогиб пластинки равен нулю. Эти линии носят название узловых линий, очевидно, узловой линией можно также считать и закрепленный от смещений край.

При произвольном закреплении краев прямоугольной пластинки частоты собственных колебаний можно определять по формуле

$$p_{mn} = \frac{k_{mn}^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}, \qquad (8.79)$$

где

$$k_{mn}^2 = \pi^2 \left\{ A_m^4 + \frac{a^4}{b^4} A_n^4 + 2 \frac{a^2}{b^2} \left[\nu B_m B_n + (1 - \nu) C_m C_n \right] \right\}^{1/2}, \qquad (8.80)$$

дающей первое приближение по методу Ритца. Если две противоположные стороны пластинки шарнирно оперты, то это значение является точным. Здесь m, n — число узловых линий, включая закрепленные края, параллельные осям x и y соответственно; a, b — длины сторон пластинки.

Если в срединной плоскости пластинки действуют продольные силы, то

$$k_{mn}^2 = \pi^2 \left(\bar{k}_{mn}^2 \pm N_1 C_m \pm N_2 C_n \frac{a^2}{b^2} \right)^{1/2}, \qquad (8.81)$$

где

$$N_x = \frac{q_x a^2}{D\pi^2}, \quad N_y = \frac{q_y b^2}{D\pi^2};$$

q_x, q_y — интенсивность продольных сил в направлении осей x и y; $\bar{k}_{mn}^2$ определяется по формуле (8.80) без коэффициента π^2

Таблица 8.2

Значения коэффициентов A, B, C, D, E [1]

Условие закрепления краев	A			B			C		
	$m=1$	$m=2$	$m\geqslant3$	$m=1$	$m=2$	$m\geqslant3$	$m=1$	$m=2$	$m\geqslant3$
Оперт — оперт	0	1	$m-1$	0	1	A^2	0	1	A^2
Оперт — защемлен	0	1,25	$m-0,75$	0	$A^2-\frac{A}{\pi}$	$A^2-\frac{A}{\pi}$	0	B	B
Оперт — свободен	0	1,25	$m-0,75$	0	$A^2-\frac{A}{\pi}$	$A^2-\frac{A}{\pi}$	$\frac{3}{\pi^2}$	$A^2+\frac{3A}{\pi}$	$A^2+\frac{3A}{\pi}$
Защемлен — защемлен	0	1,506	$m-0,5$	0	1,248	$A^2-\frac{2A}{\pi}$	0	1,248	B
Защемлен — свободен	0,597	1,494	$m-0,5$	0,087	1,347	$A^2-\frac{2A}{\pi}$	0,471	3,284	$A^2+\frac{2A}{\pi}$
Свободен — свободен	0	1,506	$m-0,5$	0	1,248	$A^2-\frac{2A}{\pi}$	$\frac{12}{\pi^2}$	5,017	$A^2+\frac{6A}{\pi}$

Условие закрепления краев	D				E			
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
Оперт — защемлен	−8,139	−25,7	−52,13	−89,17	0	0	0	0
Оперт — свободен	0,1274	0,0706	0,049	0,0374	0,9991	0,9998	1	1
Защемлен — защемлен	−0,798	30,91	58,78	162	0	0	0	0
Защемлен — свободен	6,802	−44,06	121,2	6647	8,711	1,928	2,003	2

Таблица 8.3

Значения коэффициентов k_{mn}^2 для защемленных и свободных прямоугольных пластинок

Защемленная пластинка

$\frac{a}{b}$	m	n = 1	2	3	4	5	6
1	1	36	73,41	131,9	210,5	309	428
1,5	1	27,01	65,5	126	206	303	422
2	1	24,58	64,1	124	204	302	421
1	2	73,41	108,2	165	242,7	340,6	458,3
1,5	2	41,72	79,81	138,6	218	316,1	436
2	2	31,83	71,08	130,4	210	308,1	427
1	3	131,9	165	220	296,4	393,4	509,9
1,5	3	66,53	103	161,2	241	339	457
2	3	44,78	83,2	142,4	221	320,1	439
1	4	210,5	242,7	296,4	371,4	467,3	593,8
1,5	4	100,8	136,1	193,2	271,2	369,3	488
2	4	63,34	100,8	159,5	238,4	337,1	456
1	5	309	340,6	393,4	467,3	562,2	676
1,5	5	144,2	178	234,7	312	409	529
2	5	87,26	124,2	181,8	261	358	478
1	6	428	458,3	509,9	583,8	676	792,5
1,5	6	195	230	285,4	361,9	456	576,6
2	6	117	151,9	209,6	287,5	382	504,3

Свободная пластинка ($\nu = 1/6$)

$\frac{a}{b}$	m	n = 1	2	3	4	5	6
1	1	14,92	37,28	75,95	134,1	214,1	309,1
1,5	1	9,905	30,36	69,56	127,7	205,1	302,1
2	1	7,374	26,52	65,17	123,3	200,7	298,9
1	2	37,28	67,59	110,6	170	248,1	345,7
1,5	2	22,25	46,65	86,03	145,2	222,1	320,4
2	2	17,61	37,59	75,05	132,9	210	307,3
1	3	75,95	110,6	159,3	222,7	302,8	396,8
1,5	3	40,34	68,39	111,5	160,5	250	347,8
2	3	27,03	51,7	91,96	149,6	226,4	324,7
1	4	134,1	170	222,7	290,4	374	474,6
1,5	4	66,31	97,82	143,5	204,8	283,7	382,6
2	4	42,25	70,01	11,58	171	248,9	346
1	5	214,1	248,1	302,8	374	461	565,5
1,5	5	100,9	133,4	182,2	245,9	326,6	425,6
2	5	61,63	91,78	135,8	196,6	274,6	372,9
1	6	292,4	345,7	399,2	474,6	562,6	671
1,5	6	144,5	177,6	226,2	294,3	374,8	476,9
2	6	85,56	117,3	162,7	223,5	303,2	403

Частоты собственных колебаний ортотропных прямоугольных пластинок можно определять по формуле (8.79), в которой следует положить:

$$k_{mn}^2 = \pi^2 \left\{ D_1 A_m^4 + D_2 \frac{a^4}{b^4} A_n^4 + 2 \frac{a^2}{b^2} \left[\nu_2 D_1 B_m B_n + 2D_k C_m C_n \right] \right\}^{1/2}.$$

Здесь

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}; \quad D_k = \frac{Gh^3}{12}; \quad D_3 = D_2\nu_1 + 2D_k;$$

E_1, E_2 — модули упругости в осевых направлениях пластинки; G — модуль сдвига.

Значения коэффициентов A, B, C, D, E приведены в твбл. 8.2 [1].

Значения частот собственных колебаний прямоугольных защемленных и свободных пластинок можно определить с помощью табл. 8.3. У квадратных пластинок с твкими условиями закрепления при $m-n=\pm 2, 4, 6, \ldots$ возможны формы колебаний типа $m/n \pm n/m$, при которых узловые линии непараллельны краям пластинки. Приближенные значения коэффициентов k_{mn} для квадратной плвстинки, а также формы узловых линий приведены в табл. 8.4.

Таблица 8.4

Значения коэффициента k_{mn}^2

Защемленная пластинка		Свободная пластинка	
узловые линии	k^2	узловые линии	k^2
	35,99		13,47
	73,41		19,6
	108,27		24,27
	131,64		34,8
	132,25		61,09
	165,15		63,69

Если пластинка оперта в углах, то частоты ее собственных колебаний могут быть вычислены на основе следующих данных [33]:

Форма	2/2	3/3—3/3	3/3	3/3+3/3
k_{mn}^2	7,67	20,17	40,62	42,76

8.7. Свободные колебания круглых и кольцевых пластинок

В случае круглых и кольцевых пластинок уравнение форм собственных колебаний имеет вид:

$$\Delta_r \Delta_r W - \frac{mp^2}{D} W = 0, \quad k = \sqrt[4]{\frac{mp^2}{D}}. \qquad (8.82)$$

Это уравнение легко решается по методу разделения переменных:

$$W(\rho, \theta) = [AJ_n(k\rho) + BI_n(k\rho) + CY_n(k\rho) + DK_n(k\rho)] \sin(n\theta + \varepsilon), \qquad (8.83)$$

где J_n, Y_n, I_n, K_n — цилиндрические функции первого и второго рода действительного и мнимого аргумента, $n = 1, 2, 3, \ldots$; $\rho = r/b$; b — радиус пластинки.

Если в центре круглой пластинки нет опоры или отверстия, то постоянные C и D должны быть равны нулю. Удовлетворяя граничным условиям на контуре пластинки, получаем частотное уравнение.

Рассмотрим различные случаи закрепления края пластинки. При этом принимаем следующие обозначения: s — число узловых кругов; n — число узловых диаметров.

Защемленная пластинка. Частотное уравнение

$$\frac{J_{n+1}(k)}{J_n(k)} + \frac{I_{n+1}(k)}{I_n(k)} = 0. \qquad (8.84)$$

Для больших значений n имеет место асимптотическая формула ($n > s$)

$$k \approx \frac{\pi}{2}(2s + n + 2). \qquad (8.85)$$

Значения собственных чисел k приведены в табл. 8.5 [25, 26].

Таблица 8.5

s	n = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3,196	4,611	5,906	7,144	8,347	9,256	10,69	11,83	12,97	14,1
1	6,306	7,799	9,197	10,54	11,84	13,11	14,35	15,58	16,8	18
2	9,439	10,96	12,40	13,79	15,15	16,47	17,78	19,06	21,99	23,56
3	12,58	14,11	15,58	17	18,4	19,96	21,99	23,56	25,13	26,7
4	15,72	17,26	18,74	20,19	21,99	23,56	25,13	26,7	28,27	29,84
5	18,86	20,4	21,9	23,37	25,13	26,7	28,27	29,84	31,41	32,98
6	22	23,54	25,05	26,53	28,27	29,81	31,41	32,98	34,55	36,13
7	25,14	26,69	28,2	29,69	31,41	32,98	34,55	36,13	37,7	39,27
8	28,28	29,83	31,35	32,85	34,55	36,13	37,7	39,27	40,84	42,41
9	31,42	32,97	34,5	36	37,7	39,27	40,84	42,41	43,98	45,55

Шарнирно опертая пластинка. Частотное уравнение

$$\frac{J_{n+1}(k)}{J_n(k)} + \frac{I_{n+1}(k)}{I_n(k)} = \frac{2k}{1-\nu}. \qquad (8.86)$$

Значения собственных чисел k при $\nu = 0{,}3$ приведены в табл. 8.6.

Свободная пластинка. Частотное уравнение

$$\frac{k^2 J_n(k) + (1-\nu)\left[kJ'_n(k) - n^2 J_n(k)\right]}{k^2 I_n(k) - (1-\nu)\left[kI'_n(k) - n^2 I_n(k)\right]} =$$

$$= \frac{k^3 J_n'(k) + (1-\nu) n^2 \left[k J_n'(k) - J_n(k)\right]}{k^3 I_n'(k) - (1-\nu) n^2 \left[k I_n'(k) - I_n(k)\right]}. \quad (8.87)$$

Таблица 8.6

s	n		
	0	1	2
1	2,231	3,733	5,065
2	5,455	6,965	8,375
3	8,614	10,139	11,59
4	11,762	13,298	14,773

Для больших значений k имеется следующая асимптотическая формула ($k > s$):

$$k \approx \frac{\pi}{2}(n + 2s). \quad (8.88)$$

Значения собственных чисел k для $\nu = 0{,}33$ приведены в табл. 8.7.

Таблица 8.7

s	n						
	0	1	2	3	4	5	6
0	—	—	2,292	3,497	4,65	5,75	6,6
1	3,014	4,63	5,937	7,274	8,55	9,76	11
2	6,209	7,737	9,16	10,55	11,95	13,23	14,5
3	9,37	10,91	12,41	13,86	15,24	16,57	17,88
4	12,53	14,08	15,58	17,05	18,45	19,81	21,15
5	15,68	17,23	18,73	20,21	21,63	23,01	24,37
6	18,83	20,38	21,89	23,37	24,8	26,2	27,57
7	21,98	25,53	25,04	26,52	27,96	29,4	30,86
8	25,12	26,67	28,19	29,67	31,12	32,58	34,04
9	28,26	29,81	31,33	32,81	34,28	35,74	37,21
10	31,4	32,95	34,47	35,95	37,43	38,9	40,38

Пластинка, опертая в центре. Частотное уравнение для осесимметричных колебаний опертой в центре и защемленной по контуру пластинки имеет вид [9]:

$$I_1(k) Y_0(k) + I_0(k) Y_1(k) + \frac{2}{\pi} J_1(k) K_0(k) - \frac{2}{\pi} J_0(k) K_1(k) + \frac{4}{\pi k} = 0. \quad (8.89)$$

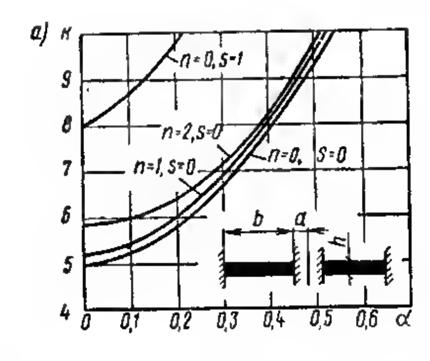
Два первых корня этого уравнения есть $k_1 = 4{,}76$; $k_2 = 7{,}87$ [17].

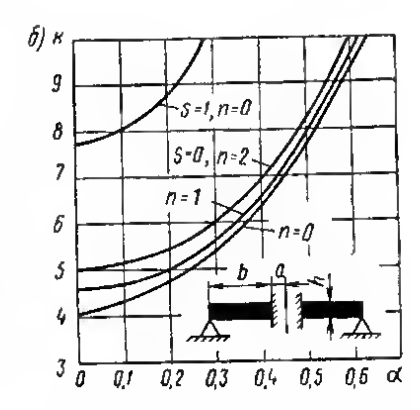
Если пластинка шарнирно оперта по контуру, то частотное уравнение будет:

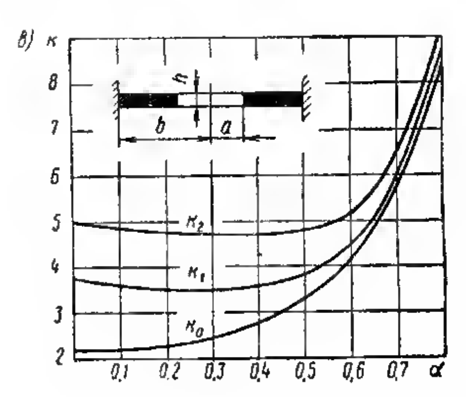
$$(1-\nu)\left[I_0(k) Y_1(k) + I_1(k) Y_0(k) - \frac{2}{\pi} J_0(k) K_1(k) + \frac{2}{\pi} J_0(k) K_1(k) + \right.$$

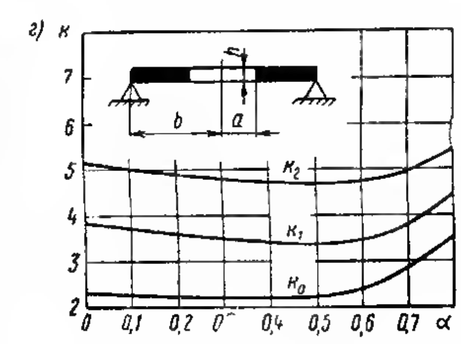
$$\left. + \frac{2}{\pi} J_1(k) K_0(k) + \frac{4}{\pi k}\right] - 2k\left[I_0(k) Y_0(k) + \frac{2}{\pi} J_0(k) K_0(k)\right] = 0. \quad (8.90)$$

Первые корни этого уравнения: $k_1 = 3{,}85$; $k_2 = 7{,}03$ [17].









Пластинка с краем, свободным относительно поперечных перемещений и закрепленным относительно угловых (скользящая заделка). В случае осесимметричных колебаний частотное уравнение имеет вид:

$$J_1(k)=0. \qquad (8.91)$$

Первые 10 корней уравнения (8.91) приведены в табл. 8.8.

Пластинка с краем, частично опертым, частично защемленным. Частоты и формы собственных колебаний пластинки с частично защемленным и частично опертым краем определялись методом парных уравнений [5]. В частности, для пластинки, опертой по одной полуокружности и защемленной по другой, вычислены первые четырнадцать собственных чисел: 2,739;

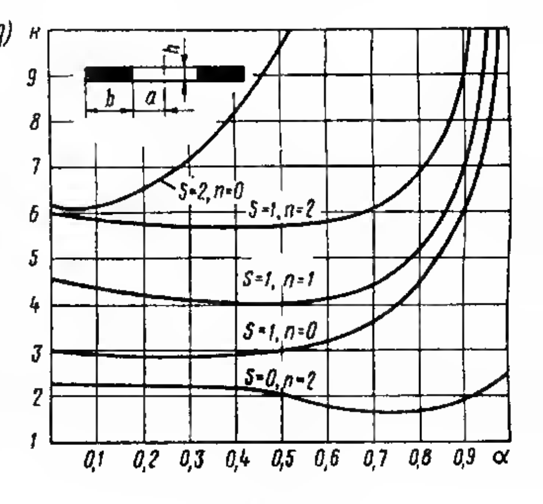


Рис. 8.5

3,826; 4,182; 5,494; 5,504; 5,873; 6,658; 6,758; 7,041; 7,383; 7,953; 7,979; 8,756; 9,098. Собственные числа k для основного тона колебаний пластинки при различных значениях угла β (2β — центральный угол, принадлежащий защемленной части контура) приведены в табл. 8.9.

Таблица 8.8

s	k	s	k
1	3,832	6	19,616
2	7,016	7	22,76
3	10,173	8	25,904
4	13,324	9	29,047
5	16,471	10	32,19

Таблица 8.9

β	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{2\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{4\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{6\pi}{16}$	$\frac{7\pi}{16}$	$\frac{8\pi}{16}$
k	2,353	2,415	2,473	2,513	2,567	2,628	2,672	2,739
β	$\frac{9\pi}{16}$	$\frac{10\pi}{16}$	$\frac{11\pi}{16}$	$\frac{12\pi}{16}$	$\frac{13\pi}{16}$	$\frac{14\pi}{16}$	$\frac{15\pi}{16}$	—
k	2,817	2,867	2,943	3,029	3,067	3,139	3,190	—

Кольцевые пластинки. Частотные уравнения для кольцевых пластинок имеют довольно громоздкую форму; для различных условий закрепления внутреннего и внешнего края они приведены в [6]. На рис. 8.5 приведены графики корней частотных уравнений (собственных чисел) для кольцевых пластинок с различными краевыми условиями в зависимости от величины $\alpha = a/b$ — отношения внутреннего и внешнего радиуса кольцевой пластинки. Различные задачи о колебаниях кольцевых пластинок, имеющих опоры по концентрическим контуру окружностям, могут быть решены с помощью метода начальных параметров [9].

8.8. Свободные колебания пластинок других очертаний

Пластинки в форме параллелограмма или ромба. Задачи о колебаниях пластинок в форме параллелограмма и ромба (рис. 8.6) удобно рассматривать в косоугольных координатах $\xi = x - y\,\mathrm{tg}\,\alpha$; $\eta = y \sec\alpha$. При этом оператор Лапласа принимает вид:

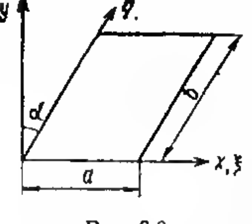


Рис. 8.6

$$\Delta = \sec^2\alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\sin\alpha\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial}{\partial x^2}\right). \qquad (8.92)$$

Если угол α мал ($\alpha \leqslant 30^\circ$), то формы свободных колебаний можно искать в виде:

$$W_{mn}(x, y) = A_{mn} X_m(x) Y_n(y),$$

где X_m, Y_n — балочные функции, удовлетворяющие соответствующим краевым условиям. Частоту собственных колебаний можно определять по формуле (8.79), полагая

$$k_{mn}^2 = \pi^2 \sec^2\alpha\left[A_m^2 + \frac{a^4}{b^4}A_n^2 + 4\frac{a^2}{b^2}\sin^2\alpha C_m C_n - 4\sin\alpha D_m E_n - \right.$$
$$\left. - 4\sin\alpha D_n E_m + 2B_m B_n - 2(1-\nu)(B_m B_n - C_m C_n)\right]^{1/2}. \qquad (8.93)$$

Здесь A, B, C, D, E — величины, приведенные в табл. 8.2.

Для определения частоты основного тона собственных колебаний защемленной по всему контуру пластинки в форме параллелограмма можно использовать табл. 8.10 [28, 29], в которой приведены собственные числа для некоторых углов $\beta = 90^\circ - \alpha$ и некоторых соотношений между длинами сторон (см. рис. 8.6).

Собственные числа для ромбовидных пластинок при различных условиях закрепления краев и $\nu = 0{,}3$ приведены в табл. 8.11 [24, 30].

Таблица 8.10

Значения коэффициента $\frac{k^4 \sin^4 \beta}{16}$ для защемленной по контуру пластинки в форме параллелограмма

a/b	β				
	55°	60°	70°	75°	90°
1	72,99	74,93	78,21	79,36	80,96
2	36,29	36,59	37,17	37,46	37,77
4	32,20	32,26	32,38	32,43	32,60

Таблица 8.11

Значения коэффициента $k^2 \cos^2 \alpha$ для ромбовидных пластинок при $\nu = 0{,}3$

Схема пластинки	Форма	$\alpha = 15°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$
	2/2	36,67	38,15	40,08
	2/3	74,76	77,48	81,06
	3/3	111,4	118,2	126,8
	2/4—4/2	132,9	136,0	140,0
	2/4+4/2	133,7	138,0	142,7
	4/3	169,6	179,1	191,4
	4/4	226,8	242,0	261,5
	2/2	32,54	34,09	36,11
	2/3	64,76	67,68	71,47
	3/2	72,40	75,04	78,46
	3/3	103,8	110,6	119,2
	2/4	118,3	121,8	126,5
	4/2	132,0	135,1	139,3
	3/4	156,5	166,3	178,9
	4/3	163,5	172,7	184,6
	4/4	215,8	231,1	250,4
	2/2	27,84	29,52	31,68
	2/3—3/2	61,73	64,48	68,06
	2/3+3/2	62,40	65,33	69,11
	3/3	95,74	102,6	111,1
	2/4—4/2	116,3	119,6	124,4
	2/4+4/2	116,6	120,0	124,4
	3/4—4/3	149,6	159,0	171,0
	3/4+4/3	150,5	160,2	172,5
	4/4	204,4	219,7	239,0
	2/2	3,360	2,971	2,412
	2/3	8,278	7,643	6,880

Трапециевидные и треугольные пластинки. При рассмотрении свободных колебаний трапециевидных и треугольных пластинок наибольшее распространение получили метод Ритца и метод коллокаций. В табл. 8.12 приведены квадраты собственных чисел для консольных трапециевидных пластинок при колебаниях по основному тону.

Таблица 8.12

	α	9	18	27	36
	k^2	3,705	3,910	4,243	4,822
	α	6	12	18	24
	k^2	3,718	4,153	4,750	5,995

Собственные числа для треугольных пластинок с различными условиями опирания краев можно определить из графиков (рис. 8.7).

Частоты собственных колебаний консольных треугольных пластинок можно определять по формуле

$$p = \frac{k^2}{a^2}\sqrt{\frac{D}{m}}, \qquad (8.94)$$

где a — биссектриса или медиана треугольника, а k определяется по эмпирическим формулам (табл. 8.13), построенным на основе экспериментальных данных [31].

Таблица 8.13

Форма колебаний	a	k^2
1/0	a_1	$\left(7{,}14 - 0{,}4\frac{b}{a_1}\right)\sqrt{\sec\theta}$
2/0	a_2	$\left[31 - \frac{2b}{a_1} - 2\sqrt{\sec\theta - 1}\right]\sqrt{\sec\theta}$
3/0	a_3	$\left(73 - \frac{4b^2}{a_1^2}\right)\left[1 + \left(\sin\theta - \frac{b}{2a_2}\right)\sqrt{\sec\theta - 1}\right]$
1/1	a_1	$\frac{a_1}{b}\left[20\left(1 + 0{,}2\frac{b^2}{a_2^2}\right)^2 + \frac{30b}{a_2}\sqrt{\sec\theta - 1}\right]$

Обозначения: a_1 — биссектриса; a_2 — медиана; θ — угол медианы с высотой; b — основание треугольника.

Эллиптические пластинки. В этом случае естественным является применение эллиптических координат (рис. 8.8). Полагая $x = f \operatorname{ch} \xi \cos \eta$, $y = f \operatorname{sh} \xi \sin \eta$, где f — фокусное расстояние, уравнение форм свободных колебаний эллиптической пластинки запишем в виде:

$$\Delta\Delta W - 4k^4 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2 W = 0; \; k^4 = \frac{p^2 f^4 m}{16D}. \tag{8.95}$$

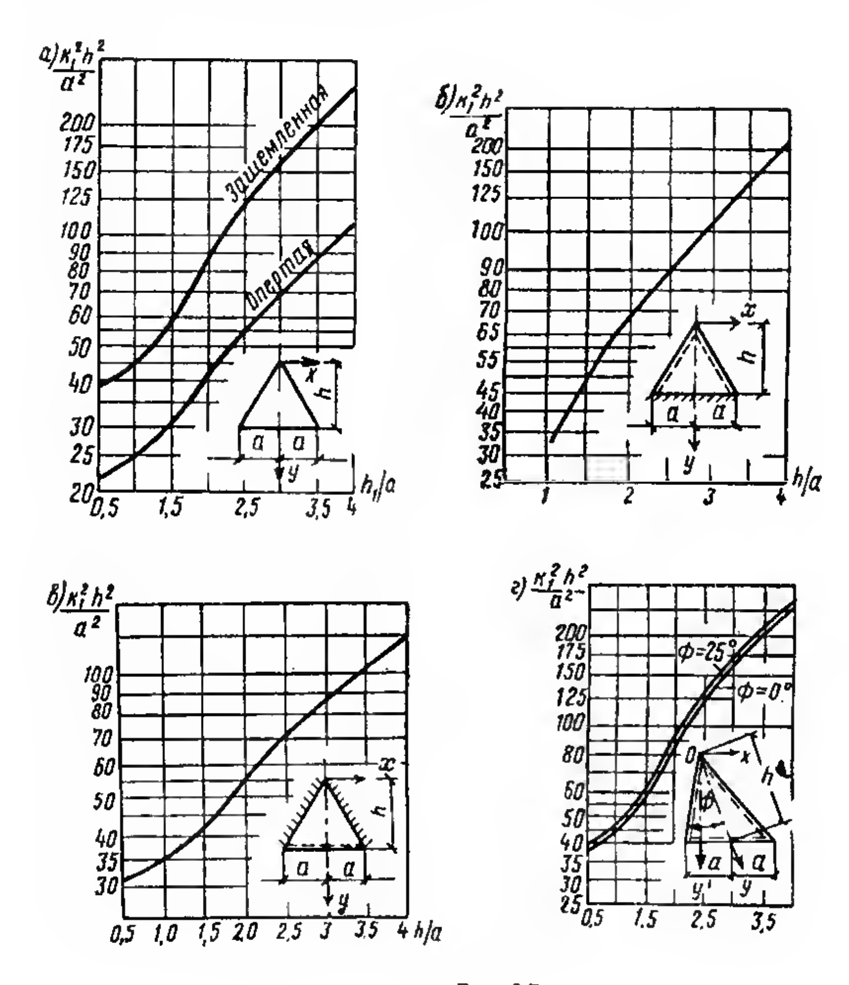


Рис. 8.7

Общее решение уравнения (8.95) для сплошной пластинки будет:

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m \operatorname{Ce}_m(\xi, k^2) \operatorname{ce}_m(\eta, k^2) + B_m \operatorname{Ce}_m(\xi, -k^2) \operatorname{ce}_m(\eta, -k^2)] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [C_m \operatorname{Se}_m(\xi, k^2) \operatorname{se}_m(\eta, k^2) + D_m \operatorname{Se}_m(\xi, -k^2) \operatorname{se}_m(\eta, -k^2)]. \tag{8.96}$$

Здесь Ce_m, ce_m, Se_m, se_m — функции Матье.

Если контур пластинки защемлен, то частотное уравнение для частот, соответствующих формам колебаний, симметричным относительно большой оси эллипса, имеет вид:

$$Ce_m(\xi_0, k^2)\, Ce'_m(\xi_0, -k^2) - Ce'_m(\xi_0, k^2)\, Ce_m(\xi_0, -k^2) = 0. \qquad (8.97)$$

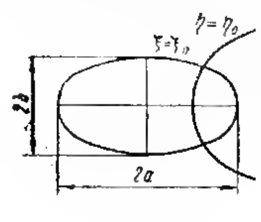


Рис. 8.8

При этом четным m соответствуют формы колебаний, симметричные относительно обеих осей эллипса; нечетным — симметричные относительно большой оси, но несимметричные относительно малой.

Для форм, симметричных относительно малой оси,

$$Se_m(\xi_0, k^2)\, Se'_m(\xi_0, -k^2) - Se'_m(\xi_0, k^2) \times$$
$$\times Se_m(\xi_0, -k^2) = 0. \qquad (8.98)$$

Здесь четным m соответствуют формы колебаний, обратно симметричные относительно обеих осей; нечетным m — симметричные относительно малой оси, но обратно симметричные относительно большой.

Первый корень уравнения (8.98) для различных величин отношения полуосей эллипса a и b вычислен Шибаока [35]:

a/b	5/1	2/1	3/1
$\frac{a^2 \varepsilon^2 p}{4}\sqrt{\frac{m}{D}}$	1,205	5,259	13,18

Здесь ε — эксцентриситет эллипса $\left(\varepsilon = \frac{f}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right)$.

8.9. Неразрезные пластинки и безбалочные плиты

Частоты собственных колебаний регулярных неразрезных пластинок и безбалочных плит, так же как и собственные частоты неразрезных балок, образуют так называемые зоны сгущения, в которых с небольшим интервалом располагается по нескольку частот собственных колебаний. Для определения границ зон сгущения, т. е. наибольшей и наименьшей собственной частоты в каждой зоне, могут быть использованы следующие приближенные формулы [19]. Для неразрезных пластинок на жестких опорах (рис. 8.9), шарнирно опертых по внешнему контуру:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1^0 &= 1,57(1+\eta^2); \\ \varphi_1^* &= 3,56\sqrt{(1+\eta^2)^2 - 1,4\eta^2}; \\ \varphi_2^0 &= 1,57(4+\eta^2); \\ \varphi_2^* &= 3,56\sqrt{7,57 + 2,27\eta^2 + \eta^4}. \end{aligned}\right\} \qquad (8.99)$$

Для безбалочных плит (рис. 8.10) φ_1^0 и φ_2^0 приближенно определяются как наименьшее из двух значений:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1^0 &= 1,57u\left(1 + \frac{\eta^2}{N_y^2}\right) \text{ или } \varphi_1^0 = 1,57u\left(\frac{1}{N_x^2} + \eta^2\right); \\ \varphi_2^0 &= 1,57u\left(4 + \frac{\eta^2}{N_y^2}\right) \text{ или } \varphi_2^0 = 1,57u\left(\frac{4}{N_x^2} + \eta^2\right), \end{aligned}\right\} \qquad (8.100)$$

а φ_1^* и φ_2^* по формулам:

$$\varphi_1^* = 1,57v\,(1+\eta^2);\ \ \varphi_2^* = 1,57v\,(4+\eta^2)\,. \tag{8.101}$$

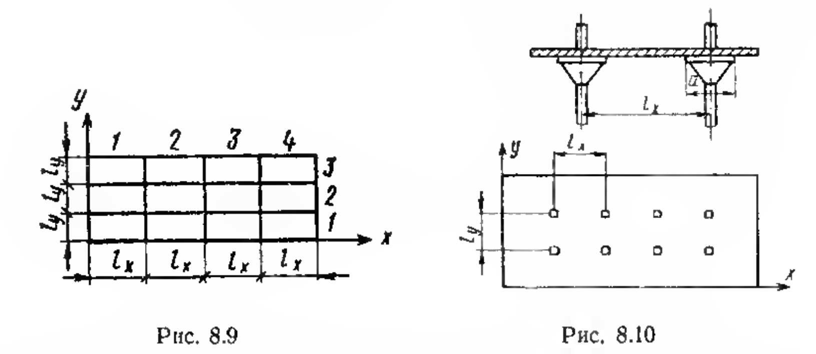


Рис. 8.9 Рис. 8.10

Здесь $\eta = l_x/l_y$; φ — коэффициенты частоты, через которые определяется частота собственных колебаний по формуле

$$p = 2\pi\varphi\sqrt{\frac{D}{ml_x^4}}\,; \tag{8.102}$$

N_x — число пролетов по оси x; N_y — число пролетов по оси y. При этом φ_1^0 и φ_1^* есть коэффициенты частоты для наименьшей и наибольшей из частот первой зоны сгущения, а φ_2^0 и φ_2^* — второй зоны сгущения.

Коэффициент u зависит от отношения погонной жесткости стойки $D_c = EJ_c/h_c$ к цилиндрической жесткости безбалочной плиты, а коэффициент v — от отношения ширины капители a к пролету плиты l_x:

D_c/D	0	0,66	0,8	1	2	4,0
u	1	1,16	1,2	1,25	1,36	1,5

a/l_x	0	1/5	1/4	1/3
v	1	1,12	1,23	1,42

Формулы (8.99)—(8.101) получены в предположении, что $N_x > 4$, $N_y > 4$.

Определение зон сгущения позволяет установить области частот, в которых возможен резонанс. В общем случае, когда необходимо знать все частоты собственных колебаний в пределах некоторого отрезка спектра для неразрезных регулярных плит на жестких опорах, может применяться приближенная формула [7]

$$p_{mn} = \sqrt{\frac{D}{ml_x^4}}\sqrt{k_m^4 + 2\eta^2 C_m C_n + \eta^4 k_n^4}\,, \tag{8.103}$$

где p_{mn} — частота собственных колебаний плиты; k_m, k_n — коэффициенты частоты (собственные числа) для неразрезных балок, квадраты которых приведены в табл. 8.14:

$$\left.\begin{aligned} C_m &= \int_0^{N_x} X_m(\alpha)\,X_m''(\alpha)\,d\alpha;\\ C_n &= \int_0^{N_y} X_n(\beta)\,X_n''(\beta)\,d\beta; \end{aligned}\right\} \tag{8.104}$$

Таблица 8.14

Квадраты собственных чисел k_n^2 для неразрезных балок на жестких опорах

Условия закрепления концов	Количество пролетов	n = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Шарнирное опирание	2	9,87	15,42	39,48	49,97	—	—	—	—	—	—
	3	9,87	12,65	18,47	39,48	45	55,19	—	—	—	—
	4	9,87	11,52	15,42	19,91	39,48	42,85	49,97	57,64	—	—
	5	9,87	10,95	13,69	17,25	20,7	39,48	41,73	46,91	53,18	58,94
Защемление	2	15,42	22,37	49,97	61,67	—	—	—	—	—	—
	3	12,65	18,47	22,38	45	55,19	61,67	—	—	—	—
	4	11,52	15,42	19,91	22,37	42,85	49,97	57,64	61,67	—	—
	5	9,95	15,69	17,25	20,7	22,37	41,73	46,91	53,18	58,94	61,67

$X_m(\alpha)$, $X_n(\beta)$ — нормированные формы собственных колебаний неразрезных балок с соответствующими условиями закрепления концов; $\alpha = x/l_x$, $\beta = y/l_y$ — приведенные координаты; $\eta = l_x/l_y$.

Значения коэффициентов C_m для балок с шарнирно опертыми концами приведены в табл. 8.15.

Таблица 8.15

Значения коэффициентов C_n

Схема балки	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
Δ Δ Δ	9,87	11,5	39,5	42,9	—	—	—	—	—	—
Δ Δ Δ Δ	9,87	10,7	12,3	39,5	40,8	44,9	—	—	—	—
Δ Δ Δ Δ Δ	9,87	10,6	11,5	13,6	39,5	40,1	42,7	45,7	—	—
Δ Δ Δ Δ Δ Δ	9,87	10,2	11	12	12,6	39,5	39,7	41,5	44,2	47

Примечание. Все значения коэффициентов C_n отрицательны. Однако знак минус везде опущен, что не влияет на вычисления по формуле (8.103).

8.10. Вынужденные колебания пластинок

При изучении вынужденных колебаний пластинок рассматривается неоднородное уравнение типа (8.5) или, если колебания пластинки вызваны динамическим загружением, а также вынужденным движением контура, соответствующее однородное уравнение с неоднородными граничными условиями. Существует несколько методов решения задач о вынужденных колебаниях пластинок. Эти методы, так же как и при расчете любой упругой системы на вынужденные колебания, связаны с двумя принципиальными путями решения. Первый путь основан на исключении времени из уравнения колебаний и получении квазистатического уравнения, в котором фигурируют лишь пространственные координаты и решение которого достигается обычными точными или приближенными методами, типичными для статических задач. Для исключения времени применяется либо интегральное преобразование Лапласа, с которым тесно связано классическое операционное исчисление, либо интегральное преобразование Фурье (а также разложение нагрузки в ряд Фурье по времени). Второй путь, наоборот, связан с исключением из уравнения колебаний пластинки пространственных координат и получением обыкновенного дифференциального уравнения по времени или системы таких уравнений. Для исключения пространственных координат можно использовать разложения в ряд по собственным функциям (формам собственных колебаний), интегральные преобразования, вариационные, конечноразностные и другие методы.

Рассмотрим уравнение вынужденных колебаний пластинки

$$DLw + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \qquad (8.105)$$

где L — бигармонический оператор (двойной оператор Лапласа) в прямоугольных или полярных координатах. Для простоты будем считать начальные условия нулевыми. Применение к уравнению (8.105) преобразования Лапласа дает [12]

$$DL\bar{w} + mp^2\bar{w} = \bar{q}, \qquad (8.106)$$

где

$$\bar{w} = \int_0^\infty e^{-pt}\, w\,dt; \quad \bar{q} = \int_0^\infty e^{-pt}\, q\,dt. \qquad (8.107)$$

Уравнение (8.106) не содержит времени, оно совпадает с уравнением изгиба пластинки, лежащей на упругом винклеровском основании с коэффициентом постели $k = mp^2$. Решение квазистатического уравнения (8.106) может быть получено точным или приближенным методом; в последнем случае, правда, возникают трудности при обращении трансформанты (8.107) по формуле

$$w = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt}\,\bar{w}\,dp, \qquad (8.108)$$

где γ — надлежащим образом выбираемое действительное число, обеспечивающее сходимость интеграла (8.108).

Легко исключается время из уравнения (8.105) в случае, если нагрузка является гармонической или полигармонической. Пусть, например, $q = \sum_{j=1}^{k} q_j e^{i\omega_j t}$

Полагая $w = \sum_{j=1}^{k} W_j e^{i\omega_j t}$, приходим к уравнению

$$DLW_j - m\omega_j^2 W_j = q_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \qquad (8.109)$$

Если нагрузка периодическая, то ее можно разложить в ряд Фурье и ограничиться несколькими первыми членами ряда. Для каждого члена ряда будем иметь уравнение типа (8.109), общее решение найдется наложением отдельных решений.

Для исключения пространственной координаты из уравнения (8.105) решение уравнения и нагрузку можно представить в виде рядов по некоторой системе функций. Например, для прямоугольных координат:

$$\left.\begin{aligned} w(x,y,t) &= \sum_{m,n} c_{mn}(t)\, w_{mn}(x,y);\\ q(x,y,t) &= \sum_{m,n} b_{mn}(t)\, W_{mn}(x,y). \end{aligned}\right\} \tag{8.110}$$

Если решение однородного уравнения (8.105) известно, т. е. известны формы собственных колебаний, то в качестве функций $W_{mn}(x, y)$ удобнее всего принять эти собственные функции, в результате чего для определения коэффициентов c_{mn} получается обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} c_{mn} + p_{mn}^2 c_{mn} &= \frac{b_{mn}}{m};\\ b_{mn} &= \iint_s qW_{mn}\, dx\, dy, \end{aligned}\right\} \tag{8.111}$$

где p_{mn} — частоты собственных колебаний пластинки.

Решение уравнения (8.111) при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$c_{mn}(t) = \frac{1}{mp_{mn}} \int_0^t b_{mn}(\tau) \sin p_{mn}(t-\tau)\, d\tau. \tag{8.112}$$

При гармонических колебаниях $(b_{mn}(t) = b_{mn}^0 \cos\omega_0 t)$ решение уравнения (8.111), соответствующее вынужденным установившимся колебаниям, будет:

$$c_{mn}(t) = \frac{b_{mn}^0 \cos \omega_0 t}{m\left(p_{mn}^2 - \omega_0^2\right)}. \tag{8.113}$$

Из (8.113) следует, что при резонансе, когда одна из собственных частот p_{mn} равна частоте возмущающей нагрузки ω_0, прогиб пластинки и внутренние усилия обращаются в бесконечность. Учет затухания колебаний позволяет получить конечные прогибы и усилия. Вводя внутреннее неупругое сопротивление по комплексной теории (см. раздел 3), уравнение колебаний пластинки запишем в виде:

$$D^* Lw^* + m\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} = qe^{i\omega t}, \tag{8.114}$$

где $D^* = D(u + iv)$; w^* — комплексное перемещение ($\mathrm{Re}\, w^* = w$); u, v — параметры, характеризующие внутреннее неупругое сопротивление. Разложение по формам собственных колебаний дает:

$$w = w' \cos \omega t + w'' \sin \omega t, \tag{8.115}$$

где

$$w' = \sum_{m,n} \frac{b_{mn} W_{mn}\left(1 - \dfrac{\omega^2}{p_{mn}^2}\right)}{p_{mn}^2\left[\left(1 - \dfrac{\omega^2}{p_{mn}^2}\right)^2 + \gamma^2\right]}; \tag{8.116}$$

$$w'' = \gamma \sum_{m,n} \frac{b_{mn} W_{mn}}{p_{mn}^2 \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{p_{mn}^2}\right)^2 + \gamma^2 \right]}, \qquad \left(\gamma = \frac{\delta}{\pi}\right);$$

δ — логарифмический декремент колебаний.

Амплитуда прогиба определяется по формуле

$$w_0 = \sqrt{[w']^2 + [w'']^2}. \qquad (8.117)$$

Амплитуды изгибающих моментов, крутящих моментов и поперечных сил можно определять по формуле (8.117), если в выражениях для w' и w'' собственные функции W_{mn} заменены соответствующими выражениями согласно формулам, связывающим прогибы плиты с внутренними усилиями в ней.

Как уже было сказано, формы собственных колебаний прямоугольной пластинки можно получить точным методом, когда два противоположных края ее, например $x=0$, $x=a$, шарнирно оперты или закреплены в скользящей заделке. В этом случае $X_m(x) = \frac{\sin}{\cos} \frac{m\pi x}{a}$, а $Y_n(y)$ есть решение уравнения (8.64), удовлетворяющее тем или иным условиям на краях $y=0$; $y=b$. При этом в разложениях (8.108) суммирование производится по всем корням частотного уравнения.

В случае круглых и кольцевых пластинок формы собственных колебаний имеют вид:

$$W_{mn}(\rho,\theta) = \frac{\cos}{\sin} n\theta \, [A_{mn} J_n(k_{mn}\rho) + B_{mn} J_n(k_{mn}\rho) + C_{mn} Y_n(k_{mn}\rho) + D_{mn} K_n(k_{mn}\rho)]. \qquad (8.118)$$

Для плит конечных размеров ортонормированную форму собственных колебаний $W_{mn}(x, y)$ или $W_{mn}(\rho, \theta)$ можно рассматривать как ядро интегрального преобразования, трансформанта которого для функции w имеет вид:

$$c_{mn}(t) = \iint_s w W_{mn} \, ds, \qquad (8.119)$$

а формула обращения

$$w = \sum_{m,n} c_{mn} W_{mn}. \qquad (8.120)$$

Процедура получения решения при использовании конечного интегрального преобразования отличается от разложения в ряд по собственным функциям лишь тем, что трансформанта, т. е. коэффициент в разложении (8.120), ищется непосредственно из уравнения колебаний. Для этой цели левая и правая части уравнения колебаний умножаются на W_{mn} и производится интегрирование по всей площади пластинки:

$$D \iint_s W_{mn} L w \, ds + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint_s W_{mn} w \, ds = \iint_s q W_{mn} \, ds. \qquad (8.121)$$

Поскольку W_{mn} — собственные функции оператора L, то

$$\iint_s W_{mn} L w ds = \iint_s w L W_{mn} ds = k^4 \iint_s W_{mn} w ds = k^4 c_{mn}$$

и, следовательно, (8.121) переходит в (8.111). При неоднородных граничных условиях в последнем выражении появляются дополнительные функции; в этом случае конечные преобразования особенно удобны. Для неограниченных пластин разложение (8.120) (формула обращения) имеет интегральную форму

$$w = \iint_s c(\xi, \eta) W(\xi, \eta)\, ds, \tag{8.122}$$

причем интегрирование производится по всему спектру оператора L. В частности, для неограниченной пластинки без закреплений можно применить преобразование Фурье по каждой из координат, в направлении которой пластинка неограничена; в полярной системе для таких пластинок применяется преобразование Ханкеля. Для полубесконечных пластин применяется преобразование Фурье по координате, в направлении которой пластинка не ограничена; по второй координате могут быть применены преобразования, введенные в [22]. Для круглых и кольцевых пластинок можно использовать конечное преобразование Фурье по полярному углу и преобразование, соответствующее разложению по формам собственных колебаний (8.121).

При произвольном опирании краев пластинки в качестве W_{mn} принимают какие-либо подходящие функции, а коэффициенты $c_{mn}(t)$ определяют приближенными методами, изложенными в п. 8.5. Например, умножая левую и правую части (8.105) на w_{ij}, интегрируя по всей площади пластинки и используя (8.112), придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений метода Бубнова—Галеркина относительно функций c_{mn}. При этом функции W_{mn} должны удовлетворять всем граничным условиям. Для решения уравнения (8.105) могут быть применены и другие приближенные методы: метод Канторовича—Власова, метод сеток, метод коллокаций и т. д.

В практических расчетах прямоугольных пластинок с произвольным закреплением краев на вынужденные колебания при использовании методов Ритца, Бубнова — Галеркина и т. п. можно принимать $W_{mn}(x, y) = X_m(x) Y_n(y)$, где X_m, Y_n — балочные функции, и ограничиться первым приближением, в результате чего для коэффициентов разложения прогиба получается дифференциальное уравнение (8.111). В частности, при гармоническом возбуждении амплитуды перемещений можно определять по формуле (8.117).

Решение задач о вынужденных колебаниях круглых и кольцевых пластин во многих случаях удается получить в замкнутом виде; при этом удобным оказывается применение метода компенсирующих нагрузок [9]. В частности, решение осесимметричной задачи о вынужденных колебаниях круглой пластинки, загруженной в центре сосредоточенной силой $P\cos\omega t$ (без учета внутреннего неупругого сопротивления) можно представить в виде:

$$w(\xi, t) = W(\xi) \cos \omega t, \tag{8.123}$$

где

$$W(\xi) = w_0(\xi) + A_0 J_0(\xi) + B_0 I_0(\xi);$$

$$w_0(\xi) = -\frac{P}{8D\lambda_1^2}\left[Y_0(\xi) + \frac{2}{\pi} K_0(\xi)\right]; \quad \lambda_1 = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{D}}; \quad \xi = \lambda_1 r.$$

Функция w_0 называется основным решением; она имеет в рассматриваемом частном случае при $\xi = 0$ особенность типа сосредоточенной силы, т. е. ее разложение в окрестности точки $\xi = 0$ имеет слагаемое вида $\xi^2 \ln \xi$. Постоянные A_0 и B_0 определяются из граничных условий на контуре пластинки; если контур пластинки $r = r_0 = \beta/\lambda_1$ защемлен, то при $\xi = \beta$ имеем $w(\beta) = 0$; $\frac{dw}{d\xi}(\beta) = 0$, откуда следует:

$$A_0 = \frac{P}{8D\lambda_1^2} \cdot \frac{I_1(\beta) Y_0(\beta) + I_0(\beta) Y_1(\beta) + \dfrac{2}{\pi\beta}}{J_0(\beta) I_1(\beta) + J_1(\beta) I_0(\beta)}; \tag{8.124}$$

$$B_0 = \frac{P}{4\pi D\lambda_1^2} \cdot \frac{J_1(\beta) K_0(\beta) - J_0(\beta) K_1(\beta) + \dfrac{1}{\beta}}{J_0(\beta) I_1(\beta) + J_1(\beta) I_0(\beta)}. \qquad (8.125)$$

Если на круглую пластинку действует нагрузка $q\cos\omega t$, равномерно распределенная по окружности радиуса $r = \alpha/\lambda_1$, то функцию $w(\xi, t)$ также можно представить в виде (8.123). Функция $w_0(\xi)$, которая в этом случае должна при $\xi = \alpha$ давать разрыв в поперечной силе на величину q, имеет следующий вид:

при $\xi \leqslant \alpha$

$$w_0(\xi) = -\frac{\pi q \alpha}{4D\lambda_1^3}\left[J_0(\xi) Y_0(\alpha) + \frac{2}{\pi} I_0(\xi) K_0(\alpha)\right]; \qquad (8.126)$$

при $\xi \leqslant \alpha$

$$w_0(\xi) = -\frac{\pi q \alpha}{4D\lambda_1^3}\left[Y_0(\xi) J_0(\alpha) + \frac{2}{\pi} K_0(\xi) I_0(\alpha)\right]. \qquad (8.127)$$

В этом случае при защемленном крае:

$$A_0 = \frac{\pi q \alpha}{4D\lambda_1^3} \cdot \frac{J_0(\alpha)\left[I_1(\beta) Y_0(\beta) + I_0(\beta) Y_1(\beta)\right] + \dfrac{2}{\pi\beta} I_0(\alpha}{I_0(\beta) I_1(\alpha) + I_1(\beta) I_0(\beta)}; \qquad (8.128)$$

$$B_0 = \frac{q\alpha}{2D\lambda_1^3} \cdot \frac{\dfrac{1}{\beta} J_0(\alpha) + I_0(\alpha)\left[I_1(\beta) K_0(\beta) - J_0(\beta) K_1(\beta)\right]}{I_0(\beta) J_1(\beta) + I_1(\beta) J_0(\beta)}. \qquad (8.129)$$

Если нагрузка $q_1\cos\omega t$ равномерно распределена по кольцу с приведенными радиусами α_1, α_2, где $\alpha_1 < \alpha_2$, то функция w_0 имеет вид:

при $\xi \leqslant \alpha_1$

$$w_0(\xi) = -\frac{\pi q_1}{4D\lambda_1^4}\Big\{\left[\alpha_2 Y_1(\alpha_2) - \alpha_1 Y_1(\alpha_1)\right] J_0(\xi) - \frac{2}{\pi}\left[\alpha_2 K_1(\alpha_2) - \right.$$

$$\left. - \alpha_1 K_1(\alpha_1)\right] I_0(\xi)\Big\}; \qquad (8.130)$$

при $\xi \geqslant \alpha_2$

$$w_0(\xi) = -\frac{\pi q_1}{4D\lambda_1^4}\Big\{\left[\alpha_2 J_1(\alpha_2) - \alpha_1 J_1(\alpha_1)\right] Y_0(\xi) + \frac{2}{\pi}\left[\alpha_2 I_1(\alpha_2) - \right.$$

$$\left. - \alpha_1 I_1(\alpha_1)\right] K_0(\xi)\Big\}; \qquad (8.131)$$

при $\alpha_2 \geqslant \xi \geqslant \alpha_1$

$$w_0(\xi) = -\frac{\pi q_1}{4D\lambda_1^4}\Big[\frac{4}{\pi} - \alpha_1 J_1(\alpha_1) Y_0(\xi) - \frac{2}{\pi}\alpha_1 I_1(\alpha_1) K_0(\xi) +$$

$$+ \alpha_2 Y_1(\alpha_2) J_0(\xi) - \frac{2}{\pi}\alpha_2 K_1(\alpha_2) I_0(\xi)\Big], \qquad (8.132)$$

а числа A_0 и B_0 определяются из граничных условий.

Для кольцевых пластинок функция $W(\xi)$ имеет вид:

$$W(\xi) = w_0(\xi) + A_0 J_0(\xi) + B_0 I_0(\xi) + A_0^* Y_0(\xi) + B_0^* K_0(\xi), \qquad (8.133)$$

и определение постоянных A_0, B_0, A_0^*, B_0^* становится сравнительно трудоемким. Для решения задачи о вынужденных колебаниях кольцевых пластинок удобно применять метод начальных параметров; для этого нужно построить систему функций, аналогичных функциям Крылова в задаче о колебаниях балки. Эти функции и подробное изложение схемы вычислений рассмотрены в [9].

В случае неосесимметричных колебаний круглой пластинки, вызванных сосредоточенной силой $P\cos\omega t$, приложенной в точке с координатами r_1, $\theta_1 (r_1=\alpha_1/\lambda_1)$, решение по методу компенсирующих нагрузок можно представить в виде:

$$w(\xi,\theta)=w_0(\xi,\theta)+w_k(\xi,\theta), \tag{8.134}$$

где

$$w_0(\xi,\theta)=-\frac{P}{8D\lambda_1^2}\left[Y_0(z)+\frac{2}{\pi}K_0(z)\right];$$

$$z=\sqrt{\alpha_1^2+\xi^2-2\alpha_1\xi\cos(\theta_1-\theta)};$$

ξ, θ — координаты точки, в которой определяется прогиб;

$$w_k=\sum_{n=0}^{\infty}{}' \left[A_n J_n(\xi)+B_n I_n(\xi)\right]\cos n(\theta_1-\theta).$$

Здесь символ «штрих» означает, что при $n=0$ соответствующий член ряда умножается на $^1/_2$. Коэффициенты A_n и B_n определяются из условий на контуре пластинки. Для фактического получения решения следует использовать формулы сложения бесселевых функций. Если пластинка защемлена по контуру, то

$$A_n=\frac{P}{4D\lambda_1^2}\cdot\frac{J_n(\alpha)\left[Y_n'(\beta)I_n(\beta)-Y_n(\beta)I_n'(\beta)\right]-\frac{2}{\pi\beta}I_n(\alpha)}{I_n(\beta)J_n'(\beta)-J_n(\beta)I_n'(\beta)}, \tag{8.135}$$

$$B_n=\frac{P}{4D\lambda_1^2}\times$$

$$\times\frac{\frac{2}{\pi}I_n(\alpha)\left[J_n'(\beta)K_n(\beta)-J_n(\beta)K_n'(\beta)\right]-\frac{2}{\pi\beta}J_n(\alpha)}{I_n(\beta)J_n'(\beta)-J_n(\beta)I_n'(\beta)}. \tag{8.136}$$

Полученное решение позволяет рассмотреть задачу о свободных и вынужденных колебаниях круглой пластинки с насаженными дополнительными массами или точечными опорами [9], а также может быть использовано для получения решения задачи о вынужденных колебаниях безбалочного перекрытия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В., Москаленко В. Н. Колебания пластинок. Справочник «Прочность, устойчивость, колебания», т. 3. «Машиностроение», 1968.

2. Болотин В. В. и др. Асимптотический метод исследования спектра собственных частот упругих пластинок. В сб.: «Расчеты на прочность», вып. 6. Машгиз, 1960.

3. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Физматгиз, 1963.

4. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. ГИТТЛ, 1956.

5. Гликман Б. Т. Свободные колебания круглой пластинки со смешанными граничными условиями. Известия АН СССР. «Механика твердого тела», 1972, № 1.

6. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек. Киев, «Наукова думка», 1964.

7. Инструкция по расчету несущих конструкций промышленных зданий и сооружений на динамические нагрузки. Стройиздат, 1970.
8. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. ГИТТЛ, 1952.
9. Коренев Б. Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. Физматгиз, 1960.
10. Лехницкий С. Т. Анизотропные пластинки. ГИТТЛ, 1957.
11. Локшин А. Ш. Прямоугольные пластинки, подкрепленные ребрами. ПММ, 1935, № 2.
12. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. Гостехиздат, 1950.
13. Мак-Лахлан. Теория и приложения функций Матье. ИЛ, 1954.
14. Москаленко В. Н. К применению уточненных теорий изгиба пластинок в задаче о собственных значениях. «Инженерный журнал», т. 1, № 3, 1961.
15. Новацкий В. Динамика сооружений. Госстройиздат, 1963.
16. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины. Изд-во МГУ, 1969.
17. Сахаров И. Е. Динамические жесткости в теории осесимметричных колебаний круглых и кольцевых пластинок. Известия АН СССР, «Механика», № 5, 1959.
18. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИЛ, 1955.
19. Сорокин Е. С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. Госстройиздат, 1956.
20. Томсон О. И. Экспериментальные исследования колебаний безбалочных перекрытий. В сб.: «Исследования по динамике сооружений». Госстройиздат, 1951.
21. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. «Машиностроение», 1970.
22. Цейтлин А. И. Интегральные преобразования, связанные с бигармонической проблемой на полуплоскости и полупространстве и их применение к задачам теории упругости. Известия АН СССР, ОТН, «Механика», № 1, 1965.
23. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции, формулы, графики, таблицы. «Наука», 1964.
24. Barton M. V. Vibration of rectangular and skew cantilever plates. J. of APM, 1951, 18, № 1.
25. Blanch G. Notes on zeros of $J_n(x)J_{n+1}(x)+J_{n+1}(x)J_n(x)=0$. Mathematikal tables and other aides to computation. 1952, 6, № 37.
26. Carrington H. The frequencies of vibration of flat circular plates fixed at the circumference. Phil. Mag., 1925, v. 50, № 6.
27. Cox H., Boxer Y. Vibration of the corners. Aeron. Quart., 1960, 11, № 1.
28. Hamada M., Kondo H. Vibration of clamped parallelogrammik isotropik plates. Симане дайгаку ронсю. 1957, 24, № 7.
29. Hasegawa M. Vibration of clamped parallelogrammic isotropic plates. J. of Aeron. Sci. 1957, 2, № 2.
30. Kaul R. K., Cadambe V. The natural frequencies of thin skew plates. Aeron. Quart., 1956, 74, p. 337.
31. Klein B. Natural frequencies of constant thickness cantilever triangular plates of arbitrary plan form. J. Roy. Aeron. Soc. 1956, v. 60, 544.
32. Mindlin R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. Journ. Appl. Mech., 1951, 18, № 1.
33. Nishimura T. Studies on vibration problems of flat plates by means of difference calculus. Proc. 3-rd Yapan Nat. Congr. for Appl. Mech. 1953, p. 457.
34. Odman S. T. A. Studies of boundary value problems, part II. Characteristic functions of rectangular plates. Sv. forsk. inst. fo cem. ach. bel. Stockholm, 1955.
35. Shibaoka G. On the transverse vibration of an elliptic plate with clamped edge. Journ. Phys. Soc. Japan. 1956, 11, № 7.

РАЗДЕЛ 9

ДИНАМИКА УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

(О. В. Лужин)

9.1. Основные уравнения динамики тонких упругих оболочек

Колебания упругой изотропной оболочки, постоянная толщина которой δ существенно меньше минимального радиуса кривизны $R_{мин}$ срединной поверхности ($\delta \leqslant 0{,}05\,R_{мин}$), описываются системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial BN_1}{\partial\alpha}-\frac{N_2}{AB}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial AS_2}{\partial\beta}+\frac{S_1}{AB}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}+\\
&\qquad+k_1Q_1-\delta\gamma\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=-p_u(\alpha,\beta,t);\\
&\frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial AN_2}{\partial\beta}-\frac{N_1}{AB}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial BS_1}{\partial\alpha}+\frac{S_2}{AB}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\\
&\qquad+k_2Q_2-\delta\gamma\frac{\partial^2v}{\partial t^2}=-p_v(\alpha,\beta,t);\\
&-k_1N_1-k_2N_2+\frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial BQ_1}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial AQ_2}{\partial\beta}-\\
&\qquad-\delta\gamma\frac{\partial^2w}{\partial t^2}=-p_w(\alpha,\beta,t),
\end{aligned}\right\}\qquad(9.1)$$

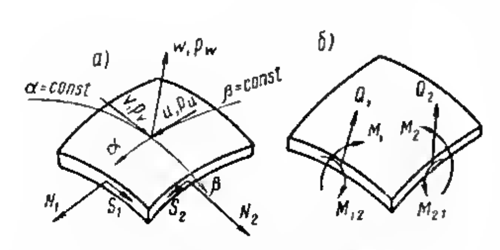


Рис. 9.1. Усилия, возникающие в оболочке

а — нормальные и сдвигающие силы; *б* — поперечные силы, изгибающие и крутящие моменты

где N_1, N_2, S_1 и S_2 — погонные нормальные и сдвигающие усилия, положительные направления которых указаны на рис. 9.1, *а*, действующие в сечениях, совпадающих с линиями главных кривизн; Q_1, Q_2 — погонные поперечные силы (рис. 9.1, *б*): $p_u(\alpha, \beta, t)$, $p_v(\alpha, \beta, t)$ — составляющие внешней нагрузки, направленные соответственно по касательным к ортогональным координатным линиям α и β на срединной поверхности, совпадающим с линиями главных кривизн; $p_w(\alpha, \beta, t)$ — составляющая нагрузки, перпендикулярная касательной поверхности (рис. 9.1, *а*); $A(\alpha, \beta)$, $B(\alpha, \beta)$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности; $k_1(\alpha, \beta)$, $k_2(\alpha, \beta)$ — главные кривизны срединной поверхности, определяемые как величины, обратные ее

главным радиусам кривизн вдоль линий $\beta=\text{const}$ и $\alpha=\text{const}$ соответственно; E — модуль упругости; γ — плотность материала оболочки; t — время.

Погонные поперечные силы Q_1 и Q_2 связаны с погонными изгибающими M_1 и M_2 и крутящими моментами M_{12} и M_{21} (рис. 9.1, *б*) соотношениями:

$$Q_1=\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial AM_{21}}{\partial\beta}+M_{12}\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{\partial BM_1}{\partial\alpha}+M_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right);$$

$$Q_2=\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial BM_{12}}{\partial\alpha}+M_{21}\frac{\partial B}{\partial\alpha}-\frac{\partial AM_2}{\partial\beta}+M_1\frac{\partial A}{\partial\beta}\right), \qquad (9.2)$$

причем

$$\left.\begin{aligned}
N_1&=\frac{E\delta}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2-\frac{\delta^2}{12}(k_1-k_2)\varkappa_1\right];\\
N_2&=\frac{E\delta}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1+\frac{\delta^2}{12}(k_1-k_2)\varkappa_2\right];\\
S_1&=\frac{E\delta}{2(1+\mu)}\left[\omega-\frac{\delta^2}{12}(k_1-k_2)\tau\right];\\
S_2&=\frac{E\delta}{2(1+\mu)}\left[\omega+\frac{\delta^2}{12}(k_1-k_2)\tau\right];\\
M_1&=-\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}[\varkappa_1+\mu\varkappa_2+k_2(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2)];\\
M_2&=-\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}[\varkappa_2+\mu\varkappa_1+k_1(\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1)];\\
M_{12}&=\frac{E\delta^3}{24(1+\mu)}[2\tau+k_2\omega];\\
M_{21}&=\frac{E\delta^3}{24(1+\mu)}[2\tau+k_1\omega],
\end{aligned}\right\} \qquad (9.3)$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Связь линейных и сдвиговых относительных деформаций ε_1, ε_2, ω и величин, характеризующих изменение кривизн и кручения $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и τ с компонентами перемещений u, v и w точек срединной поверхности оболочки, устанавливается соотношениями:

$$\varepsilon_1=\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{v}{AB}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}+k_1w;$$

$$\varepsilon_2=\frac{u}{AB}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial v}{\partial\beta}+k_2w;$$

$$w=\frac{A}{B}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right)+\frac{B}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right);$$

$$\varkappa_1=\frac{u}{A}\cdot\frac{\partial k_1}{\partial\alpha}+\frac{v}{B}\cdot\frac{\partial k_1}{\partial\beta}-k_1^2w-\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)-$$

$$-\frac{1}{AB^2}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta};$$

$$\varkappa_2=\frac{u}{A}\cdot\frac{\partial k_2}{\partial\alpha}+\frac{v}{B}\cdot\frac{\partial k_2}{\partial\beta}-k_2^2w-\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)-$$

$$-\frac{1}{A^2B}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\alpha};$$

$$\tau=\frac{k_1-k_2}{2}\left[\frac{A}{B}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right)-\frac{B}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}\right). \qquad (9.4)$$

При рассмотрении свободных колебаний оболочек в уравнениях (9.1) следует положить равными нулю правые части: $p_u(\alpha,\ \beta,\ t)=p_v(\alpha,\ \beta,\ t)=p_w(\alpha,\ \beta,\ t)=0$.

Рассмотрение уравнений (9.1) в совокупности с соотношениями (9.2)—(9.4), а также учет соответствующих граничных условий позволяют полностью решить задачу как об определении спектра собственных частот и соответствующих им форм собственных колебаний, так и о расчете оболочек на внешнее динамическое воздействие.

К числу характерных граничных условий следует отнести упругое опирание края вдоль одной из координатных линий относительно перемещений u, v, w и поворота ϑ_1 на краю $\beta=\text{const}$ или ϑ_2 на краю $\alpha=\text{const}$. При этом на краю $\beta=\text{const}$ $N_1=-k_N u$; $S_1=-k_S v$; $\overline{Q}_1=-k_Q w$; $M_1=-k_M\vartheta_2$, а на краю $\alpha=\text{const}$ соблюдаются условия $N_2=-k_N u$; $S_2=-k_S v$; $\overline{Q}_2=-k_Q w$; $M_2=-k_M\vartheta_1$, причем углы поворотов ϑ_1 и ϑ_2 и обобщенные погонные поперечные силы $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$ равны:

$$\vartheta_1=\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial w}{\partial\alpha}-k_1 u;\quad \vartheta_2=\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}-k_2 v;$$

$$\overline{Q}_1=Q_1+\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial M_{12}}{\partial\beta};\quad \overline{Q}_2=Q_2+\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial M_{21}}{\partial\alpha}.$$

Здесь k_N, k_S, k_Q и k_M — коэффициенты жесткости опор относительно трех линейных смещений и поворота. Полагая все коэффициенты жесткости равными нулю, получим условия свободного края. Устремляя коэффициенты жесткости к бесконечности, получим условия для защемленного края. Для шарнирно подвижного (свободного) опирания имеем $k_N=0$, $k_S=0$, $k_Q\to\infty$, $k_M=0$ и т. д.

Потенциальная энергия упругих деформаций оболочки U и кинетическая энергия в процессе колебаний T, записываются в виде:

$$U=\frac{1}{2}\iint\left\{\frac{E\delta^2}{1-\mu^2}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-2(1-\mu)(\varepsilon_1\varepsilon_2-\omega^2)\right]+\right.$$

$$\left.+D\left[(\varkappa_1+\varkappa_2)^2-2(1-\mu)(\varkappa_1\varkappa_2-\tau^2)\right]\right\}ABd\alpha d\beta;$$

$$T=\frac{1}{2}\iint\gamma\delta\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]AB\,d\alpha\,d\beta,$$

где

$$D=\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$$

— цилиндрическая жесткость оболочки. Двойное интегрирование распространяется на всю срединную поверхность оболочки.

Динамический расчет ортотропных оболочек постоянной толщины, когда оси ортотропии совпадают с линиями главных кривизн, связан с рассмотрением тех же уравнений (9.1), при соблюдении соотношений (9.2) и (9.4), тогда

как физические уравнения (9.3) видоизменяются в связи с необходимостью учета четырех физических констант.

В случае конструктивной ортотропии, когда оболочка подкрепляется системой ребер, совпадающих с линиями главных кривизн, в отдельных случаях при густом расположении ребер представляется возможным реальную систему заменить оболочкой с приведенными физическими константами. При редком расположения элементов подкрепления приходится решать динамическую контактную задачу.

Следствием вводимых при формулировке основных гипотез технической моментной теории оболочек допущений (отсутствие нормальных напряжений, параллельных нормали к срединной поверхности, прямолинейность нормального элемента) является неустранимая погрешность расчета, порядок которой может быть оценен величиной $\delta^2/R^2_{\text{мин}}$, что позволяет в некоторой степени упростить физические уравнения (9.3), отбросив последние члены, заключенные в квадратные скобки, а также упростить три последние соотношения в выражениях (9.4).

В отдельных случаях, когда толщина оболочки весьма мала ($\delta/R < 1/100$—$1/250$), достаточно точные результаты дает использование уравнений безмоментной теории оболочек, которые получаются, если в уравнениях равновесия (9.1) пренебречь поперечными силами, исключить из рассмотрения изгибающие и крутящие моменты и соответствующим образом упростить выражения (9.3) и (9.4). При этом число граничных условий на каждом краю сокращается до двух, связанных с перемещениями u и v.

Для тонких оболочек при $\delta/R_{\text{мин}} \leqslant 1/30$ возможно использование уравнений технической моментной теории оболочек В. З. Власова [4]. В этой теории пренебрегается в первых двух уравнениях (9.1) поперечными силами Q_1 и Q_2, не учитываются последние слагаемые в физических уравнениях (9.3), т. е. принимается закон парности сдвигающих сил $S_1=S_2$ и крутящих моментов $M_{12}=M_{21}$, и не учитываются в трех последних выражениях (9.4) члены, содержащие кривизны, что позволяет систему уравнений, описывающих колебания оболочки, записать в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}-(1-\mu)\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial\varkappa}{\partial\beta}+(1-\mu)\left(Ku-\frac{k_2}{A}\cdot\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)=\\
&\qquad=-\frac{1-\mu^2}{E\delta}\left[p_u(\alpha,\beta,t)-\delta\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right];\\
&\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\beta}-(1-\mu)\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial\varkappa}{\partial\alpha}+(1-\mu)\left(Kv-\frac{k_1}{B}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)=\\
&\qquad=-\frac{1-\mu^2}{E\delta}\left[p_v(\alpha,\beta,t)-\delta\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2v}{\partial t^2}\right];\\
&-(k_1+k_2)Q\theta+\frac{1-\mu}{AB}\left(2ABKw+\frac{\partial Bk_2u}{\partial\alpha}+\frac{\partial Ak_1v}{\partial\beta}\right)-\\
&-\frac{\delta^2}{12}\nabla^2\left(k_1^2+k_2^2\right)w-\frac{\delta^2}{12}\nabla^2\nabla^2w=-\frac{1-\mu^2}{E\delta}\left[p_u(\alpha,\beta,t)-\right.\\
&\qquad\left.-\delta\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\right],
\end{aligned}\right\}\quad(9.5)$$

где

$$\theta=\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial Bu}{\partial\alpha}+\frac{\partial Av}{\partial\beta}\right)+(k_1+k_2)w;$$

$$\varkappa=\frac{1}{2AB}\left(\frac{\partial Bv}{\partial\alpha}-\frac{\partial Au}{\partial\beta}\right);$$

Δ^2 (...) — обобщенный оператор Лапласа;

$$\nabla^2(\ldots)=\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{B}{A}\cdot\frac{\partial(\ldots)}{\partial\alpha}\right]+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{A}{B}\cdot\frac{\partial(\ldots)}{\partial\beta}\right]\right\};$$

$K=k_1k_2$ — гауссова кривизна.

Для пологих оболочек, т. е. для оболочек, у которых стрела подъема не превышает $^1/_5$ наименьшего характерного размера (стороны прямоугольной в плане сферической, параболической, эллиптической оболочки, минимального радиуса опорного кольца и т. п.), можно принять допущение, что срединная поверхность оболочки обладает метрикой евклидовой геометрии. Это позволяет в уравнениях (9.5) положить $A=B=1$, а для оболочек нулевой и гауссовой кривизны принять $K=0$.

Наряду с приближенными подходами к формулировке динамических задач для оболочек следует отметить решения, основанные на рассмотрении уточненных уравнений, характеризуемых учетом эффектов деформации поперечного сдвига [39] и инерции вращения [41].

При исследовании колебаний толстых оболочек необходимо оперировать полной системой уравнений теории упругости [10].

9.2. Методы решения задач о свободных и вынужденных колебаниях оболочек

Определение спектра собственных частот оболочек и расчет последних на действие внешней динамической нагрузки является сложной проблемой, связанной с рассмотрением дифференциальных уравнений в частных производных, в общем случае с переменными коэффициентами, зависящими от трех переменных: координат α, β и времени t.

При исследовании свободных колебаний следует положить, что все перемещения, так же как и усилия, изменяются по гармоническому закону, что позволяет исключить из уравнений (9.1) время, положив

$$u(\alpha,\beta,t)=u(\alpha,\beta)\,e^{-i\omega t};$$

$$v(\alpha,\beta,t)=v(\alpha,\beta)\,e^{-i\omega t}\ \text{ и т. д.,}$$

где i — мнимая единица; ω — частота свободных колебаний. Полученная при этом система уравнений относительно искомых величин, уже зависящих только от координат α и β, запишется аналогично системе (9.1) с нулевыми правыми частями, а инерционные члены приобретают вид:

$$-\delta\frac{\gamma}{g}\omega^2u(\alpha,\beta);\quad -\delta\frac{\gamma}{g}\omega^2v(\alpha,\beta);\quad -\delta\frac{\gamma}{g}\omega^2w(\alpha,\beta)$$

в первом, втором и третьем уравнении соответственно.

Для решения задач об определении спектра собственных частот и соответствующих собственных форм применяются различные методы. Метод непосредственного интегрирования систем дифференциальных уравнений эффективно используется, в частности, при изучении осесимметричных колебаний оболочек вращения (замкнутых цилиндрических оболочек, сферических, конических и т. п.), когда уравнения содержат лишь одну независимую переменную. Этот же метод может быть использован и в тех задачах, в которых условия цикличности или заданные на двух противоположных краях граничные условия допускают решение в виде $u(\alpha,\ \beta)=u(\alpha)\,u(\beta)$, где либо $u(\alpha)$, либо $u(\beta)$ известна и т. д. Так, в частности, можно исследовать колебания оболочек вращения, когда вдоль направляющей перемещения и усилия изменяются по гармоническому закону и пологие оболочки на прямоугольном плане, у которых два противоположных края свободно оперты.

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений может быть получено либо в замкнутом виде с использованием гиперболо-тригонометрических функций для цилиндрической оболочки, функций Бесселя для конической, функций Лежандра для сферической и т. п., либо численными мето-

дами. Однако использовать численные методы следует с определенной осторожностью, необходимой при вычислении быстро осциллирующих функций, порожденных краевым эффектом.

Широкое применение в динамике оболочек находят вариационные методы Релея — Ритца, Бубнова — Галеркина и др. При использовании этих методов необходимо задаваться формой собственных колебаний. Последнее обстоятельство может в отдельных случаях приводить к существенным погрешностям даже при определении низшей собственной частоты, если неудачно выбрать форму деформированной поверхности. Кроме того, вариационные методы не обеспечивают должной точности при густом спектре собственных частот, например в случае тонких сферических оболочек.

Применение метода конечных разностей в отдельных случаях позволяет достаточно точно найти низшие частоты, однако при определении форм колебаний, а тем более усилий, можно получить существенную погрешность. Перспективен метод конечного элемента, успешно развиваемый в настоящее время.

Эффективным средством решения различных задач теории оболочек, применяемым для анализа спектра собственных колебаний и для оценки напряжений, возникающих в зоне краевого эффекта, при высоких частотах колебаний, является разработанный В. В. Болотиным метод, основанный на расчленении решения на асимптотическое решение для внутренней области и на решение, описывающее динамический краевой эффект [1].

После определения спектра частот собственных колебаний оболочки и соответствующих им форм $u_n(\alpha, \beta)$, $v_n(\alpha, \beta)$, $w_n(\alpha, \beta)$, а также функций, характеризующих закон изменения внутренних усилий $N_{1n}(\alpha, \beta)$, $N_{2n}(\alpha, \beta)$ и т. д., которые в дальнейшем обобщенно обозначим символом $Z_n(\alpha, \beta)$, окончательные усилия и перемещения могут быть найдены по формуле

$$Z(\alpha, \beta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(\alpha, \beta)}{\omega_n} \int_0^t q_n(u) \sin \omega_n (t-u)\, du,$$

в общем случае изменения внешних нагрузок во времени и

$$Z(\alpha, \beta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n Z_n(\alpha, \beta)}{\omega_n} \int_0^t f(u) \sin \omega_n (t-u)\, du,$$

если все действующие нагрузки изменяются во времени по одному и тому же закону $f(t)$, т. е.

$$p_u(\alpha, \beta, t) = p_u(\alpha, \beta) f(t); \quad p_v(\alpha, \beta, t) = p_v(\alpha, \beta) f(t),$$
$$p_w(\alpha, \beta, t) = p_w(\alpha, \beta) f(t).$$

Функция q_n определяется по формуле

$$q_n(u) = \frac{\iint [p_u(\alpha, \beta, u) u_n(\alpha, \beta) + p_v(\alpha, \beta, u) v_n(\alpha, \beta) + p_w(\alpha, \beta, u) w_n(\alpha, \beta)]\, d\alpha\, d\beta}{\iint \left[u_n^2(\alpha, \beta) + v_n^2(\alpha, \beta) + w_n^2(\alpha, \beta)\right] d\alpha\, d\beta},$$

а коэффициент разложения нагрузки по формам собственных колебаний a_n равен:

$$a_n = \frac{\iint [p_u(\alpha, \beta, u) u_n(\alpha, \beta) + p_v(\alpha, \beta, u) v_u(\alpha, \beta) + p_w(\alpha, \beta) w_n(\alpha, \beta)]\, d\alpha\, d\beta}{\iint \left[u_n^2(\alpha, \beta) + v_n^2(\alpha, \beta) + w_n^2(\alpha, \beta)\right] d\alpha p \beta}.$$

В записанных формулах двойное интегрирование распространяется на всю поверхность оболочки.

При решении отдельных задач, связанных с расчетом оболочек на действие динамических нагрузок, успешно применялись интегральные преобразования Лапласа — Карсона и Фурье по времени.

9.3. Колебания замкнутой круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины

Дифференциальные уравнения, определяющие формы свободных колебаний и соответствующие им частоты, получаются из выражений (9.1)—(9.4):

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\mu}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\lambda^2\right)u+\frac{1+\mu}{2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}+\mu\frac{\partial w}{\partial\alpha}=0;\\&\frac{1+\mu}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\left(\frac{1-\mu}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\lambda^2\right)v+\frac{\partial w}{\partial\beta}=0;\\&\mu\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial v}{\partial\beta}+(c^2\nabla^2\nabla^2+1-\lambda^2)w=0,\end{aligned}\right\}\qquad(9.6)$$

где β — угол, отсчитываемый от начальной образующей; αR — расстояние от координатной плоскости по образующей до рассматриваемой точки A (рис. 9.2);

$$c^2=\frac{\delta^2}{12R^2};\quad \nabla^2\nabla^2(\cdots)=\frac{\partial^4(\cdots)}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4(\cdots)}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4(\cdots)}{\partial\beta^4};$$

$$\lambda^2=\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\gamma}{g}R^2\omega_n^2.\qquad(9.7)$$

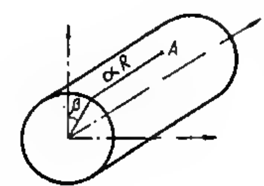


Рис. 9.2. Замкнутая цилиндрическая круговая оболочка

Из условия замкнутости оболочки решение системы (9.6) записывается в виде:

$$u(\alpha,\beta)=u(\alpha)\cos m\beta;\quad v(\alpha,\beta)=v(\alpha)\sin m\beta;\quad w(\alpha,\beta)=w(\alpha)\cos m\beta,$$

где m — число волн упругой поверхности оболочки в окружном направлении.

При осесимметричных колебаниях, когда $m=0$, (9.7) распадается на систему уравнений относительно перемещений вдоль радиуса и вдоль образующей:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{d^2}{d\alpha^2}+\lambda^2\right)u(\alpha)+\mu\frac{dw(\alpha)}{d\alpha}=0;\\&\mu\frac{du(\alpha)}{d\alpha}+\left(c^2\frac{d^4}{d\alpha^4}+1-\lambda^2\right)w(\alpha)=0,\end{aligned}\right\}\qquad(9.8)$$

и одно уравнение относительно перемещения в окружном направлении

$$\left(\frac{1-\mu}{2}\cdot\frac{d^2}{d\alpha^2}+\lambda^2\right)v(\alpha)=0.\qquad(9.9)$$

Решение первой системы уравнений запишется в виде:

$$u(\alpha) = \sum_{j=1}^{6} A_j \eta_j e^{r_j\alpha}; \quad w(\alpha) = \sum_{j=1}^{6} A_j e^{r_j\alpha},$$

где

$$\eta_j = -\frac{\mu r_j}{r_j^2 + \lambda^2},$$

а r_j — корни характеристического уравнения

$$c^2r^6 + c^2\lambda^2r^4 + (1 - \lambda^2 - \mu^2)\, r^2 + \lambda^2 (1 - \lambda^2) = 0.$$

Решение уравнения (9.9) имеет вид:

$$v(\alpha) = B_1 \sin \overline{\lambda}\alpha + B_2 \cos \overline{\lambda}\alpha; \quad \overline{\lambda} = \lambda \sqrt{\frac{1-\mu}{2}}.$$

Решение уравнений (9.8) определяет частоты колебаний, формы которых не сопровождаются поворотом кругового поперечного сечения цилиндрической оболочки в своей плоскости, а решение уравнения (9.9) описывает колебания крутильного типа, при которых каждое поперечное сечение сохраняет свою форму.

При неосесимметричных колебаниях систему уравнений (9.6) можно записать в виде:

$$\left(\frac{d^2}{\partial\alpha^2} - m^2\frac{1-\mu}{2} + \lambda^2\right) u(\alpha) + m\,\frac{1+\mu}{2}\cdot\frac{dv(\alpha)}{d\alpha} + \mu\,\frac{dw(\alpha)}{d\alpha} = 0;$$

$$-\frac{1+\mu}{2}\,m\,\frac{du(\alpha)}{d\alpha} + \left(\frac{1-\mu}{2}\,\frac{d^2}{d\alpha^2} - m^2 + \lambda^2\right) v(\alpha) - mw(\alpha) = 0;$$

$$\mu\,\frac{du(\alpha)}{d\alpha} + mv(\alpha) + \left[c^2\left(\frac{d^4}{d\alpha^4} - 2m^2\frac{d^2}{d\alpha^2} + m^4\right) + 1 - \lambda^2\right] w(\alpha) = 0.$$

Ее решение

$$u(\alpha) = \sum_{j=1}^{8} A_j \xi_j e^{r_j\alpha}; \quad v(\alpha) = \sum_{j=1}^{8} A_j \zeta_j e^{r_j\alpha}; \quad w(\alpha) = \sum_{j=1}^{8} A_j e^{r_j\alpha}, \qquad (9.10)$$

где

$$\xi_j = -\frac{\mu r_j\left(\frac{1-\mu}{2}\,r_j^2 - m^2 + \lambda^2\right) + m^2\,\frac{1+\mu}{2}\,r_j}{\left(r_j^2 - m^2\frac{1-\mu}{2} + \lambda^2\right)\left(r_j^2\,\frac{1-\mu}{2} - m^2 + \lambda^2\right) + m^2 r_j^2\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^2};$$

$$\zeta_j = \frac{m\left(r_j^2 - m^2\frac{1-\mu}{2} + \lambda^2\right) - r_j^2\,\frac{1+\mu}{2}\,\mu m}{\left(r_j^2 - m^2\,\frac{1-\mu}{2} + \lambda^2\right)\left(r_1^2\,\frac{1-\mu}{2} - m^2 + \lambda^2\right) + m^2 r_j^2\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^2}, \qquad (9.11)$$

а r_j — корни уравнения $b_4r^8 + b_3r^6 + b_2r^4 + b_1r^2 + b_0 = 0$, причем

$$b_4 = \frac{1-\mu}{2}\,c^2; \quad b_3 = -(1-\mu)\,c^2m^2 + \left[\frac{1-\mu}{2}\left(\lambda^2 - m^2\,\frac{1-\mu}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda^2 - m^2\right] c^2 + m^2\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^2 c^2;$$

$$b_2=\frac{1-\mu}{2}(c^2m^4+1-\lambda^2)-2m^2c^2\left[\frac{1-\mu}{2}\left(\lambda^2-m^2\frac{1-\mu}{2}\right)+\lambda^2-m^2\right]+$$

$$+c^2\left(\lambda^2-m^2\frac{1-\mu}{2}\right)(\lambda^2-m^2)-\mu^2\frac{1-\mu}{2}-m^4\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^2 2c;$$

$$b_1=(c^2m^4+1-\lambda^2)\left[\frac{1-\mu}{2}\left(\lambda^2-m^2\frac{1-\mu}{2}\right)^2+\lambda^2-m^2\right]-$$

$$-\left(\lambda^2-m^2\frac{1-\mu}{2}\right)(\lambda^2-m^2)2c^2m^2-m^2(1+\mu)\mu-\mu^2(\lambda^2-m^2)+$$

$$+(c^2m^4+1-\lambda^2)m^2\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^2+m^2;$$

$$b_0=(c^2m^4+1-\lambda^2)\left(\lambda^2-m^2\frac{1-\mu}{2}\right)(\lambda^2-m^2)+\left(\lambda^2-m^2\frac{1-\mu}{2}\right)m^2.$$

Записанные формулы позволяют составить уравнения частот. Для этого из краевых условий следует получить систему четырех алгебраических уравнений и приравнять нулю определитель, составленный из коэффициентов при произвольных постоянных.

При решении характеристического уравнения можно получить не только действительные, но и комплексносопряженные или мнимые корни. В этом случае необходимо от экспоненциальных функций в решениях (9.10) перейти к гиперболо-тригонометрическим функциям и соответствующим образом преобразовать формулы (9.11).

Цилиндрическая оболочка со свободно опертыми краями (рис. 9.3)

Частоты колебаний ω_{nm} определяются формулой [30]

$$\omega_{nm}=\frac{k_{nm}}{R}\sqrt{\frac{Gg}{\gamma}\left(1+\varkappa\frac{\delta^2}{R^2}\right)},$$

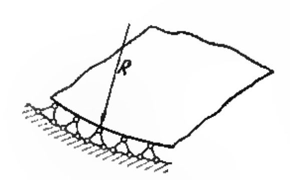


Рис. 9.3. Свободное опирание края

где G — модуль сдвига; γ — плотность; g — ускорение силы тяжести; R — радиус срединной поверхности цилиндрической оболочки; k_{nm} и $\varkappa$ — коэффициенты, зависящие от отношения l/R, где l — длина оболочки, и от числа волн m в окружном направлении. Значения коэффициентов k_{nm} и $\varkappa$ могут быть определены по данным таблиц, приведенных в работе В. С. Гонткевича [6].

При осесимметричных колебаниях ($m=0$) цилиндрической оболочки крутильные колебания независимы от колебаний в продольном и радиальном направлении. При свободном опирании торцов тонкой цилиндрической оболочки можно осесимметричные радиальные и продольные колебания рассматривать раздельно, причем частоту продольных колебаний будут:

$$\omega_{n0}=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma}},$$

а формы

$$u_{n0}=\cos\frac{n\pi x}{l},$$

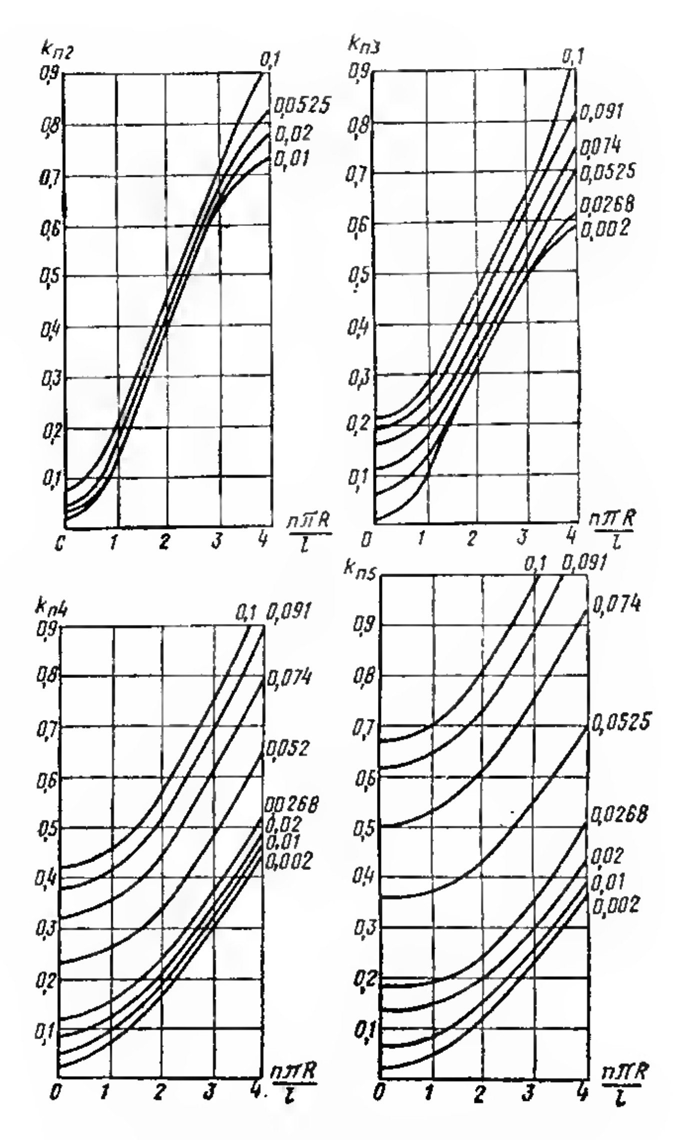


Рис. 9.4. Графики частотных коэффициентов для свободно опертых цилиндрических оболочек

где $n = 1, 2, 3, \ldots$

Для определения собственных частот свободно опертых цилиндрических оболочек используется формула [29]

$$\omega_{nm} = \frac{K_{nm}}{R} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma (1 - \mu^2)}}, \qquad (9.12)$$

коэффициенты k_{nm}, в которой могут быть определены по графикам, приведенным на рис. 9.4 в зависимости от параметра $n\pi \frac{R}{l}$, где n — число по-

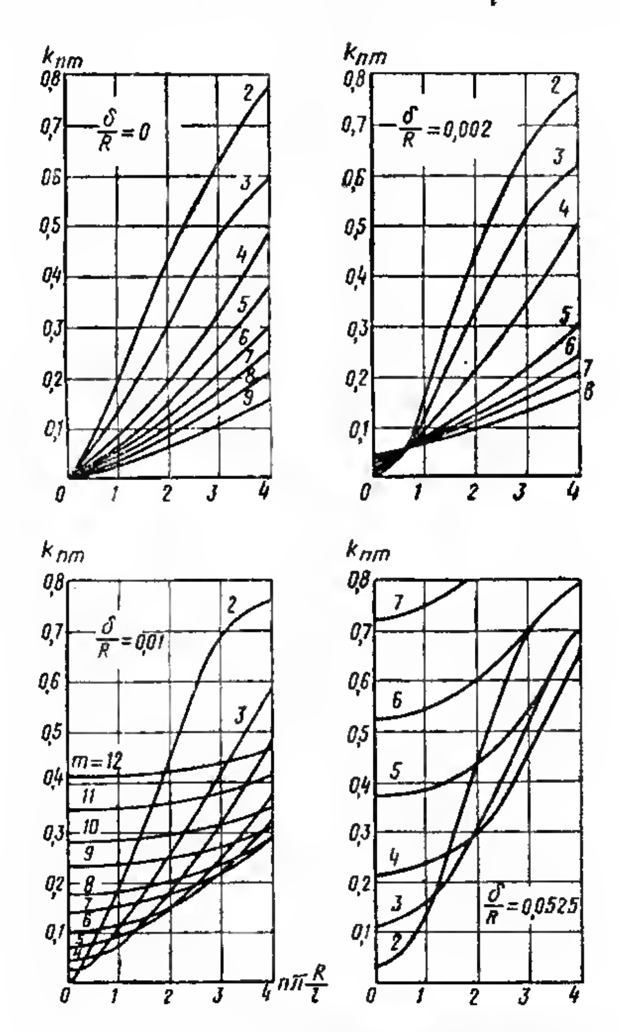


Рис. 9.5. Значения частотных коэффициентов при различных отношениях толщины к радиусу

луволн в направлении образующей. Числа на кривых показывают отношение δ/R.

На рис. 9.5 для четырех значений δ/R представлены зависимости k_{nm} от параметра $n\pi\frac{R}{l}$ при различных m. При определении низших частот колебаний, соответствующих значениям $m \geqslant 1$, для коротких оболочек, когда $l/R = 0{,}5 \div 1$, целесообразно использовать графики на рис. 9.6 [25].

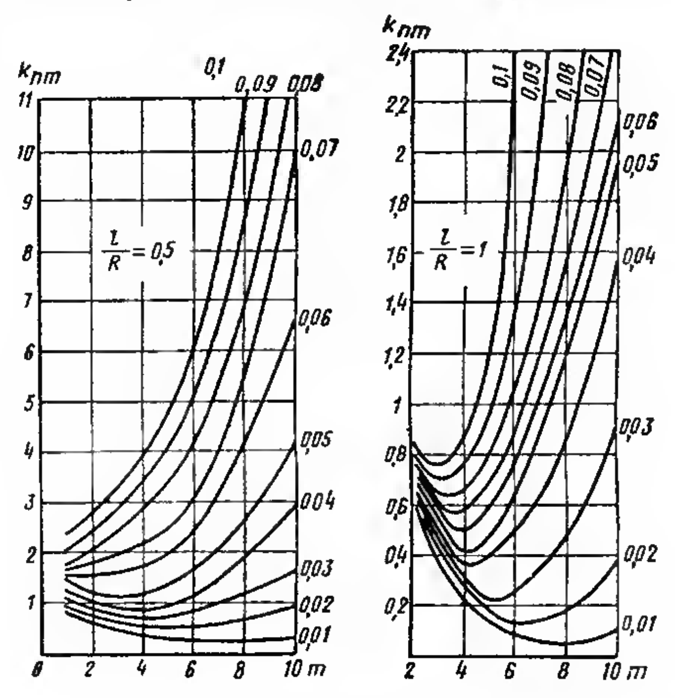


Рис. 9.6. Частотные коэффициенты, соответствующие низшим частотам

Частоты колебаний оболочек средней толщины, когда $R/\delta = 20 \div 5$, могут быть определены по формуле (9.12) при [27]

$$k_{nm}^2 = \frac{1}{1+\beta_2\frac{\delta^2}{R^2}(\lambda^2+m^2)}\left\{(\lambda^2+m^2)^4\,\frac{1-\beta_1\frac{\delta^2}{R^2}(\lambda^2+m^2)}{3}\,\frac{\delta^2}{R^2}+\right.$$

$$\left.+(1-\mu^2)\,\lambda^4\left[1+\beta_3\frac{\delta^2}{R^2}(\lambda^2+m^2)\right]\right\},$$

где

$$\lambda = \frac{n\pi R}{l}; \qquad \beta_1 = \frac{21\mu-1}{105(1-\mu)};$$

$$\beta_2 = \frac{15 - 7\mu}{7(1-\mu)}; \qquad \beta_3 = \frac{17}{21(1-\mu)}.$$

Частоты осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки со свободно опертыми торцами могут быть также определены по формуле [2]

$$\omega_{n0} = \frac{1}{R}\sqrt{1 + 8,14n^4\frac{\delta^2 R^2}{l^4}}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma(1-\mu^2)}}.$$

При $m \neq 0$

$$\omega_{nm} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{\lambda^4(1-\mu^2) + km^6(4\lambda^2 + m^2)}{\lambda^4 + (3+2\mu)\lambda^2 + m^2(1+2\lambda^2) + m^4}}\sqrt{\frac{E\gamma}{g(1-\mu^2)}},$$

где $k = \delta^2/12\ R^2$; $\lambda = n\pi R/l$.

Цилиндрическая оболочка с защемленными торцами

Частоты колебаний тонкой оболочки с защемленными краями, соответствующие формам, не имеющим нулевых радиальных перемещений, исключая торцовые сечения, определяются по формуле (9.12); при этом коэффициент k_{1m} может быть определен в зависимости от отношений R/δ и l/R по графикам рис. 9.7. Цифры на кривых указывают число волн m в окружном направлении, которые соответствуют минимальной частоте.

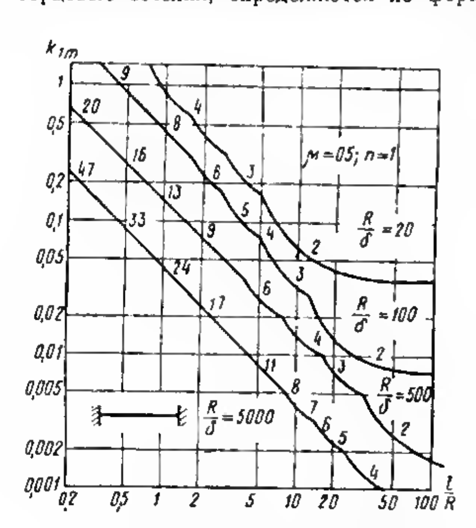


Рис. 9.7. Частотные коэффициенты для защемленной по торцам цилиндрической оболочки

Для трех значений l/R при $R/\delta = 100$ на рис. 9.8 пунктирными линиями представлены графики коэффициентов k_{nm} для защемленной по торцам цилиндрической оболочки. Там же для сравнения (сплошная линия) приведены графики для свободно опертых цилиндрических оболочек [32].

На рис. 9.9, *а—г* даны графики коэффициентов k_{nm} для определения частот

$$\omega_{nm} = \frac{\overline{k}_{nm}}{R_{\text{макс}}}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma(1-\mu^2)}} \qquad (9.13)$$

в толстых, защемленных по торцам, цилиндрах. Здесь $R_{\text{макс}}$ — радиус внешней поверхности цилиндра. Цифрами на кривых обозначены величины $1 - \delta/2R$. Левые графики на каждом рисунке повторяют в увеличенном масштабе начальный участок соответствующего правого графика [33].

Первые две частоты осесимметричных колебаний защемленной по торцам оболочки могут быть также найдены по формулам [2]:

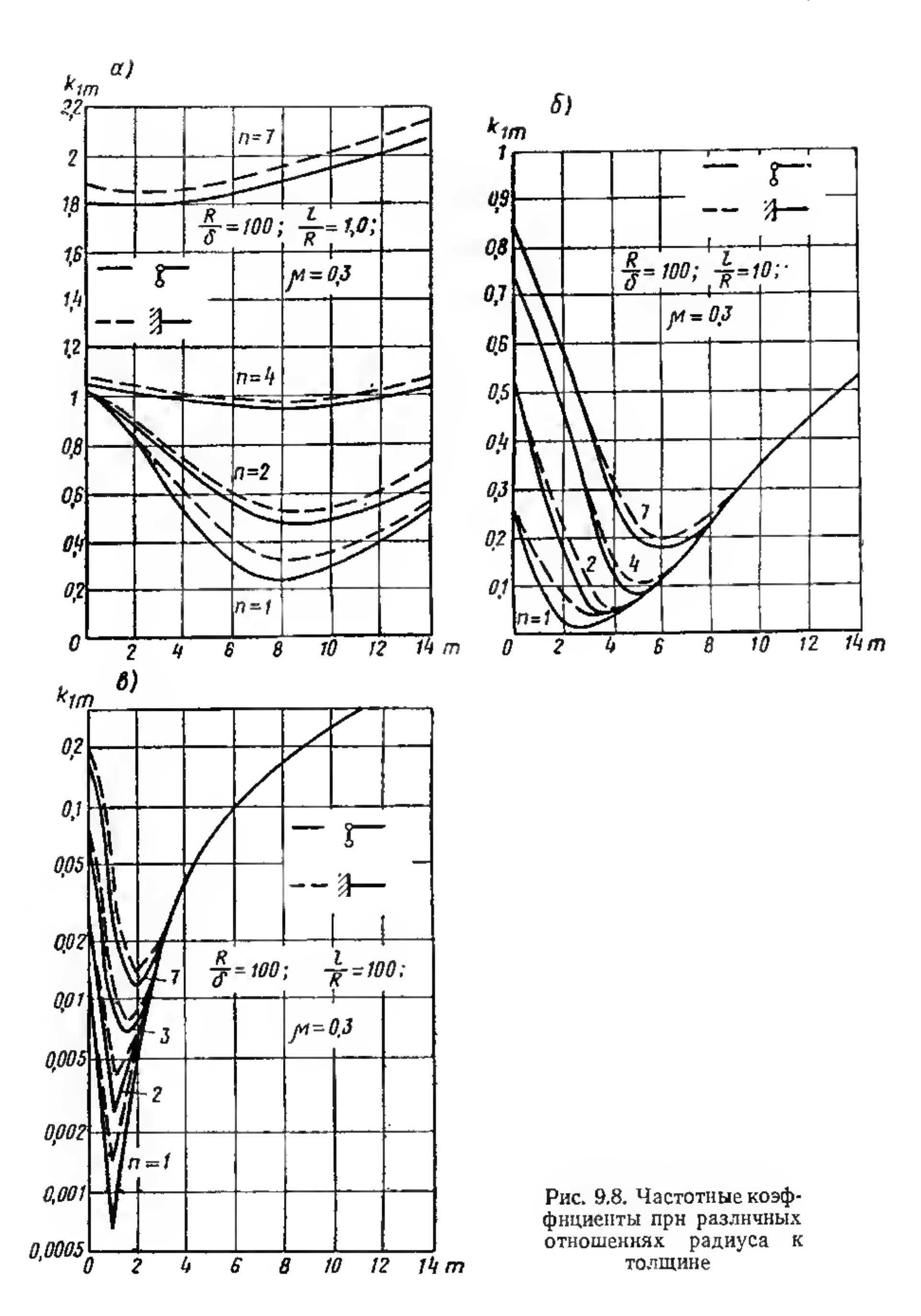


Рис. 9.8. Частотные коэффициенты при различных отношениях радиуса к толщине

$$\omega_{10}=\frac{1}{R}\sqrt{1+41{,}6\,\frac{\delta^2R^2}{l^4}}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma(1-\mu^2)}};$$

$$\omega_{20}=\frac{1}{R}\sqrt{1+318\,\frac{\delta^2R^2}{l^4}}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma(1-\mu^2)}}.$$

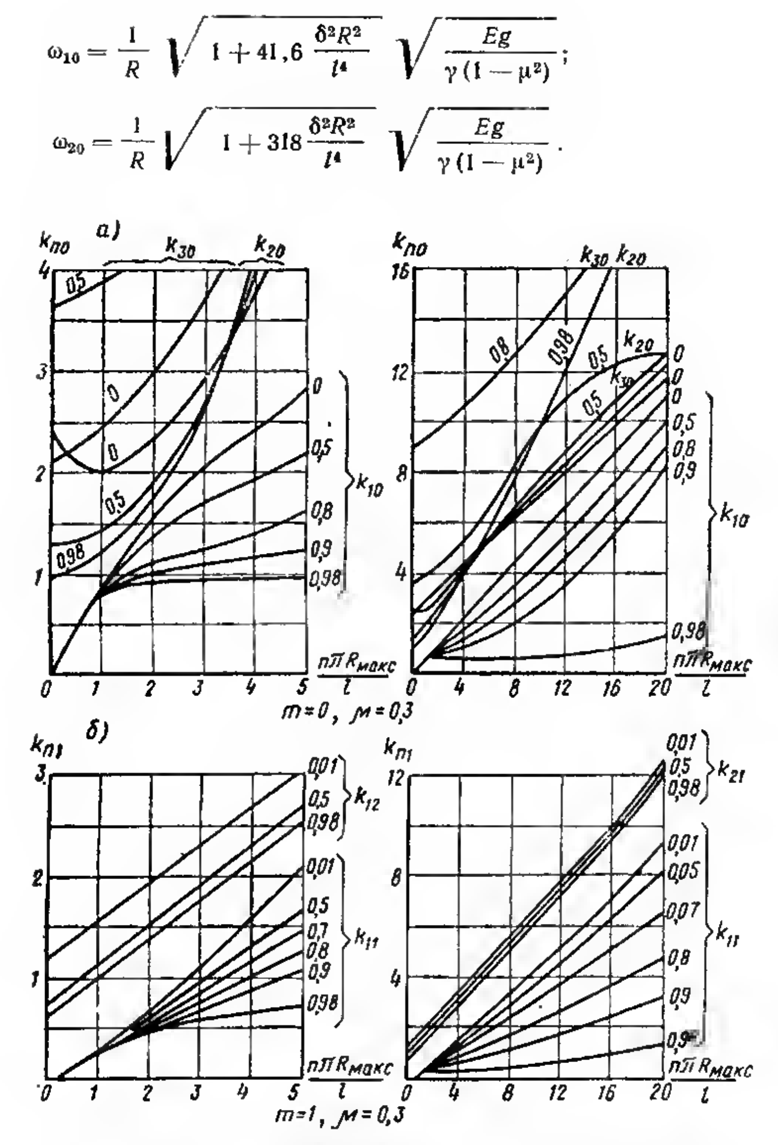


Рис. 9.9. Частотные коэффициенты для толстых защемленных

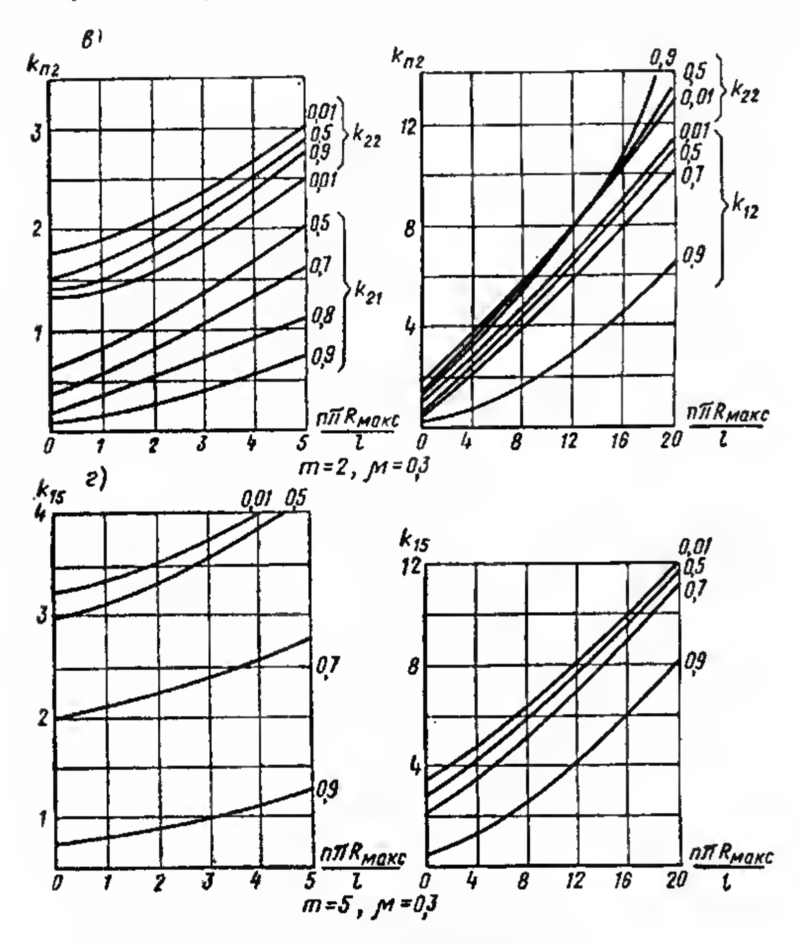
Цилиндрическая оболочка с другими закреплениями торцов

Определение частот колебаний цилиндрических оболочек при разнообразных граничных условиях может быть проведено по формуле (9.12), если для определения коэффициента k_{nm} воспользоваться выражением

$$k_{nm}^2=\frac{h^2}{12R}\,\Omega^2+(1-\mu^2)\,C,$$

причем Ω и C определяются в зависимости от граничных условий по данным таблиц, приведенных в работе [8].

Коэффициенты k_{lm} для различных граничных условий могут быть определены также по графикам рис. 9.10. Так, сплошная линия соответствует свободному опиранию торцов цилиндра, а штриховая — случаю, когда левый торец свободно оперт, а на правом, кроме того, отсутствует продольное смещение. Случаю, характеризуемому закреплением от продольного смещения обоих торцов цилиндрической оболочки, соответствует штрихпунктирная линия. Циф-



по торцам цилиндрических круговых оболочек

ры на кривых, как и ранее (см. рис. 9.7), определяют число волн в кольцевом направлении, соответствующее наименьшей частоте.

На рис. 9.11 представлены графики коэффициента k_{lm} для свободно опертой по торцам оболочки (сплошная линия) и для защемленной по торцам, но имеющей продольные смещения оболочки (штриховая линия) [33]. Как показывает сравнение приведенных графиков, граничные условия для тонких

оболочек сравнительно слабо влияют на величины соответствующих собственных частот, что может быть учтено при проведении практических расчетов.

В том случае когда один из торцов оболочки защемлен, а другой свободно оперт, первые две частоты осесимметричных колебаний определяются также по формулам [2]:

$$\omega_{10} = \frac{1}{R}\sqrt{1 + 19{,}8\frac{\delta^2 R^2}{l^4}}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma(1-\mu^2)}};$$

$$\omega_{20} = \frac{1}{R}\sqrt{1 + 208\frac{\delta^2 R^2}{l^4}}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma(1-\mu^2)}}.$$

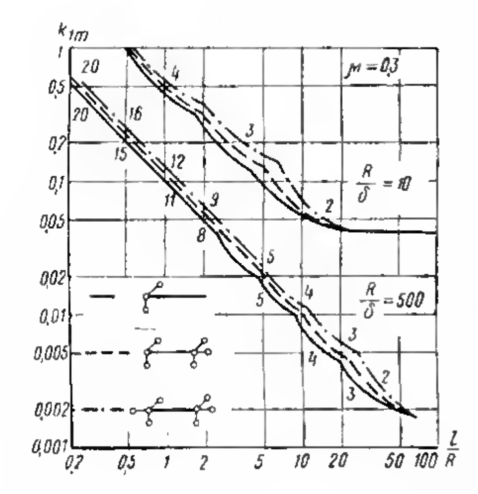


Рис. 9.10. Частотные коэффициенты при различном опирании цилиндрической оболочки

Рис. 9.11. Частотные коэффициенты при различном опирании цилиндрической оболочки

Если на торцы свободно опертой цилиндрической оболочки действуют продольные погонные нормальные силы N и крутящие моменты $M_{кр}$, то частота колебаний определяется формулой (9.12), причем [13]

$$k_{nm}^2 = \frac{(1-\mu^2)\lambda^4 + k(\lambda^2+m^2)^4 + (\lambda^2+m^2)^2(t\lambda^2 - 2s\lambda m)}{(\lambda^2+m^2)^2 + m^2 + (3+2\mu)\lambda^2},$$

где

$$t = \frac{N}{E\delta};\ s = \frac{M_{кр}}{2\pi R^2 E\delta}.$$

Цилиндрическая оболочка с днищем или с фланцами

В том случае, когда торцы оболочки выполнены в виде, представленном на рис. 9.12, частота колебаний определяется как для оболочки со свободно опертым краем, только параметр λ вычисляется в соответствии с эмпирической формулой

$$\lambda = \left(n + 0{,}3e^{-2\frac{\delta}{d}}\right)\frac{\pi R}{l}, \tag{9.14}$$

где d — толщина днища.

Если торец оболочки усилен фланцем (рис. 9.13), то используется формула (9.14), а величина d находится как

$$d = d_1 \sqrt[3]{\frac{1 - R^2/R^2_{\text{макс}}}{\frac{1+\mu}{1-\mu} + R^2/R^2_{\text{макс}}}}, \tag{9.15}$$

где $R_{\text{макс}}$ — внешний радиус фланца; d_1 — его толщина.

Двухслойная цилиндрическая оболочка

Для замкнутой длинной цилиндрической оболочки, состоящей из двух изотропных слоев, низшая частота собственных осесимметричных колебаний определяется формулой [35]

$$\omega_{10} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{6 - 3\frac{\delta_1}{R} + 2\frac{\delta_1^2}{R^2} + \frac{E_2\delta_2}{E_1\delta_1}\left(6 + 3\frac{\delta_2}{R} + 2\frac{\delta_2^2}{R^2}\right)}{6 + 3\frac{\delta_1}{R} + \frac{\gamma_2\delta_2}{\gamma_1\delta_1}\left(6 - 3\frac{\delta_2}{R}\right)}} \sqrt{\frac{E_1 g}{\gamma_1}},$$

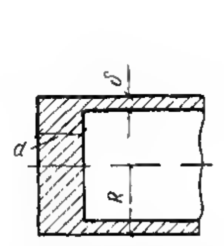


Рис. 9.12. Оболочка с днищем

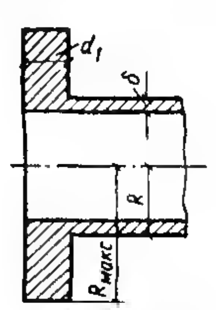


Рис. 9.13. Оболочка с фланцем

где R — радиус окружности, по которой происходит контакт слоев. Параметры, определяющие свойства и размеры наружного слоя, имеют индекс 1, а параметры внутреннего слоя — индекс 2.

Трехслойная цилиндрическая оболочка

Частоты собственных колебаний трехслойной оболочки неосесимметричной структуры при изотропных слоях и свободном опирании торцов определяются по формуле [22]

$$\omega_{nm} = \frac{k_{nm}\pi^2}{R^2} \sqrt{\frac{Dg}{\gamma^*}},$$

где k_{nm} определяется из выражения

$$k_{nm}^2 = \frac{1 + \vartheta k\left(\alpha_n^2 + \beta_m^2\right)}{1 + k\left(\alpha_n^2 + \beta_m^2\right)}\left(\alpha_n^2 + \beta_m^2\right)^2 + \varkappa \frac{\alpha_n^4}{\left(\alpha_n^2 + \beta_m^2\right)^2} \pm N^* \alpha_n^2 \pm 2p^* \beta_m^2. \tag{9.16}$$

В формулах (9.15) и (9.16)

$$\alpha_n = \frac{nR}{l}; \ \beta_m = \frac{m}{\pi}; \ k = \frac{\pi^2\delta^2}{\beta_m R^2}; \ \varkappa = \frac{12(1-\mu^{*2})R^2}{\pi^4\delta^2\theta_0^2};$$

$$N^* = \frac{12(1-\mu^{*2})R^2N}{\pi^2 E\delta^3\theta_0^2}; \ p^* = \frac{12(1-\mu^{*2})R^3p}{\pi^2 E^*\delta^3\theta_0^2}; \ D = \frac{E^*\delta^3\theta_0^2}{12(1-\mu^{*2})},$$

$$\gamma^* = \sum_{i=1}^{3}\gamma_i\delta_i; \ \mu^* = \sum_{i=1}^{3}\mu_i\varepsilon_i; \ \varepsilon_i = \frac{E_i h_i}{\left(1-\mu_i^2\right)\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{E_i\delta_i}{1-\mu_i^2}};$$

$$E^* = \frac{1-\mu^{*2}}{\delta}\sum_{i=1}^{3}\frac{E_i\delta_i}{1-\mu_i^2}; \ \theta = \frac{\theta_1\theta_3-\theta_2^2}{\theta_1\theta_0}; \ t_i = \frac{\delta_i}{\delta};$$

$$\theta_1 = t_3^2\left[1+2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)-3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2\right]; \ \theta_2 = 3\varepsilon_3 t_3(\varepsilon_1 t_1+\varepsilon_2 t_2)+$$
$$+6\varepsilon_1\varepsilon_2 t_3(t_1+t_2); \ \theta_3 = 4\left(\varepsilon_1 t_1^2+\varepsilon_2 t_2^2\right)-3(\varepsilon_1 t_1-\varepsilon_2 t_2)^2;$$
$$\theta_0 = \theta_1+2\theta_2+\theta_3,$$

где δ — полная толщина оболочки; E_i, μ_i, γ_i, δ_i — модули упругости, коэффициенты Пуассона, плотности материала и толщина слоев, причем индексы 1, 2 и 3 относятся соответственно к внешнему, среднему и внутреннему слоям.

В формуле (10.16) знак плюс перед последними членами соответствует растягивающей силе N и внутреннему давлению p, знак минус — сжимающей силе N и внешнему давлению p.

Для защемленной по торцам трехслойной оболочки

$$k_{nm}^2 = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\cdot\frac{1+\theta k\left(\alpha_{1n}^2+\beta_m^2\right)}{1+k\left(\alpha_{1n}^2+\beta_m^2\right)}\left(\alpha_{1n}^2+\beta_m^2\right)+$$
$$+\frac{1}{1+\varepsilon}\cdot\frac{1+\theta k\left(\alpha_{2n}^2+\beta_m^2\right)}{1+k\left(\alpha_{2n}^2+\beta_m^2\right)}\left(\alpha_{2n}^2+\beta_m^2\right)+\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\left[\frac{\alpha_{1n}^4}{\left(\alpha_{1n}^2+\beta_m^2\right)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_{2n}^4}{\left(\alpha_{2n}^2+\beta_m^2\right)^2}\right]\pm\frac{N^*}{1+\varepsilon}\left(\alpha_{1n}^2+\alpha_{2n}^2\right)\pm p^*\beta_m^2,$$

причем

$$\alpha_{1n} = (n-1)\frac{R}{l}; \ \alpha_{2n} = (n+1)\frac{R}{l}; \ \varepsilon = 1 \text{ при } m \neq 1, \ \varepsilon = 2 \text{ при } m = 1.$$

9.4. Колебания замкнутой цилиндрической оболочки эллиптического сечения постоянной толщины

Приближенно частоты колебаний оболочки эллиптического поперечного сечения могут быть найдены по формулам предыдущего параграфа, если в них положить $R = \dfrac{a+b}{2}$, где a и b — большая и малая полуоси эллипса.

Для тонкой свободно опертой по торцам эллиптической анизотропной цилиндрической оболочки частота ω_{1m}, соответствующая одной полуволне вдоль образующей при произвольном числе m, определяется как [21]

$$\omega_{1m} = \frac{k_{1m}\delta}{r_0^2}\sqrt{\frac{E_1 g}{12(1-\mu_1\mu_2)\gamma}},$$

где k_{1m} — определяется из выражения

$$k_{1m}^2 = \lambda^4 + E_3'\lambda^2 m^2\beta^2 + E_2'\lambda^2 m^2\beta^2 + E_2' m^4\beta^4 + \\ + \frac{b_1\lambda^4[(1/\rho)_0 - (1/\rho)_{2m}]}{E_1(E_1\lambda^4 + E_4\lambda^2 m^2\beta^2 + E_2 m^4\beta^4)} - q, \qquad (9.17)$$

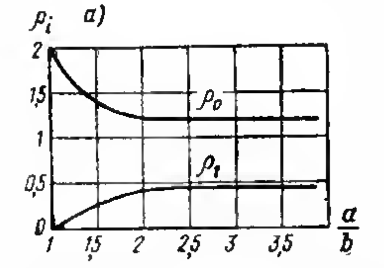
причем

$$q = \frac{12p(1-\mu_1\mu_2)}{E_1}\left(\frac{r_0}{\delta}\right)^3\beta^2\left[m^2\left(\frac{1}{2}\rho_0^2 + \rho_1^2\right) + 1{,}072\rho_1^2 + \frac{\pi ab}{S_0 r_0}\cdot\frac{\lambda^2}{\beta^2}\rho_0\right];$$

$$b_1 = 12(1-\mu_1\mu_2)E_1E_2\left(\frac{r_0}{\delta}\right)^2;\ E_3 = 4G(1-\mu_1\mu_2) + E_1\mu_2 + E_2\mu_1;$$

$$G = \frac{E_1}{2(1+\mu_1)} = \frac{E_2}{2(1+\mu_2)};\ E_4 = \frac{E_1E_2}{G} - E_1\mu_1 - E_2\mu_2;\ \lambda = \frac{\pi r_0}{l};$$

$$\beta = \frac{4\pi}{\eta_0};\ \eta_0 = \frac{S_0}{r_0};\ r_0 = \frac{a^2}{b}.$$



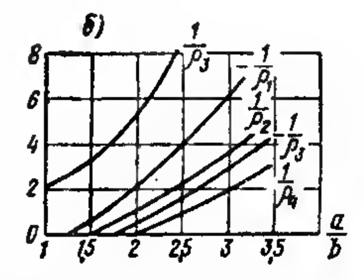


Рис. 9.14. Графики для расчета эллиптической замкнутой оболочки

В этих формулах E_1, μ_1, E_2, μ_2 — соответственно модули упругости и коэффициенты Пуассона вдоль оси и в окружном направлении; p — интенсивность внешнего давления; r_0 — максимальный радиус кривизны поперечного сечения. Величины ρ_0, ρ_1 и $(1/\rho_0)_i$ при $i=0\div4$ определяются по графикам рис. 9.14, *а*, *б* в зависимости от отношения a/b; S_0 — параметр эллипса, выражаемый через полный эллиптический интеграл второго рода, причем приближенно можно принять, что

$$S_0 = \pi\left(3\,\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right).$$

Частота колебаний трехслойной замкнутой цилиндрической оболочки, свободно опертой по торцам, с симметричным строением изотропных слоев и жестким заполнителем определяется выражением

$$\omega_{1m} = \frac{k_{1m}}{r_0^2} \sqrt{\frac{Dg}{\gamma (h+\delta)}},$$

причем $D = \dfrac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость несущего слоя; E — модуль упругости несущего слоя; δ — толщина внешних и внутренних слоев; h — половина толщины среднего слоя; γ — массовая плотность, предполагаемая для всех слоев постоянной; $r_0 = a^2/b$. Частотный коэффициент k_{1m} определяется из формулы

$$k_{1m}^2 = \left(1 - \frac{2E_c}{E} \cdot \frac{h^2}{\delta^2}\right)\left(\lambda^2 + m^2\beta^2\right)^2 + \left[\frac{12}{\delta^2}\left(h + \frac{\delta}{2}\right) + 4\,\frac{E_c}{E} \cdot \frac{h^2}{\delta^3}\right] \times$$

$$\times (\lambda^2 + m^2\beta^2)^2 \frac{h + \dfrac{\delta}{2} + \dfrac{E_c h^2 \delta}{6G(1+\mu) r_0^2}(\lambda^2 + m^2\beta^2)}{1 + \dfrac{h}{G(1-\mu^2) r_0^2}\left(E\delta + \dfrac{E_c h}{3}\right)(\lambda^2 + m^2\beta^2)} +$$

$$+ \frac{12(E\delta + E_c h)(1-\mu^2)\lambda^2 r_0^2}{E\delta^3 \rho_0 (\lambda^2 + m^2\beta^2)^2}\left[(1/\rho)_0 - (1/\rho)_{2m}\right],$$

где E_c — модуль упругости заполнителя. Все остальные обозначения те же, что и в формуле (9.17).

9.5. Колебания гофрированной круговой цилиндрической оболочки

Частоты собственных колебаний гофрированной оболочки определяются по формуле [18]

$$\omega_{nm} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma k_2}} \sqrt{\frac{\dfrac{\lambda_n^4}{k_1} + f_1 m^4 \dfrac{\delta^2}{12R^2}}{m^4 + m^2 + m^6 \dfrac{\delta^2}{12R^2} \cdot \dfrac{f_1}{k_2}}}$$

при условии, что

$$\frac{1}{k_1} + 100\,\frac{\delta^2}{12R^2} k_1 m^4 \leqslant \frac{\left(m^2 + 1 + \dfrac{\delta}{12R^2} k_1 m^4\right)^2}{3{,}6m^2 + 2{,}6\left(1 + \dfrac{\delta}{12R^2} k_1 m^4\right)},$$

где коэффициенты k_1, k_2 и f_1 определяются размерами и формой гофра (табл. 9.1).

Коэффициент λ_n определяется в зависимости от характера закрепления торцов оболочки. При шарнирно неподвижном закреплении обоих торцов:

$$\lambda_1 = \frac{\pi R}{l};\ \lambda_2 = 2\,\frac{\pi R}{l};\ \lambda_3 = 3\,\frac{\pi R}{l};\ \ldots;\ \lambda_n = n\pi\frac{R}{l}.$$

При защемлении обоих торцов:

$$\lambda_1 = 4{,}73\frac{R}{l};\ \lambda_2 = 7{,}853\,\frac{R}{l};\ \lambda_3 = 10{,}996\,\frac{R}{l};\ \ldots;\ \lambda_n = \frac{2n+1}{2}\pi\,\frac{R}{l}.$$

Таблица 9.1

Гофр	k_1	k_2	f_1
Круговой	$\frac{6R^2}{\delta^2} \cdot \frac{\alpha + 0,5\alpha \cos\alpha - 1,5 \sin\alpha}{\sin 0,5\alpha} + \frac{\alpha + \sin\alpha}{4 \sin 0,5\alpha}$	$\frac{\alpha}{2 \sin 0,5\,\alpha}$	$\frac{6R^2}{\delta^2} \cdot \frac{\alpha + 0,5\alpha \cos\alpha - 1,5 \cos\alpha}{\sin 0,5\alpha} + \frac{1}{\cos 0,5\alpha}$
Пильчатый	$\frac{H^2}{\delta^2} \cdot \frac{1}{\cos\theta_0} + \cos\theta_0$	$\frac{1}{\cos\theta_0}$	$\frac{H^2}{\delta^2} \cdot \frac{1}{\cos\theta_0} + \frac{1}{\cos^3\theta_0}$
Синусоидальный $\theta_0 < 15°$	$1,5\,\frac{H^2}{\delta^2} + 1$	1	$1,5\,\frac{H^2}{\delta^2} + 1$
Трапецеидальный	$\frac{H^2}{\delta^2}\left(\frac{1-2a/l}{\cos\theta_0} + 6a/l\right) + (1-2a/l)\cos\theta_0 + 2\,\frac{a}{l}$	$\frac{1-2a/l}{\cos\theta_0} + 2a/l$	$\frac{H^2}{\delta^2}\left(\frac{1-2a/l}{\cos\theta_0} + 6\,\frac{a}{l}\right) + (1-2a/l)\,\frac{1}{\cos^3\theta_0} + 2a/l$

Если один торец защемлен, а другой шарнирно неподвижен, то

$$\lambda_1 = 3{,}927\,\frac{R}{l}\,;\ \lambda_2 = 7{,}069\,\frac{R}{l}\,;\ \lambda_3 = 10{,}21\,\frac{R}{l}\,;\ \ldots;\ \lambda_n = \frac{4n+1}{4}\,\pi\,\frac{R}{l}\,.$$

9.6. Колебания замкнутой цилиндрической оболочки, усиленной продольными и кольцевыми ребрами

Частоты собственных колебаний оболочки с достаточно часто расположенными ребрами определяются выражением [19]

$$\omega_{nm} = \frac{k_{nm}}{R}\sqrt{1 + k_1\bar{p} + k_2\bar{\sigma}}\ \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}\,.$$

Здесь коэффициент k_{nm} находится без учета внутреннего давления p и продольных растягивающих напряжений σ:

$$k_{nm}^2 = \frac{\left(\lambda_n\dfrac{R}{l}\right)^4 + \dfrac{D_k}{ER^2\delta_n}\,m^4(m^2-1)^2}{\dfrac{\delta_c}{\delta_n}\left[\left(\dfrac{\lambda R}{l}\right)^2 + m^2(m^2+1)\right]}\,;$$

$$k_1 = \frac{m^4(m^2-1)}{\left(\dfrac{\lambda_n R}{l}\right)^4 + \dfrac{D_k}{ER^2\delta_n}\,m^4(m^2-1)^2}\,;$$

$$k_2 = \frac{m^2(m^2+1)\left(\dfrac{\lambda_n R}{l}\right)^2}{\left(\dfrac{\lambda_n R}{l}\right)^4 + \dfrac{D_k}{ER^2\,\delta_n}\,m^4(m^2-1)^2}\,;$$

$$\bar{p} = \frac{pR}{\delta_c E}\,;\ \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{E}\,;\ \delta_n = \delta + \frac{f_п}{b}\,;\ D_k = \frac{EJ_к}{a}\,;$$

$$\delta_c = \delta + \frac{f_п}{b} + \frac{f_к}{a}\,,$$

причем $f_п$ и $f_к$ — площади поперечных сечений продольных и кольцевых ребер; $J_к$ — момент инерции кольцевых ребер; a и b — расстояния между кольцевыми и продольными ребрами соответственно. При определении параметра λ_n следует руководствоваться указаниями предшествующего параграфа.

9.7. Колебания конической оболочки

Частота собственных осесимметричных колебаний усеченной конической круговой оболочки, шарнирно опертой на обоих торцах, определяется по формуле [31]

$$\omega = \frac{k}{x_1}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma(1-\mu^2)}}\,, \tag{9.18}$$

где x_1 — расстояние вдоль образующей от вершины конуса до торца с меньшим радиусом. Для определения коэффициента k при половине угла раскрытия конуса α (рис. 9.15), равном 5, 10 и 15°, можно использовать графики на рис. 9.16 в зависимости от отношения l/R и δ, где l — длина образующей конуса; δ, R — толщина оболочки и радиус в середине ее длины.

Для определения частоты неосесимметричных колебаний оболочек средней длины, т. е. таких, у которых длина l соизмерима с радиусом R, а число полуволн n вдоль образующей превышает число волн m в окружном направлении, может быть рекомендована следующая формула

$$\omega_{nm} = \frac{k_{nm}}{l} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}, \tag{9.19}$$

где [15]

$$k_{nm} = \min \sqrt{\frac{A_1 k_1 + A_2 k_2}{k_3}}; \tag{9.20}$$

$$A_1 = \frac{\sin^2\alpha \cos^2\alpha}{m^2 (m^2 + \cos^2\alpha)}; \quad A_2 = \frac{(1+\varepsilon)^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{R_0}\right)^2 \frac{m^2 (m^2 - \cos^2\alpha)^2}{\sin^2\alpha \, (m^2 + \cos^2\alpha)}; \quad \varepsilon = \frac{x_1}{l}.$$

При определении правой части выражения (9.20) следует проделать несколько вычислений и затем из всех значений корня выбрать минимальное.

Если края конуса прикреплены к тонкой диафрагме, то первое вычисление дает:

$$k_1 = \frac{1}{2} n^4 \pi^4 c_3 + 3{,}5\, n^2 \pi^2 c_2 + 0{,}75\, c_1;$$

$$k_2 = 0{,}5\, c_2 - 0{,}75 \frac{c_1}{m^2 \pi^2};$$

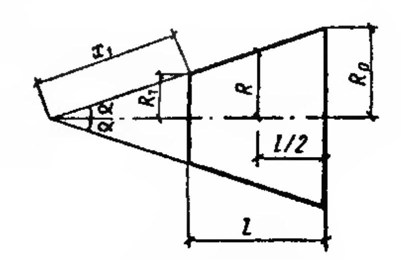


Рис. 9.15. Коническая оболочка

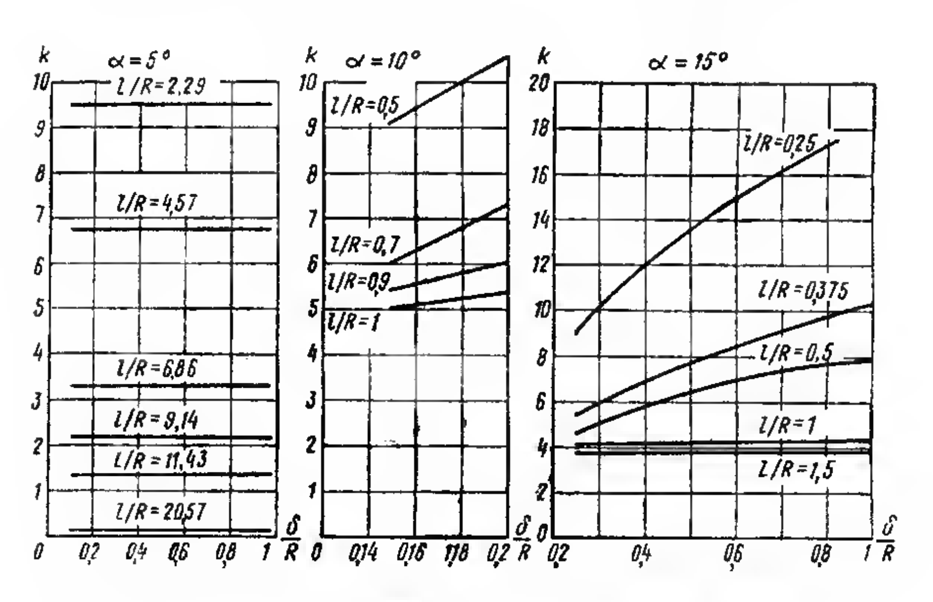


Рис. 9.16. Частотные коэффициенты для конических оболочек

$$k_3 = 0{,}5 \ln \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} - \sin 2n\pi\varepsilon \; [\mathrm{Si}\, 2n\pi (1+\varepsilon) - \mathrm{Si}\, 2n\pi\varepsilon] -$$

$$- 0{,}5 \cos 2n\pi\varepsilon \, [\mathrm{Ci}\, n\pi (1+\varepsilon) - \mathrm{Ci}\, n\pi\varepsilon],$$

второе вычисление

$$k_1 = 0{,}5\, n^4 \pi^4 c_4 + 12{,}75\, n^2 \pi^2 c_3 + 2{,}25\, c_2 - 3{,}375 \frac{c_1}{n^2\pi^2};$$

$$k_2 = 0{,}5\, c_3 - 2{,}5 \frac{c_2}{n^2\pi^2} + 3{,}75 \frac{c_1}{n^4\pi^4}; \quad k_3 = 0{,}5\, c_1.$$

В том случае, когда оба торца защемлены, получаем для первого вычисления:

$$k_1 = 8n^4 \pi^6 c_3 + 2n^2 \pi^2 c_2 - 0{,}75\, c_1; \quad k_2 = 1{,}5\, c_2 - 2{,}811 \frac{c_1}{n^2\pi^2};$$

$$k_3 = 1{,}5 \ln \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} - 2 \cos 2n\pi\varepsilon \, [\mathrm{Ci}\, 2n\pi (1+\varepsilon) - \mathrm{Ci}\, 2n\pi\varepsilon] -$$

$$- 2 \sin 2n\pi\varepsilon \, [\mathrm{Si}\, 2n\pi (1+\varepsilon) - \mathrm{Si}\, 2n\pi\varepsilon] + 0{,}5 \sin 4n\pi\varepsilon \, [\mathrm{Si}\, 4n\pi (\varepsilon + 1) -$$

$$- \mathrm{Si}\, 4n\pi\varepsilon] - 0{,}5\, [\mathrm{Ci}\, 2n\pi (1+\varepsilon) - \mathrm{Ci}\, 2n\pi\varepsilon] \cos 4n\pi\varepsilon;$$

для второго

$$k_1 = 8n^4 \pi^4 c_4 - 3n^2 \pi^2 c_3 + 21{,}75\, c_2 - 35{,}016 \frac{c_1}{n^2\pi^2};$$

$$k_2 = 1{,}5\, c_3 - 9{,}375 \frac{c_2}{n^2\pi^2} + 14{,}768 \frac{c_1}{n^4\pi^4}; \quad k_3 = 1{,}5\, c_1,$$

где

$$c_1 = \varepsilon + 0{,}5; \quad c_2 = \varepsilon^3 + 1{,}5\,\varepsilon^2 + \varepsilon + 0{,}25; \quad c_3 = \varepsilon^5 + 2{,}5\,\varepsilon^4 +$$

$$+ 3{,}5\,\varepsilon^3 + 2{,}5\,\varepsilon^2 + 0{,}167; \quad c_4 = \varepsilon^7 + 3{,}5\,\varepsilon^6 + 7\varepsilon^5 + 8{,}75\,\varepsilon^4 +$$

$$+ 7\varepsilon^3 + 3{,}5\,\varepsilon^2 + \varepsilon + 0{,}125.$$

На рис. 9.17 приведены графики параметра k_{lm} в случае защемленных торцов (рис. 9.17, *а*), шарнирно опертых (рис. 9.17, *б*) и в случае полного конуса с шарнирно опертым краем (рис. 9.17, *в*).

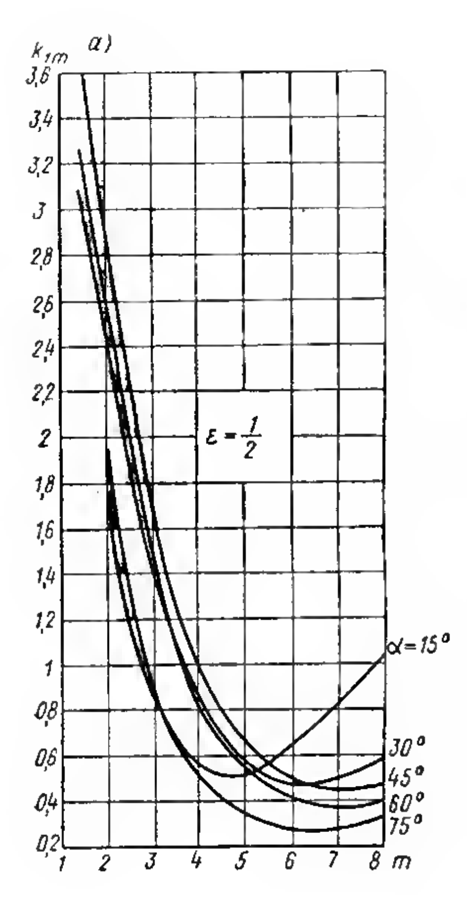
Приближенно частоту собственных колебаний конической оболочки с небольшим углом раскрытия конуса при свободном опирании торцов можно определить также по формуле (9.19), приняв [6]

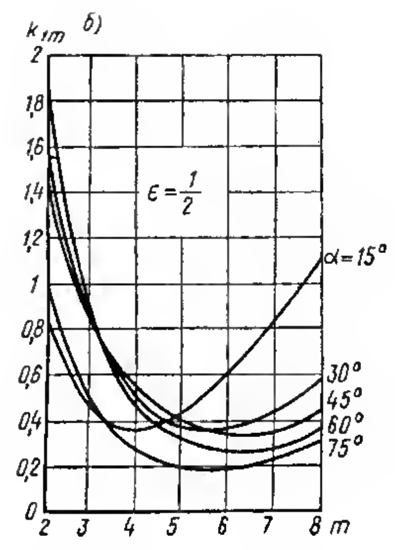
$$k_{nm}^2 = \frac{1}{(1+\varepsilon)^4} \cdot \frac{\delta^2}{l^2} \cdot \frac{1}{12(1-\mu^2)} \times$$

$$\times \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{m^4}{\sin^4\alpha} \cdot \frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2 + \frac{3}{2}(1-\mu^2)\frac{n^4\pi^4}{\mathrm{tg}^2\,\alpha}\left\{1 - \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^4 - \frac{3}{n^2\pi^2}\left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2\right]\right\}^2}{\frac{m^4}{2\sin^4\alpha} \cdot \frac{1}{1+\varepsilon}\left\{\frac{1}{10}\left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^5\right] - \frac{1}{2n^2\pi^2}\left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^3\right] + \frac{3}{4n^2\pi^2} \cdot \frac{1}{1+\varepsilon}\right\}},$$

причем минимальной частоте соответствует число волн в окружном направлении, определяемое при $n = 1$ формулой

$$m^2 = \sin^2\alpha \, \frac{3\pi (1+\varepsilon)^3 (1-\mu^2)\, l^2}{32\, \delta^2 \, \mathrm{tg}^2\,\alpha}.$$





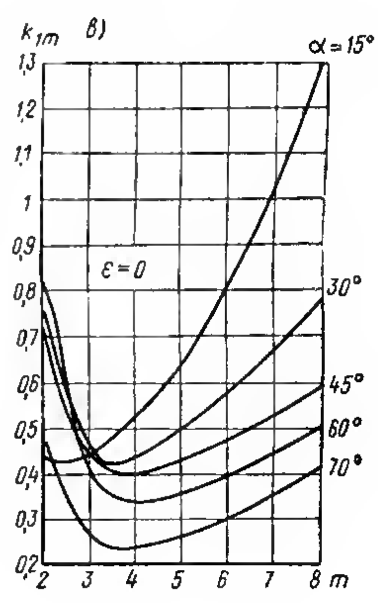


Рис. 9.17. Частотные коэффициенты для конических оболочек

Для конической оболочки с защемленными краями имеем приближенное выражение, определяющее низшую частоту собственных колебаний [24],

$$\omega_{мин}=\frac{k_{мин}}{l}\sqrt{\frac{E\gamma}{g}}, \qquad (9.21)$$

где

$$k_{мин}=\xi\frac{\cos\alpha}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}\cdot\frac{\delta}{R_0}.$$

Формула (9.21) справедлива при условии

$$\eta\frac{R_0^2}{l\delta}\sqrt{\frac{R_0}{\delta}\cos\alpha\sqrt{12(1-\mu^2)}}\ll\frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Значения коэффициентов ξ и η приведены в табл. 9.2.

Таблица 9.2

$\frac{R_1}{R_0}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
ξ	44,4	46,2	48,4	51,2	54,3	59	65,3	73,9	88,5	109,4	135,1
η	4,71	4,29	3,88	3,55	3,22	2,88	2,49	2,1	1,76	1,73	1,64

Низшая частота неосесимметричных колебаний защемленной конической оболочки с линейно изменяющимся поперечным сечением, с модулями упругости E_1 и E_2, модулем сдвига G_{12}, коэффициентами Пуассона μ_1 и μ_2 определяется при $\alpha\leqslant\pi/9$ по формуле

$$\omega_{мин}=\frac{k_{мин}}{R}\sqrt{\frac{E_1\gamma}{g}},$$

причем [22]

$$k_{мин}^2=\frac{496}{l^4}\cdot\frac{1}{m^2(m^2+\cos^2\alpha)}+(1-b)^2\frac{\lambda^2}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{m^2(m^2-\cos^2\alpha)^2}{m^2+\cos^2\alpha};$$

$$\lambda^2=\frac{h_{ср}^2E_2R_{ср}^2}{12\,l^2E_1(1-\mu_1\mu_2)};\quad b=\frac{\delta_1-\delta_0}{\delta_1R_0-\delta_0R_1}.$$

Число m, соответствующее низшей частоте, приближенно может быть определено как ближайшее целое к величине

$$2{,}18\sqrt[4]{\frac{\cos\alpha R_0}{\lambda(1-b)l^2}},$$

если она окажется больше или равной 4. Толщины δ_0 и δ_1 соответствуют краям с бо́льшим и меньшим диаметрами соответственно.

Низшая частота осесимметричных колебаний свободно опертой конической подкрепленной оболочки определяется при $\alpha\leqslant65°$ выражением [26]

$$\omega = \frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_1 v_1}} \cdot \frac{\Omega \sqrt{\frac{\delta}{R_0} \cos \alpha}}{l} \sqrt{\frac{E\gamma}{g}},$$

причем коэффициенты ξ_1, ξ_2 и v_1 определяются характером продольных и поперечных ребер (в дальнейшем индексом 1 будем отмечать величины, относящиеся к меридиональным ребрам; индексом 2 — к окружным).

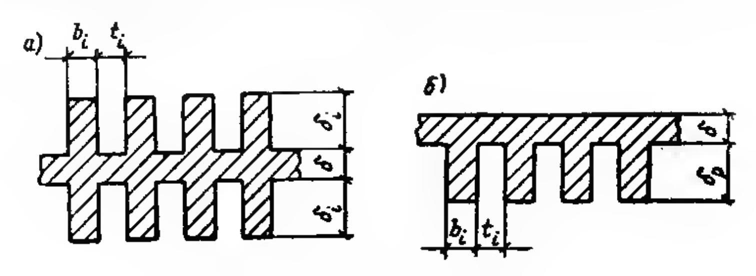


Рис. 9.18. Оболочка с ребрами

а — с двух сторон; *б* — с одной стороны

Для двустороннего оребрения (рис. 9.18, *а*) имеем:

$$\left.\begin{aligned} & f_1 = 1 + \frac{2b_1 \delta_1}{t_1 \delta}(1-\mu^2); \quad f_2 = 1 + \frac{2b_2\delta_2}{t_2 \delta}(1-\mu^2); \\ & i_1 = 1 + \frac{24(1-\mu^2)}{t_1 \delta_1^3} I_1; \quad i_2 = 1 + \frac{24(1-\mu^2)}{t_2 \delta_2^3} I_2; \\ & v_1 = 1 + \frac{2\delta_1 b_1}{t_1 \delta} + \frac{2\delta_2 b_2}{t_2 \delta}; \\ & \xi_1 = \frac{f_1(1-\mu^2)}{f_1 f_2 - \mu^2}; \quad \xi_2 = \sqrt{i_2 \xi_1}; \quad \Omega = \Omega_* \sqrt{1 + \frac{Q}{Q_*}}. \end{aligned}\right\} \quad (9.22)$$

При одностороннем оребрении (рис. 9.18, *б*) следует во всех, кроме первых членов выражения (9.22), уменьшить числовые коэффициенты вдвое. При двустороннем оребрении I_1 и I_2 являются моментами инерции половины сечения ребра относительно оси, лежащей в срединной поверхности. При одностороннем оребрении I_1 и I_2 являются моментами инерции ребер относительно нейтральной оси.

Величины Ω_* и Q_* определяются по графикам, представленным на рис. 9.19 в зависимости от отношения R_1/R_0, а Q зависит от равномерно распределенного давления p, которое считается положительным, если оно действует изнутри, причем

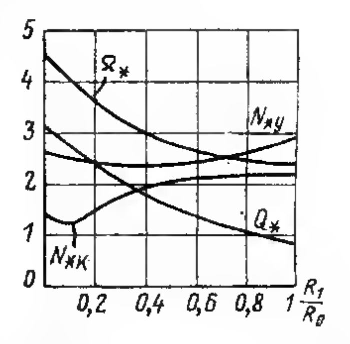


Рис. 9.19. Вспомогательные графики для расчета конических оболочек

$$Q = \frac{\xi_1}{\xi_2^3} \cdot \frac{p}{E\left(\frac{\delta}{R_0}\right)^2 \frac{R_0}{l} \sqrt{\frac{\delta}{R_0} \cos^3 \alpha}}.$$

Величина N при $Q_* \leqslant Q < 0$ равна:

$$N = \frac{N_{*k}}{1 + \left(1 - \frac{N_{*k}}{N_{*y}}\right) \frac{Q}{Q_*}};$$

при $Q \geqslant 0$

$$N = N_{*k}.$$

При отсутствии внешнего давления

$$\omega_1 = \frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_1 v_1}} \cdot \frac{\Omega_* \sqrt{\frac{\delta}{R_0} \cos \alpha}}{l} \sqrt{\frac{E\gamma}{g}}.$$

9.8. Колебания сферической оболочки

Частоты собственных осесимметричных колебаний тонкой полусферической оболочки ($R/\delta \geqslant 100$), имеющей опорное кольцо, погонная масса которого равна M, и упруго опертой на основание при погонной жесткости основания K, определяются по формуле

$$\omega_{n0} = \frac{k_{n0}}{R} \sqrt{\frac{E\gamma}{g}},$$

где k_{n0} находится в зависимости от параметров [34]

$$k = \frac{KR(1 - \mu^2)}{E\delta} \text{ и } m = \frac{gM(1 - \mu^2)}{\gamma\delta R}$$

по табл. 9.3.

Таблица 9.3

k	0	0,25	0,25	0,5	1	k	0	0,25	0,25	0,5	1
m	0	0	0,05	0	0	m	0	0	0,05	0	0
Изгибные колебания						Колебания растяжения-сжатия					
k_{10}	0	0,4631	0,4558	0,5762	0,656	k_{10}	2,07	2,1041	2,0749	2,1392	2,2084
k_{20}	0,87	0,8954	0,8923	0,9071	0,9177	k_{20}	3,81	3,8499	3,7377	3,8886	3,9628
k_{30}	0,949	0,9574	0,9563	0,9603	0,9623	k_{30}	5,84	5,871	5,689	—	—
k_{40}	0,943	0,9768	0,9764	0,9778	0,9784						

При определении частот собственных колебаний защемленных сферических оболочек средней толщины используется формула [9]

$$\omega_{nm} = \frac{k_{nm}}{R} \sqrt{\frac{E\gamma}{g(1 - \mu^2)}}. \qquad (9.23)$$

Значения коэффициентов k и m приведены в табл. 9.4, в которой через α обозначена половина угла раскрытия купола [12].

Таблица 9.4

$\frac{R}{\delta}$	n	$\alpha = 50°$				$\alpha = 70°$				$\alpha = 90°$			
		$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
20	1	1,085	0,836	1,103	1,342	0,904	0,576	0,902	1,037	0,785	0,523	0,805	0,932
	2	1,456	1,405	1,825	2,301	1,183	1,037	1,209	1,424	1,007	0,918	1,016	1,132
	3	1,975	2,226	3,007	3,710	1,484	1,418	1,726	2,066	1,245	1,117	1,271	1,459
	4	3,111	3,602	3,818	5,180	1,808	1,913	2,473	2,943	1,500	1,431	1,673	1,939
50	1	0,946	0,766	0,935	1,029	0,858	0,517	0,848	0,929	0,756	0,506	0,771	0,885
	2	1,125	1,029	1,133	1,268	0,980	0,932	0,979	1,034	0,925	0,876	0,928	0,964
	3	1,409	1,289	1,494	1,730	1,105	1,035	1,109	1,201	0,996	0,961	0,998	1,044
	4	1,614	1,749	2,060	2,391	1,309	1,202	1,327	1,474	1,063	1,040	1,087	1,167
100	1	0,920	0,735	0,909	0,953	0,845	0,489	0,830	0,909	0,745	0,487	0,756	0,873
	2	0,998	0,961	0,997	1,041	0,945	0,914	0,944	0,966	0,912	0,866	0,917	1,011
	3	1,112	1,046	1,115	1,199	1,059	0,967	1,060	1,021	0,988	0,937	0,989	1,069
	4	1,309	1,207	1,324	1,457	1,167	1,021	1,170	1,108	1,035	1,010	1,106	1,115

Частоты собственных колебаний толстых сферических оболочек определяются с учетом деформации сдвига и с учетом инерции вращения [41]. График зависимости частотного коэффициента k_{n0} при осесимметричных колебаниях замкнутой сферы при $\mu = 0{,}3$ и $R/\delta = 10$ представлен на рис. 9.20. Сплошные линии определяют три характерных спектра частот: нижняя линия соответствует преобладанию изгибных деформаций, средняя — колебаниям, связанным с растяжением-сжатием, и, наконец, верхняя — сдвиговым колебаниям. На том же графике линия с точками соответствует изгибным колебаниям без учета сдвига и инерции вращения, а пунктирная — колебаниям, описываемым безмоментной теорией. При этом расчет в двух последних случаях мало изменяет вторую ветвь и не выявляет третьей ветви.

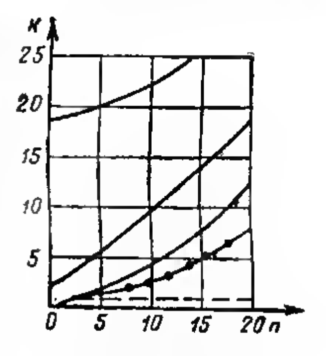


Рис. 9.20. Спектры частот защемленной сферической оболочки

Определение низших частот собственных колебаний защемленных пологих оболочек при малых углах раскрытия α проводится также по формуле (9.23), причем k_{0m} определяется при $\mu = 0{,}3$ по табл. 9.5 [42].

Частоты собственных осесимметричных колебаний трехслойной пологой свободно опертой оболочки несимметричного строения при изотропии каждого слоя определяются из формулы [5]

$$\omega_{n0}^2 = \frac{1}{m\,(D_1\,\beta^2 + G\delta\,\rho^2)} \left\{ (D_1\,D_2 - D_3^2)\,\frac{\beta^6}{\rho^4} + (G\delta D_2 + TD_1)\,\frac{\beta^4}{\rho^2} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{D_1\,B_1\,(1 - \mu^2)}{R^2} + GT \right] \beta^2 + G\delta B_1\,(1 - \mu^2)\,\frac{\rho^2}{R^2} \right\},$$

где m — масса всех слоев, отнесенная к единице поверхности сферы; G — модуль сдвига заполнителя; T — сжимающая погонная горизонтальная нагрузка, действующая в плоскости опирания оболочки; δ_1 и δ_2 — толщины наружного и внутреннего слоев; ρ — радиус опорного круга оболочки;

$$B = \frac{E\delta}{1 - \mu^2}; \quad D = \frac{B\delta^2}{12}; \quad D_1 = d_1 - \frac{a^2}{B_1}; \quad D_2 = d_2 - \frac{ab}{B_1}; \quad D_3 = d_3 - \frac{b^2}{B_1};$$

Таблица 9.5

α, град	m	R/δ			
		25	50	100	200
5	0	15,6900	7,9328	4,1134	2,3731
	1	22,4477	16,9328	8,2084	4,3012
	2	35,1453	27,4140	13,4648	6,8906
	3	45,9177	39,9875	19,6662	10,0827
10	0	4,1202	2,3666	1,6556	1,3996
	1	8,2610	4,2373	2,3010	1,4569
	2	13,6983	6,9072	3,5682	2,0322
	3	20,0010	10,0648	5,0970	2,6972
18	0	1,7827	1,4443	1,2649	1,0679
	1	2,6667	1,6004	1,1907	1,0579
	2	4,2282	2,2759	1,4398	1,1302
	3	6,1097	3,1774	1,8166	1,2528
30	0	1,3439	1,1439	0,9991	0,9513
	1	1,3073	1,0759	1,0037	0,9690
	2	1,7668	1,2348	1,0566	0,9936
	3	2,3716	1,4652	1,1283	1,0183
45	0	1,0776	0,9585	0,9208	0,9085
	1	0,9905	0,9414	0,9269	0,9211
	2	1,1635	1,0201	0,9703	0,9470
	3	1,3670	1,0868	0,9968	0,9606

$$B_1 = B + B' + B''; \quad B_1' = \frac{E'\delta_1}{1-\mu^2}; \quad B'' = \frac{E''\delta_2}{1-\mu^2}; \quad D' = \frac{B'\delta_1^2}{12}; \quad D'' = \frac{B''\delta_2^2}{12};$$

$$d_1 = D + \frac{\delta^2}{4}(B' + B''); \quad d_2 = D + D' + D'' + B'(Z')^2 + B''(Z'')^2;$$

$$d_3 = D + \frac{\delta}{2}(Z'B' - Z''B''); \quad Z' = \frac{\delta + \delta_1}{2}; \quad Z'' = -\frac{\delta + \delta_2}{2};$$

$$a = \frac{\delta}{2}(B' - B''); \quad b = z'B' + z''B''.$$

При свободном опирании края оболочки коэффициент β для первых пяти собственных частот определяется решением частотного уравнения

$$\beta J_0(\beta) - (1-\mu) J_1(\beta) = 0,$$

где $J_0(\beta)$ и $J_1(\beta)$ — функции Бесселя первого рода. Пять первых значений β при $\mu = 0{,}3$ приведены в табл. 9.6.

Таблица 9.6

β	N				
	1	2	3	4	5
Свободное опирание . .	2,047	5,389	8,572	11,73	14,88
Скользящее закрепление .	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706

При действии на пологую сферическую оболочку равномерно распределенного давления p и осевой нагрузки N частоты собственных колебаний определяются формулой (9.23), причем k_{nm} находится из формулы [23]

$$k_{nm}^2 = \frac{1 + \vartheta k\left(\alpha_n^2 + \beta_m^2\right)}{1 + k\left(\alpha_n^2 + \beta_m^2\right)}\left(\alpha_n^2 + \beta_m^2\right)^2 + \varkappa \pm N^*\left(\alpha_n^2 - \beta_m^2\right) - p^*\beta_m^2,$$

в которой величины ϑ, k, α_n, β_m, $\varkappa$, N^* и p^* определяются в соответствии с выражениями, приведенными на стр. 268.

При жестком защемлении края

$$k_{nm}^2 = \frac{\eta}{1+\eta} \cdot \frac{1+k\,\vartheta\left(\varphi_1^2+\alpha_n^2\right)}{1+k\left(\varphi_1^2+\alpha_n^2\right)}\left(\varphi_1^2+\alpha_n^2\right)^2 + \frac{1}{1+\eta} \cdot \frac{1+k\,\vartheta\left(\varphi_2^2+\alpha_n^2\right)}{1+k\left(\varphi_2^2+\alpha_n^2\right)} \times$$

$$\times \left(\varphi_2^2+\alpha_n^2\right)^2 + \varkappa - p^*\left[\frac{\eta}{1+\eta}\left(\varphi_1^2+\alpha_n^2\right) + \frac{1}{1+\eta}\left(\varphi_2^2+\alpha_n^2\right)\right].$$

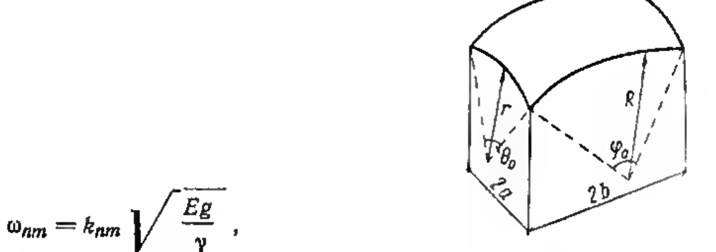
Здесь же следует использовать указанные выше формулы, при этом

$$\varphi_1 = \frac{m-1}{\lambda}; \quad \varphi_2 = \frac{m+1}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{l}{R},$$

где l — длина образующей сферической оболочки, а $\eta = 1$ при $m \neq 1$ и $\eta = 2$ при $m = 1$.

9.9. Колебания торообразных оболочек

Частоты собственных колебаний тороидального покрытия (рис. 9.21), прямоугольного в плане, при свободном опирании всех краев могут быть определены по формуле [28]



$$\omega_{nm} = k_{nm}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma}},$$

Рис. 9.21. Тороидальное покрытие

где

$$k_{nm}^2 = \frac{\delta^2}{12\left(1-\mu^2\right)}\left[\left(\frac{2m\pi}{\varphi_0}\right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{\theta_0}\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{\left[\frac{1}{\theta_0} J_1 \left(\frac{2m\pi}{\varphi_0}\right)^2 + \frac{1}{r}\left(\frac{2n\pi}{\theta_0}\right)^2\right]^2}{\left[\left(\frac{2m\pi}{\varphi_0}\right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{\theta_0}\right)^2\right]^2};$$

$$J_1 = -\frac{r\theta_0}{4l^2} + \frac{\left(\frac{4n\pi}{\theta_0}\right)^2}{2l\left[\left(\frac{4n\pi}{\theta_0}\right)^2 - 1\right]}\sin\theta_0 + \frac{\sin 2\theta_0}{8l} - \frac{r\cos 2\theta_0}{2l^2\left[\left(\frac{4n\pi}{\theta_0}\right)^2 - 4\right]};$$

$$\theta_0 = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{H-f}{a}; \quad \varphi_0 = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{f}{b}; \quad r = \frac{2a}{\sin\varphi_0};$$

$$l = \frac{2b}{\sin\varphi_0} - 2a\,\mathrm{tg}\,\theta_0;\quad R = \frac{l + r\cos\theta_0}{\cos\theta_0};$$

f — высота опорной дуги в направлении наибольшего пролета; H — полная высота оболочки; a и b — величины половин пролетов.

В том случае когда исходными являются радиус r, величина l, углы θ_0 и φ_0, имеем:

$$2a = r\sin\theta_0;\quad 2b = (l + r\cos\theta_0)\sin\varphi_0;$$

$$H = a\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta_0}{2} + b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi_0}{2};\quad f = b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi_0}{2}.$$

В случае защемления всех краев оболочки

$$k_{nm}^2 = \frac{1}{9}\left\{\frac{\delta^2}{12(1-\mu^2)}\left[3\left(\frac{2m\pi}{\varphi_0}\right)^4 + 2\left(\frac{2m\pi}{\varphi_0}\right)^2\left(\frac{2n\pi}{\theta_0}\right)^2 + 3\left(\frac{2n\pi}{\theta_0}\right)^4\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{10\left[\frac{2}{5\theta_0}\left(\frac{2m\pi}{\varphi_0}\right)^2 + (J_2 - 3J_3 + 3J_4 - J_5) - \frac{1}{r}\left(\frac{2n\pi}{\theta_0}\right)^2\right]^2}{7\left(\frac{2m\pi}{\varphi_0}\right)^4 + 5\left(\frac{2m\pi}{\varphi_0}\right)^2\left(\frac{2n\pi}{\theta_0}\right)^2 + 7\left(\frac{2n\pi}{\theta_0}\right)^4}\right\},$$

где

$$J_2 = -\frac{7\theta_0}{2l^2} + \frac{\sin\theta_0}{l} + \frac{\sin^2\theta_0}{4l};\quad J_3 = -\frac{\sin\theta_0}{l\left[\left(\frac{2n\pi}{\theta_0}\right)^2 - 1\right]} + \frac{r\sin 2\theta_0}{l^2\left[\left(\frac{2n\pi}{\theta_0}\right)^2 - 4\right]};$$

$$J_4 = \frac{1}{2}J_2 - \frac{\sin\theta_0}{2l\left[\left(\frac{4n\pi}{\theta_0}\right)^2 - 1\right]} + \frac{r\sin 2\theta_0}{2l^2\left[\left(\frac{4n\pi}{\theta_0}\right)^2 - 4\right]};$$

$$J_5 = \frac{3}{4}J_2 - \frac{\sin\theta_0}{4l\left[\left(\frac{6n\pi}{\theta_0}\right)^2 - 1\right]} + \frac{r\sin 2\theta_0}{4l^2\left[\left(\frac{6n\pi}{\theta_0}\right)^2 - 1\right]}.$$

В том случае когда стороны $\theta = \mathrm{const}$ свободно оперты, а стороны $\varphi = \mathrm{const}$ защемлены, имеем:

$$k_{nm}^2 = \frac{1}{6}\left\{\frac{\delta^2}{12(1-\mu^2)}\left[3\left(\frac{2m\pi}{\varphi_0}\right)^4 - 4\left(\frac{2m\pi}{\varphi_0}\right)^2\left(\frac{2n\pi}{\theta_0}\right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{\theta_0}\right)^4\right] + \right.$$

$$\left. + 16\frac{\frac{1}{\theta_0^2}\left(\frac{2m\pi}{\varphi_0}\right)^4(J_2-3J_3+3J_4+J_5)^2 - \frac{4}{r\theta_0}\left(\frac{2m\pi}{\varphi_0}\right)^2\left(\frac{2n\pi}{\theta_0}\right)^2(J_2-3J_3+3J_4+J_5) + \frac{3}{r^2}\left(\frac{2n\pi}{\theta_0}\right)^4}{35\left(\frac{2m\pi}{\varphi_0}\right)^4 - 40\left(\frac{2m\pi}{\varphi_0}\right)^2\left(\frac{2n\pi}{\theta_0}\right)^2 + 32\left(\frac{2n\pi}{\theta_0}\right)^4}\right\}.$$

В приведенных формулах m — число полуволн в направлении координаты φ, а n — число полуволн в направлении координаты θ.

9.10. Колебания пологих оболочек на прямоугольном плане

Частоты собственных колебаний свободно опертой пологой, прямоугольной в плане оболочки положительной гауссовой кривизны с постоянными радиусами кривизн R_1 и R_2 определяются по формуле

$$\omega_{nm} = k_{nm} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}},$$

причем величина k_{nm} определяется из выражения [14]

$$k_{nm}^2 = \frac{\delta^2}{12(1-\mu^2)} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2 + \frac{\left[\frac{1}{R_1}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{1}{R_2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2}{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2},$$

где a и b — расстояния между краями оболочки вдоль линий с радиусами кривизн R_1 и R_2 соответственно, а m и n — число полуволн в этих направлениях.

В случае цилиндрической оболочки следует положить $R_1 = \infty$; $R_2 = R$. В случае сферической оболочки $R_1 = R_2 = R$.

Частоты собственных колебаний свободно опертого гиперболического параболоида (рис. 9.22), уравнение поверхности которого представим в виде:

$$z = \frac{2f}{ab}\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(y - \frac{b}{2}\right) + \frac{f}{2},$$

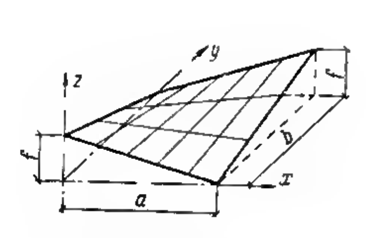


Рис. 9.22. Свободно опертый гиперболический параболоид

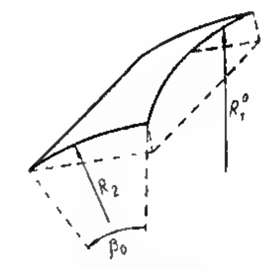


Рис. 9.23. Шедовое покрытие

записываются [38]

$$\omega_{nm} = \sqrt{\frac{D\Delta_{nm}^2 + 4Ehk_{12}^2\alpha_m^2\beta_n^2}{\gamma\Delta_{nm}} g},$$

где

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}; \; \alpha_m = \frac{m\pi}{a}; \; \beta_n = \frac{n\pi}{b}; \; k_{12} = \frac{2f}{ab};$$

$$\Delta_{nm} = \left(\alpha_m^2 + \beta_n^2\right)^2.$$

Частоты собственных колебаний пологого шедового покрытия со свободно опертым краем (рис. 9.23) определяются выражением [16]

$$\omega_{nm}=\sqrt{\frac{E\gamma}{g}\left[\frac{\delta^2}{12(1-\mu^2)}\left(\lambda_n^2+\mu_m^2\right)^2+\frac{\left(\frac{\lambda_n^2}{R_2}+\frac{\mu_m^2}{2R_1^0}\right)^2}{\left(\lambda_n^2+\mu_m^2\right)^2}\right]},$$

где

$$R_2=\text{const};\ R_1=R_1^0\frac{\beta}{\beta_0};\ \mu_m=\frac{m\pi}{a};\ \lambda_n=\frac{n\pi}{b}.$$

Частоты ω_{nm} свободных колебаний трехслойной пологой круговой цилиндрической оболочки со свободно опертым краем, жестким заполнителем и симметричными слоями определяются из формулы [17]

$$\omega_{nm}^2=\frac{\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)}{\rho^*}\left\{D'+\frac{B'\frac{G}{n}H^2+\frac{B}{2}\left[D'\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)+\frac{Gh}{3}\right]}{\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)\left(B'+\frac{B}{6}\right)+\frac{G}{h}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_m^4\left(c^2-d^2\right)}{cR^2\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)^4}\right\},$$

где

$$\alpha_m=\frac{m\pi}{a};\ \beta_n=\frac{n\pi}{b};\ B'=\frac{E'\delta}{1-\mu'^2};\ B=\frac{Eh}{1-\mu^2};$$

δ — толщина внешних слоев; h — толщина заполнителя; R — радиус срединной поверхности оболочки; G — модуль сдвига заполнителя; E', E; μ', μ; ϱ', ϱ — модули упругости, коэффициенты Пуассона, плотности материала внешних слоев и заполнителя соответственно. Кроме того,

$$D'=B'\frac{\delta^2}{12};\ D=B\frac{h^2}{12};\ \rho^*=\rho'\delta+\rho\frac{h}{2};$$

$$H=\frac{h}{2}+\frac{\delta}{2};\ C=2B'+B;\ d=2B'\mu'+B\mu.$$

Низшие частоты собственных колебаний ортотропных пологих оболочек с защемленными краями, расположенными на упругом основании, при разной их конфигурации в плане могут быть найдены по формулам, приведенным в работе [20].

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, 1960, 24, № 5.
2. Бресланский В. Е. О колебаниях цилиндрических оболочек. «Инженерный сборник», 16, 1953.
3. Бреславский В. Е. Собственные колебания круговой цилиндрической оболочки, находящейся под действием гидростатического давления. Известия АН СССР, ОТН, 1956, № 12.
4. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике, Избранные труды, т. 1. Изд-во АН СССР, 1962.
5. Галимов Н. К., Сачеиков А. В. Определение частот свободных колебаний и устойчивость пологих трехслойных пластин. В сб.: «Исследования по теории пластин и оболочек». Казань, КГУ, 1965, № 3.
6. Гонтиевич В. С. Собственные колебания пластин и оболочек. Киев, «Наукова думка», 1964, стр. 172—178.
7. Кариаухов В. Г. О неосесимметричных колебаниях конических оболочек «Прикл. механика», 1965, 1, № 11.
8. Кондрашов Н. С. Нижние оценки собственных частот круговых цилиндрических оболочек. В сб.: «Прочность и динамика авиационных двигателей». «Машиностроение», 1966, 4.

9. Лужин О. В. Динамический расчет сферического купола с защемленым краем. Вестник трудов ВИА, 178, 1961.
10. Лужин О. В. Некоторые вопросы динамики замкнутой сферы. В сб.: «Исследования по теории сооружений», вып. XV. Стройиздат, 1967.
11. Назаров Н. А. О колебаниях пологих оболочек, подкрепленных ребрами жесткости. «Прикл. механика», 1965. 1, № 3.
12. Неронов В. С. К определению частот собственных колебаний сферических куполов с защемленным краем. «Строительная механика и расчет сооружений», 1968. № 3.
13. Никулин М. В. Собственные колебания гладкой и конструктивно анизотропных цилиндрических оболочек при наличии статических нагрузок. В сб.: «Прочность и динамика авиационных двигателей», вып. 2. Оборонгиз. 1965.
14. Онианашвили О. Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек. Изд-во АН СССР, 1957.
14а. Онианашвили О. Д. Динамика оболочек. В сб.: «Строительная механика в СССР. 1917—1967». Под ред. И. М. Рабиновича. Стройиздат, 1969.
15. Поверж Л. Ю., Риймат Р. К. Малые неосесимметричные собственные колебания упругих тонких конических и цилиндрических оболочек вращения. Труды Таллинского политехнического ин-та, сер. А, № 147, 1958.
16. Пратусевич Я. А. Приложение вариационных методов к расчету тонких пологих оболочек. Труды МИИТ, вып. 164. 1963.
17. Прусаков А. П., Холод А. И. Свободные поперечные колебания трехслойной круговой цилиндрической оболочки с жестким заполнителем. В сб.: «Сопротивление материалов и теория сооружений», вып. 1. Киев. 1965.
18. Рапопорт Л. Д., Ясин Э. М. Определение частот собственных колебаний гофрированных круговых цилиндрических оболочек. В сб.: «Прочность и динамика авиационных двигателей», вып. 2. «Машиностроение», 1965.
19. Рахимов И. С. Влияние осевых усилий и нормального давления на свободные колебания цилиндрической оболочки. Известия вузов, № 8. «Машиностроение», 1964.
20. Сачеиков А. В. Определение частот свободных колебаний ортотропных пологих оболочек на основании аналогии. В сб.: «Исследования по теории пластин и оболочек», № 3. Казань, КГУ, 1965.
21. Слепов Б. И. Колебания и устойчивость эллиптической оболочки. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 3.
22. Суверней В. Г. Некоторые задачи колебаний трехслойных оболочек. В сб.: «Теория оболочек и пластин». Баку, 1966.
23. Суверней В. Г. Собственные колебания трехслойных сферических оболочек со свободно опертыми и защемленными кромками. В сб.: «Расчет элементов авиационных конструкций», вып. 3. «Машиностроение», 1965.
24. Товстик П. Е. Об определении наименьшей частоты колебаний конической оболочки вращения. В сб.: «Исследования по упругости и пластичности», 6. Л., ЛГУ, 1967.
25. Толок В. А. К исследованию свободных колебаний тонкой цилиндрической оболочки. Изв. АН УзбССР, сер. техн., 1964, № 5.
26. Трапезин И. И., Кольман Э. Р. Свободные колебания тонкой конической оболочки, находящейся в среде сжатого газа. Известия вузов, № 5. «Машиностроение», 1965.
27. Якушев Н. З. Колебания цилиндрической оболочки средней толщины. В сб.: «Исследования по теории пластин и оболочек», № 3. Казань, КГУ, 1965.
28. Янгуразов Ш. Х. Определение частот свободных колебаний тороидальных покрытий. В сб.: «Вопросы механики», вып. 4. Ташкент, 1966.
29. Arnold R. N., Warbulon G. B. The flexural vibrations of thin cylinders. Proc. of the Inst of Mech. Engrs, 1953 (A), v. 167, № 1.
30. Baron M. L., Bleich H. H. Tables for frequencies and modes of free vibration of infinetely long thin cylindrical shells. Journal of Appl. Mech., v. 21, 1954, № 2.
31. Carnet Heyman, Kempner Joseph. Axissymmetric free vibrations of conecal shells. Trans. ASME, 1964, E 31, № 3.
32. Forsberg Kevin. Influence of boundary conditions on the modle characteristics of thin cylindrical shells. AIAA Journal, 1964, 2. № 12.
33. Greenspon. Vibrations of thick-walled cylindricsl shell. J. Acousl. Soc. America, 1960, v. 32, № 5.
34. Hwang Chintsuft. Extensional vibration of axissymmetrical shells. AIAA Journal, 1965, v. 3, № 1.
35. Jones J. P., Whitter J. S. Axially symmetric motion of a twolayerd Timoshenko type cylindrical shell. Trans. ASME, 1966, E 33, № 4.
36. Kalnins A. Free vibration of rotationally symmetric shells. J. Acoust. Soc. America, 1964, 36. № 7.
37. Liepins Atis A. Free vibrations of presiressed toroidal membrane. AIAA Journal, 1965. 3. № 10.
38. Mazurkiewicz Z. Static and dynamics of shell in a form of hyperbolic paraboloid. Arch. Mech. slosowanj, 1965, 17, № 3.
39. Naghdi P. M. On the theory of thin elastic shells. Quarterly of appl. mathematics, 1957, v. 14.
40. Nemergut P. I., Brand R. S. Axisymmetric vibrations of prolate spheroidal shells. J. Acousl. Soc. America. 1965, 38, № 2.
41. Wilkinson J. P. Natural frequencies of closed spherical shells. J. Acoust. Soc. America, 1966, 38, № 2.
42. Zarghamee M. S., Robinson A. R. A numerical method for analysis of free vibrtion of spherical shells. AIAA Journal. 1967. 5, № 7.

РАЗДЕЛ 10

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ВЫСОКИХ СООРУЖЕНИЙ НА ДЕЙСТВИЕ ВЕТРА

(М. Ф. Барштейн)

10.1. Турбулентность атмосферы

В аэродинамике различают два вида движения: ламинарное и турбулентное. Ламинарное — это гладкое, упорядоченное движение. Его можно рассматривать как движение по отдельным слоям, скользящим друг относительно друга. Линии тока или пути отдельных частиц в таком потоке параллельны между собой.

При определенных значениях безразмерных параметров, определяющих режим потока, ламинарное движение становится неустойчивым. Это означает, что присутствующие в потоке малые возмущения начинают расти и становятся трехмерными. В результате в рассматриваемой точке формируются очаги возмущений, которые распространяются в окружающей среде, приводя к турбулизации всего потока. Характер движения в этом случае резко изменяется. Частицы воздушной среды движутся по причудливым, меняющимся во времени, траекториям. Кроме основного движения, внутри потока появляются беспорядочные внутренние движения. Такое движение называется турбулентным.

Критическая скорость, при которой ламинарное движение переходит в турбулентное, в условиях атмосферы весьма мала, поэтому в атмосфере, за исключением самого тонкого приземного слоя, движение воздуха всегда турбулентно.

Ветер, возникающий в нижних слоях атмосферы, и представляет собой такое движение воздушной среды. Оно характеризуется чрезвычайно нерегулярным и беспорядочным изменением скорости во времени в каждой точке пространства. Так же нерегулярно изменяется от точки к точке скорость потока, рассматриваемого в заданный момент времени.

Если осреднить по большим промежуткам времени истинную скорость в каждой точке пространства, то нерегулярность скорости сглаживается, и средняя скорость оказывается плавно меняющейся вдоль потока функцией, изменение которой обусловливается лишь суточным ходом и процессами синоптических масштабов.

Разность между истинной и средней скоростями, обнаруживающая характерную для турбулентности нерегулярность, называют пульсационной частью скорости.

Случайной по существу природе этого процесса соответствует описание турбулентного движения при помощи статистических методов.

Эти же методы, основанные на теории случайных процессов, используются и при описании поведения высоких сооружений в турбулентной атмосфере.

10.2. Основные сведения по теории стационарных случайных процессов [1]

Процесс называется случайным, если он описывается множеством функций времени $F(t)$, значения которых в различные моменты времени являются

[1] Изложение этой теории можно найти в книгах [5, 8, 12, 14].

случайными величинами, определяемыми функциями распределения. Каждая из функций такого множества называется реализацией случайного процесса и обозначается $F^{(1)}(t)$, ..., $F^{(n)}(t)$. Примером реализации случайного процесса может служить график скорости ветра (рис. 10.1).

При построении теории случайных процессов ограничиваются изучением тех их свойств, которые определяются одними лишь простейшими численными характеристиками многомерных распределений. Такими достаточно простыми численными характеристиками вероятностей являются математические ожидания (средние по множеству реализаций), называемые моментами распределения (M обозначает математическое ожидание).

Момент n-го порядка определяется выражением

$$M\left[F_t^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} F_t^n w(F_t)\, dF_t\,. \tag{10.1}$$

Центральные моменты или моменты относительно среднего значения определяются следующим образом

$$M\,[F_t - M(F_t)]^n = \int_{-\infty}^{\infty} [F_t - M(F_t)]^n w(F_t)\, dF_t\,. \tag{10.2}$$

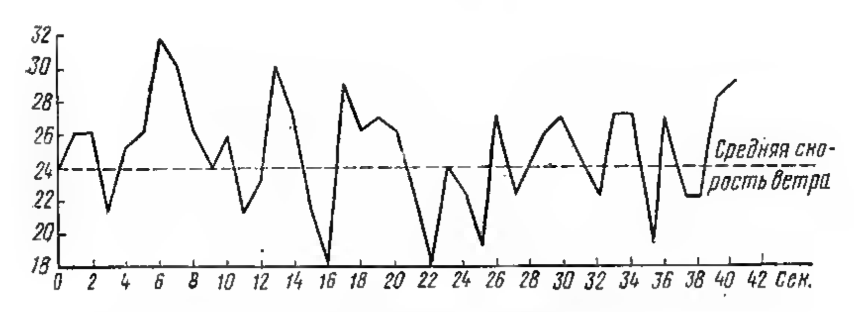


Рис. 10.1. График скорости ветра

Индекс t означает, что в общем случае средние значения относятся к определенному моменту времени, поскольку одномерная плотность вероятности $w(F, t)$ изменяется со временем.

Моменты описывают форму распределения. Четные моменты характеризуют ширину, нечетные — симметричность распределения или ее отсутствие.

Центральный момент второго порядка называется дисперсией и обозначается

$$\sigma_F^2 = M\left[F_t^2\right] - [M(F_t)]^2\,. \tag{10.3}$$

Могут быть также образованы средние по времени для какой-либо из реализаций, входящих во множество. Например,

$$\overline{F(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} F(t)\, dt, \tag{10.4}$$

где черта над функцией времени означает осреднение по времени.

Важнейший класс случайных процессов — стационарные процессы. Процесс называется стационарным, если его функции распределения любого порядка не зависят от положения начала отсчета времени, т. е. не меняются при любом сдвиге всей группы точек t_1, ..., t_n вдоль оси времени.

Имеется много случайных процессов, которые при соответствующем выборе шкалы времени оказываются приближенно стационарными. Сюда относится, например, в среднем установившийся турбулентный поток ветра, который в дальнейшем и будет рассматриваться как стационарный случайный процесс.

Для стационарного случайного процесса $w(F, t) = w(F)$, отсюда и все средние значения, основанные на $w(F)$, не зависят от времени.

Стационарный процесс эргодичен, если средние во времени значения совпадают со средними по множеству. Стационарные случайные процессы обычно предполагаются эргодическими.

Вероятностная связь между значениями случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2 определяется корреляционной функцией

$$B_F(t_1, t_2) = M[F(t_1) F(t_2)]. \quad (10.5)$$

Для стационарного процесса существенна только разность между t_2 и t_1, поэтому

$$B_F(\tau) = M[F(t) F(t+\tau)]. \quad (10.6)$$

Для стационарного эргодического процесса корреляционная функция может быть определена осреднением во времени любой из реализаций множества

$$B_F(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} F(t) F(t+\tau)\, d\tau. \quad (10.7)$$

Нормированная корреляционная функция записывается в виде:

$$R_F(t_1, t_2) = \frac{B_F(t_1, t_2) - M[F(t_1)]\, M[F(t_2)]}{\sigma_{F_1} \sigma_{F_2}}. \quad (10.8)$$

Для стационарного процесса

$$R_F(\tau) = \frac{B_F(\tau) - [MF(t)]^2}{\sigma_F^2}. \quad (10.9)$$

Корреляция между двумя реализациями случайных процессов $F(t)$ и $Q(t)$ описывается взаимной корреляционной функцией:

$$B_{FQ}(t_1, t_2) = M[F(t_1) Q(t_2)];\ B_{QF}(t_1, t_2) = M[Q(t_1) F(t_2)]. \quad (10.10)$$

В стационарном случае эти функции записываются так

$$B_{FQ}(\tau) = M[F(t) Q(t+\tau)];\ B_{QF} = M[Q(t) F(t+\tau)]. \quad (10.11)$$

Отметим ряд характерных свойств корреляционной функции $B_F(\tau) = B_F(-\tau)$; $B_F(0) = M[F^2] = \sigma_F^2 + [M(F)]^2$; $B_F(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$, если $F(t)$ не содержит периодических компонент или постоянной составляющей. При отсутствии периодических компонент $B_F(\tau)$ стремится к квадрату постоянной составляющей.

Другой важной статистической характеристикой стационарного случайного процесса является его спектральная плотность (энергетический спектр). Если $\Phi_F(i\omega)$ — преобразование Фурье для усеченной функции $F_T(t)$ в интервале $(-T, T)$, т. е.

$$\Phi_F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_T(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-T}^{T} F_T(t)\, e^{-i\omega t}\, dt,$$

то спектральная плотность $S_F(\omega)$ функции $F(t)$ определяется равенством

$$S_F(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |\Phi_F(i\omega)|^2. \quad (10.12)$$

Применяя преобразование Фурье для корреляционной функции стационарного процесса, получаем спектральную плотность

$$S_F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_F(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = 2\int_{0}^{\infty} B(\tau)\cos\omega\tau d\tau. \qquad (10.13)$$

При обратном преобразовании вновь получается корреляционная функция:

$$B_F(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_F(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} S_F(\omega)\cos\omega\tau d\omega;$$

$$B_F(0) = \sigma_F^2 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} S_F(\omega)\, d\omega. \qquad (10.14)$$

Соотношения (10.13) и (10.14) получены А. Я. Хинчиным [18].

$B_{FQ}(\tau)$ не является обязательно четной функцией. Однако она может быть разбита на четную и нечетную составляющие $E_{FQ}(\tau)$ и $O_{FQ}(\tau)$:

$$B_{FQ} = \frac{1}{2}\left[B_{FQ}(\tau) + B_{FQ}(-\tau)\right] + \frac{1}{2}\left[B_{FQ}(\tau) - B_{FQ}(-\tau)\right] =$$

$$= E_{FQ}(\tau) + O_{FQ}(\tau). \qquad (10.15)$$

Используя (10.15), получим:

$$S_{FQ}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{FQ}(\tau)\cos\omega\tau d\tau - i\int_{-\infty}^{\infty} O_{FQ}(\tau)\sin\omega\tau d\tau = \mathrm{Co}_{FQ}(\omega) - iK_{FQ}(\omega). \qquad (10.16)$$

Co_{FQ} называется коспектром или явным спектром, а $K_{FQ}(\omega)$ — квадратурным спектром.

Обращение формулы (10.16) имеет вид:

$$E_{FQ}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Co}_{FQ}(\omega)\cos\omega\tau d\omega; \quad O_{FQ}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_{FQ}(\omega)\sin\omega\tau d\omega. \qquad (10.17)$$

Величина $\overline{F(t)\, Q(t)} = B_{FQ}(0) = E_{FQ}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Co}_{FQ}(\omega)\, d\omega$ называется ковариацией.

Взаимный спектр характеризует вклад различных частот в ковариацию. Квадратурный спектр равен нулю при четной функции B_{FQ}. Нечетность B_{FQ} обычно связана с наличием максимальной корреляции между F и Q при ненулевом сдвиге по времени. Временное запаздывание ξ_ω по каждой частоте определяется выражением

$$\mathrm{tg}\,\omega\xi_\omega = \frac{K_{FQ}(\omega)}{\mathrm{Co}_{FQ}(\omega)}. \qquad (10.18)$$

Когерентная функция (когерентность) записывается в виде:

$$\mathrm{Coherence}_{FQ}(\omega) = \frac{|S_{FQ}(\omega)|^2}{S_F(\omega)\, S_Q(\omega)} = \frac{\mathrm{Co}_{FQ}^2(\omega) + K_{FQ}^2(\omega)}{S_F(\omega)\, S_Q(\omega)}. \qquad (10.19)$$

Все введенные понятия сохраняют смысл при замене временной независимой переменной пространственной. Обобщением понятия стационарности для случайных полей является понятие однородности.

Случайное поле называется однородным, если его среднее значение постоянно, а корреляционная функция зависит от $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$B_F(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = B_F(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

Однородное случайное поле называется изотропным, если $B_F(\vec{r})$ зависит лишь от $r = |\vec{r}|$, т. е. только от расстояния между точками наблюдения. Все осредненные функции, описывающие статистическую структуру такого поля, остаются неизменными при вращениях (или зеркальных отображениях) системы координат.

Если случайный процесс зависит от трех пространственных и одной временной координат и является стационарным и однородным, то справедливы соотношения:

$$\left.\begin{aligned} B_F(\vec{\xi},\tau) &= \overline{F(\vec{x},t)F(\vec{x}+\vec{\xi},\, t+\tau)} = \frac{1}{(2\pi)^4}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} S(\vec{\chi},\,\omega)\exp(i\chi\xi + i\omega\tau)\, d\vec{\chi}\, d\omega; \\ S_F(\vec{\chi},\omega) &= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} B_F(\vec{\chi},\,\tau)\exp-(i\chi\xi + i\omega\tau)\, d\vec{\chi}\, d\tau, \end{aligned}\right\} \quad (10.20)$$

где $\vec{\chi}$ — волновой вектор; $B_F(\vec{\chi},\tau)$ называется пространственно-временной корреляционной функцией, а $S_F(\vec{\chi},\omega)$ — пространственно-временным спектром.

10.3. Характеристики линейной динамической системы

Динамические свойства линейной системы полностью характеризуются ее реакцией на какое-нибудь определенное элементарное воздействие, при помощи которого можно достаточно просто выражать произвольные возмущающие силы, действующие на систему.

В качестве таких характеристик линейной системы могут служить ее реакции на воздействие $P(t) = e^{i\omega t}$ или на единичный импульс $\delta(t)$.

Напомним, что дельта-функцией, характеризующей единичный импульс, называется такая функция, которая равна нулю всюду, кроме начала координат, где она обращается в бесконечность и притом так, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$.

Реакция системы на единичный импульс называется импульсной переходной функцией $k(t)$. Для системы с одной степенью свободы импульсная переходная функция $k(t)$ является решением уравнения свободных колебаний

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_1^2 y = 0. \qquad (10.21)$$

При начальных условиях $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 1/m_1$; затухание в (10.21) учитывается по гипотезе вязкого трения Кельвина — Фойгта; здесь m_1 — масса системы; ω_1 — ее круговая собственная частота; $2n = \gamma\omega_1$; $\gamma = \delta/\pi$; δ — логарифмический декремент колебаний. Для уравнения (10.21) величина $k(t)$ определяется выражением

$$k(t) = \frac{e^{-\frac{\gamma\omega_1 t}{2}}\sin\omega_1 t}{m_1\omega_1}; \quad t \geqslant 0.$$

Другой важной характеристикой системы является ее передаточная функция $\Phi(s)$ — установившаяся реакция на элементарное воздействие e^{st}.

Если в правую часть уравнения (10.21) подставить $F(t)=e^{st}$, то можно найти выражение для передаточной функции

$$\Phi(s)=\frac{1}{m_1\left(s^2+2ns+\omega_1^2\right)}. \qquad (10.22)$$

Передаточная функция для простого гармонического колебания с частотой ω называется частотной характеристикой системы и получается подстановкой в (10.22) $s=i\omega$,

$$\Phi(i\omega)=\frac{1}{m_1\left(-\omega^2+2ni\omega+\omega_1^2\right)}. \qquad (10.23)$$

Квадрат модуля передаточной функции

$$|\Phi(i\omega)|^2=\frac{1}{m_1^2\left(\omega^4-2u\omega_1^2\omega^2+\omega_1^4\right)}. \qquad (10.24)$$

Если затухание учитывается по комплексной теории внутреннего трения Е. С. Сорокина [16], то уравнение движения системы с одной степенью свободы имеет вид:

$$\ddot{y}^*+(u+iv)\,\omega_1^2y^*=\frac{e^{i\omega t}}{m_1}, \qquad (10.25)$$

где y^* — комплексное перемещение; $u=\frac{4-\gamma^2}{4+\gamma^2}$; $v=\frac{4\gamma}{4+\gamma^2}$.

Частотная характеристика системы

$$\Phi(i\omega)=\frac{1}{m_1\left[-\omega^2+(u+iv)\,\omega_1^2\right]}. \qquad (10.26)$$

Выражение для квадрата модуля передаточной функции совпадает с (10.24).

Передаточная функция позволяет вычислить реакцию системы на любое возмущение, которое может быть представлено в виде суммы синусоид или комплексных экспонент. Для периодических функций такое разложение дается в виде ряда Фурье, а для непериодических — в виде интеграла или преобразования Фурье.

С другой стороны, любое возмущение можно разложить на сумму элементарных импульсов, и реакция системы может быть найдена суммированием ряда импульсных переходных функций. Такие два процесса связаны между собой.

В частности, импульсная переходная функция и частотная характеристика устойчивой системы связаны преобразованием Фурье:

$$k(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(i\omega)\,e^{i\omega t}d\omega; \qquad (10.27$$

$$\Phi(i\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}k(t)\,e^{-i\omega t}dt.$$

Преобразование Фурье (комплексный спектр) от реакции системы $y(i\omega)$ выражается через передаточную функцию системы $\Phi(i\omega)$ и преобразование Фурье от возмущающей силы $P(i\omega)$:

$$y(i\omega) = \Phi(i\omega) P(i\omega). \tag{10.28}$$

Взяв обратное преобразование Фурье от (10.28), получим интеграл Дюамеля:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} k(t-\tau) P(\tau)\, d\tau. \tag{10.29}$$

10.4. Реакция динамической системы на действие случайных сил [3, 4, 5, 29]

Система с одной степенью свободы. Если $B_P(\tau)$ и $S_P(\omega)$ — корреляционная функция и спектральная плотность случайного возмущения, то выражения для корреляционной функции и спектральной плотности реакции системы имеют вид:

$$B_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau_1)\, d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau_2) R_P(\tau + \tau_2 - \tau_1)\, d\tau_2; \tag{10.30}$$

$$S_y(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 S_P(\omega). \tag{10.31}$$

Аналогичные выражения можно записать для взаимной корреляционной функции и взаимной спектральной плотности реакции системы и возмущения:

$$B_{Py}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau_1) B_P(\tau - \tau_1)\, d\tau_1; \tag{10.32}$$

$$S_{Py}(\omega) = \Phi(i\omega) S_P(\omega). \tag{10.33}$$

Среднее значение реакции $\overline{y}$ и ее средний квадрат определяются по формулам:

$$\overline{y} = \overline{P(t)} \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, dt = \overline{P(t)}\, \Phi(0); \tag{10.34}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(i\omega)|^2 S_P(\omega)\, d\omega.$$

В случае возбуждения вида белого шума, имеющего постоянную спектральную плотность S_P на всех частотах,

$$\sigma_y^2 = \frac{S_P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^4 - 2u\omega_1^2\omega^2 + \omega_1^4} = \frac{S_P}{2\gamma\omega_1^3}.$$

Система с конечным числом степеней свободы. При рассмотрении реакций (перемещений и усилий) системы целесообразно ввести обобщенные координаты $p_s(t)$, соответствующие полному разделению неизвестных в уравнениях колебаний линейной системы.

Представляя перемещения в виде ряда

$$y_k(t) = \sum_{s=1}^{n} p_s(t)\, \alpha_s(x_k), \tag{10.35}$$

получим последовательность уравнений Лагранжа

$$\ddot{p}_s(t) + (u + iv)\,\omega_s^2 p_s(t) = \frac{Q_s(t)}{M_{s\,об}}. \qquad (10.36)$$

Здесь обобщенная сила $Q_s(t) = \sum_{j=1}^{r} P_j(t)\,\alpha_s(x_j)$, обобщенная масса $M_{s\,об} = \sum_{j=1}^{r} M_j\,\alpha_s^2(x_j)$; $P_j(t)$ — возмущающая сила, действующая на массу M_j; ω_s—s-я круговая собственная частота; $\alpha_s(x_j)$ — коэффициенты распределения амплитуд перемещений s-й формы во всех точках системы, где сосредоточены массы M_j.

Средний квадрат смещений точки k системы можно записать так:

$$\overline{y_k^2(t)} = \sigma_k^2 = \sum_{s=1}^{n} \overline{p_s^2(t)}\,\alpha_s^2(x_k) + \sum_{s,\,l=1}^{n} \overline{p_s(t)\,p_l(t)}\,\alpha_s(x_k)\,\alpha_l(x_k),\ (s \neq l); \quad (10.37)$$

средний квадрат обобщенной координаты

$$\overline{p_s^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_s(i\omega)|^2\, S_{Q_s}(\omega)\,d\omega; \qquad (10.38)$$

ковариация обобщенных координат

$$\overline{p_s(t)\,p_l(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_s(i\omega)\,\Phi_l^*(i\omega)\,S_{Q_sQ_l}(\omega)\,d\omega.$$

Здесь $\Phi_s(i\omega)$, $\Phi_l^*(i\omega) = \Phi_l(-i\omega)$ и $|\Phi_s(i\omega)|^2$ — передаточные функции, квадрат модуля передаточной функции системы (10.36), соответствующие частотам s и l. Эти функции определяются по формулам (10.24) и (10.26). Спектральная плотность обобщенной силы

$$S_{Q_s} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{m=1}^{r} S_{jm}(\omega)\,\alpha_s(x_j)\,\alpha_s(x_l).$$

Взаимная спектральная плотность обобщенных сил $S_{Q_s Q_l}(\omega)$ получается из $S_{Q_s}(\omega)$ путем замены $\alpha_s(x_m)$ на $\alpha_l(x_m)$; $S_{jm}(\omega)$ — взаимная спектральная плотность возмущающих сил $P_j(t)$ и $P_m(t)$.

В системах, обладающих малым затуханием и частотами, достаточно удаленными друг от друга, взаимной корреляцией между обобщенными координатами системы можно пренебречь [5]. В этом случае в правой части (10.37) остается лишь первый член.

Если сила $P_j(t)$ представляет собой произведение случайной функции времени $f(t)$ на функцию координат $P_0(x_j)$, то обобщенная возмущающая сила $Q_s = f(t)\sum_{j=1}^{r} P_0(x_j)\,\alpha_s(x_j)$; передаточная функция системы (10.36)

$$p_s(i\omega) = \frac{Q_s\Phi_s(i\omega)}{M_{s\,об}}.$$

Передаточная функция системы в точке k

$$\Phi_{y_k}(i\omega) = \sum_{s=1}^{n} p_s(i\omega)\,\alpha_s(x_k) = \sum_{s=1}^{n} \eta_{ks}\Phi_s(i\omega);$$

здесь η — коэффициент, зависящий от формы колебаний сооружения,

$$\eta_{ks} = \frac{\alpha_s(x_k) Q_s}{M_{sоб}} .$$

Квадрат модуля передаточной функции

$$|\Phi_{y_k}(i\omega)|^2 = \sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\eta_{ks}\eta_{kl}\left[\omega^4 - u\left(\omega_s^2 + \omega_l^2\right)\omega^2 + \omega_s^2\omega_l^2\right]}{\left(\omega^4 - 2u\omega_s^2\omega^2 + \omega_s^4\right)\left(\omega^4 - 2u\omega_l^2\omega^2 + \omega_l^4\right)} . \quad (10.39)$$

При малом затухании все члены разложения (10.39), кроме близких к резонансным, малы, так что приближенное выражение $|\Phi_{y_k}(i\omega)|^2$ имеет вид:

$$|\Phi_{y_k}(i\omega)|^2 = \sum_{s=1}^{n} \frac{\eta_{ks}^2}{\left(\omega^4 - 2u\omega_s^2\omega^2 + \omega_s^4\right)} . \quad (10.40)$$

Средний квадрат смещений системы в точке k будет

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{y_k}(i\omega)|^2 S_f(\omega)\, d\omega. \quad (10.41)$$

Изложенный метод решения задачи, основанный на разложении возмущения по формам свободных колебаний системы, принято называть методом нормальных форм.

Можно указать и другой путь решения рассматриваемой задачи. Введем передаточную функцию $\Phi_{jk}(i\omega)$ системы, т. е. реакцию в точке k на воздействие $P_j = e^{i\omega t}$, приложенное в точке j:

$$\Phi_{jk}(i\omega) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\alpha_s(x_k)\,\alpha_s(x_j)}{M_{sоб}\left[-\omega^2 + (u + iv)\,\omega_s^2\right]} = \sum_{s=1}^{n} \mu_s (X_s - iY_s),$$

где

$$\mu_s = \frac{\alpha_s(x_k)\,\alpha_s(x_j)}{M_{sоб}} ; \quad X_s = \frac{-\omega^2 + u\omega_s^2}{\omega^4 - 2u\omega_s^2\omega^2 + \omega_s^4} ;$$

$$Y_s = \frac{v\omega_s^2}{\omega^4 - 2u\omega_s^2\omega^2 + \omega_s^4} .$$

Квадрат модуля передаточной функции $\Phi_{jk}(i\omega)$

$$|\Phi_{jk}(i\omega)|^2 = \left(\sum_{s=1}^{n} \mu_s X_s\right)^2 + \left(\sum_{s=1}^{n} \mu_s Y_s\right)^2 .$$

Выражение упрощается, если пренебречь побочными элементами матриц X_{sl} и Y_{sl} по сравнению с диагональными.

В этом случае

$$|\Phi_{jk}(i\omega)|^2 = \sum_{s=1}^{n} \mu_s^2\left(X_s^2 + Y_s^2\right) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\mu_s^2}{\omega^4 - 2u\omega_s^2\omega^2 + \omega_s^4} .$$

При действии на систему в точке j случайной силы $P_j(t)$ смещение в точке k имеет вид:

$$y_{jk}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_{jk}(i\omega)|^2 S_j(\omega)\,d\omega, \qquad (10.42)$$

где $S_j(\omega)$ — спектральная плотность силы $P_j(t)$. Если на систему действуют силы $P_j(t)$ $(j=1, 2, ..., k, ..., r)$, то средний квадрат смещения в точке k

$$\sigma_k^2=\sum_{j=1}^{r}\sum_{m=1}^{r}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{jk}(i\omega)\,\Phi^*_{mk}(i\omega)\,S_{jm}(\omega)\,d\omega, \qquad (10.43)$$

где $\Phi_{jk}(i\omega)$ и $\Phi^*_{mk}(i\omega)$ — передаточные функции системы в точке k (комплексная и комплексно-сопряженная) при действии в точках j и k силы $e^{i\omega t}$.

Для статистически независимых сил $P_j(t)$ средний квадрат смещения системы

$$\sigma_k^2=\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_{jk}(i\omega)|^2 S_j(\omega)\,d\omega. \qquad (10.44)$$

Когда силы $P_j(t)=P_0(x_j)f(t)$, средний квадрат смещения

$$\sigma_k^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{r}P_0(x_j)\,\Phi_{jk}(i\omega)\right|^2 S_f(\omega)\,d\omega. \qquad (10.45)$$

Взаимная спектральная плотность перемещений системы в точках k и l имеет вид:

$$S_y(x_k, x_l, \omega)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{m=1}^{r}\Phi^*_{jk}(i\omega)\,\Phi_{ml}S_{jm}(\omega). \qquad (10.46)$$

Системы с распределенными параметрами. Для таких систем легко обобщаются результаты, полученные ранее для систем с конечным числом степеней свободы.

В качестве примера рассмотрим случай, когда действующая на систему нагрузка интенсивностью $q(x, t)$ представляет собой стационарный и однородный случайный процесс.

Для такого процесса спектральная плотность интенсивности нагрузки одинакова во всех точках системы $S_q(x_j, \omega)=S_q(x_k, \omega)=S_q(\omega)$.

Взаимная спектральная плотность $q(x, t)$ в точках j и k $S_q(x_j, x_k, \omega)=R(\chi_{kj})\ S_q(\omega)$, где $R(\chi_{kj})$ — коэффициент пространственной корреляции; $(\chi_{kj}=x_k-x_j)$. Средний квадрат смещений системы в точке определяется по формулам (10.37) и (10.43), при этом спектральная плотность обобщенной силы имеет вид

$$S_{Q_s}(\omega)=S_q(\omega)\int_0^L\int_0^L R(\chi_{kj})\,\alpha_s(x_j)\,\alpha_s(x_k)\,dx_j dx_k, \qquad (10.47)$$

где L — пролет системы.

Взаимная спектральная плотность обобщенных сил Q_s и Q_l получается из (10.47) путем замены $\alpha_s(x_k)$ на $\alpha_l(x_k)$.

10.5. Закон подобия. Лобовое сопротивление и поперечная сила

Пусть поток воздуха обтекает неподвижное твердое тело заданной формы. Если d — линейный размер тела, v — скорость невозмущенного потока, α — угол, который определяет направление скорости, ρ и μ — плотность и вязкость воздуха, то общее выражение для сопротивления тела при установившемся движении можно записать в виде:

$$R=\rho v^2 d^2 \Phi(\rho, \mu, v, \alpha, d), \qquad (10.48)$$

где Φ — некоторая функция нулевой размерности. Принимая во внимание размерность *м/сек* для v, *м* для d, *кг·сек/м²* для μ, *кг·сек²/м⁴* для ρ, увидим, что единственно возможной безразмерной функцией является $\Phi(\alpha, \mathrm{Re})$, где $\mathrm{Re}=\frac{vd}{\nu}$; $\nu=\frac{\mu}{\rho}$ — кинематическая вязкость воздуха. Величина Re называется числом Рейнольдса. Оно характеризует зависимость сопротивления от вязкости воздуха.

Из выражения $R=\rho v^2 d^2 \Phi(\alpha, \mathrm{Re})$ можно установить, что течения одинакового типа с одинаковым числом Рейнольдса динамически подобны.

При изучении неустановившегося движения пользуются критерием подобия Струхаля $\mathrm{sh}=\frac{fd}{v}$, где f — частота срыва вихрей.

Законы подобия играют весьма важную роль в экспериментальной аэродинамике.

Чтобы добиться соответствия между модельным испытанием и натурными условиями, модельный поток по интенсивности турбулентности и по профилю скорости должен соответствовать потоку ветра.

Если R — составляющая в заданном направлении аэродинамической силы, действующей на обтекаемое тело, то безразмерное отношение $c_R(\alpha, \mathrm{Re})=\frac{R}{\frac{1}{2}\rho v^2 S}$ называется коэффициентом аэродинамической силы в заданном направлении. Здесь $q_0=\frac{1}{2}\rho v^2$ — скоростной напор (при $\varrho=0{,}121$ *кг·сек²/м⁴* $q_0=v^2/16$); S — характеристическая площадь тела.

Для симметричных тел S — площадь миделевого сечения, которая представляет собой наибольшую площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной направлению потока. Если тело имеет сложную форму, то S — площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению потока.

Составляющая аэродинамической силы в направлении скорости невозмущенного потока $R_x=c_x{}^1/_2\rho v^2 S$ называется лобовым сопротивлением. Составляющая в направлении, перпендикулярном скорости потока $R_y=c_y{}^1/_2\rho v^2 S$, называется поперечной (подъемной) силой; c_x и c_y — коэффициенты лобового сопротивления и поперечной (подъемной) силы. Коэффициент лобового сопротивления c_x зависит от формы тела и шероховатости его поверхности, от ориентации тела относительно потока и от удлинения $\lambda=H/d$, где H — высота (длина) тела.

Высокие сооружения цилиндрической формы (дымовые трубы, мачты, градирни и т. п.) и элементы сквозных сооружений (трубчатые или из прокатных профилей) относятся к классу плохо обтекаемых тел.

Рассмотрим картину обтекания таких тел на примере бесконечного цилиндра. Вследствие трения в воздухе около тела, обтекаемого воздушным потоком, образуется так называемый пограничный слой, в котором скорость потока быстро падает до нуля у поверхности тела. Толщина этого слоя зависит от вязкости среды. У воздуха, имеющего весьма малую вязкость, толщина пограничного слоя очень мала.

В начале движения, когда скорость мала, поток вокруг тела приближается к потенциальному. Пограничный слой служит своего рода прослойкой между потоком и цилиндром, и если в критических точках имеется повышенное давление, то оно передается телу через пограничный слой. Этим давлением пограничный слой как бы вытесняется к точкам B и D, вследствие чего возникают течения от A к B и D и от C к B и D (рис. 10.2): с другой стороны, пограничную зону обтекает потенциальный поток. От этих противоположных токов за точками B и D образуются симметричные парные вихри, которые смываются потоком. Такое расположение вихрей, однако, не является устойчивым, поэтому при дальнейшем увеличении скорости и соответственно числа Рейнольдса расположение вихрей становится асимметричным. Вихри отрываются попеременно с обеих сторон цилиндра, правильно чередуясь через определенные промежутки времени и образуя вихревую дорожку. Этот тип движения сохраняется в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Наконец, при $\mathrm{Re}=10^5\div2\cdot10^5$ пограничный слой становится турбулентным и отрывается от поверхности цилиндра.

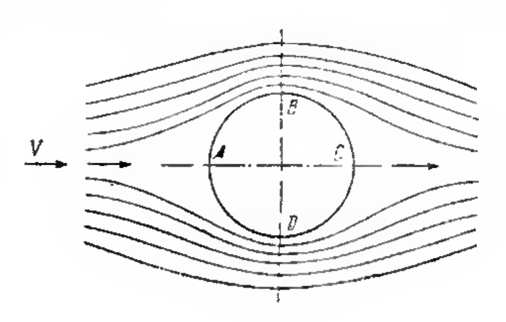


Рис. 10.2

Турбулизация пограничного слоя приводит к заметному смещению линии отрыва вихрей по направлению к концу тела, так что область вихреобразований — турбулентный след — за телом сужается. Сужение турбулентного следа приводит к уменьшению силы сопротивления. Коэффициент лобового сопротивления падает в несколько раз в сравнительно узком интервале чисел Рейнольдса. Это явление называется кризисом сопротивления.

На явление кризиса влияет степень турбулентности набегающего на тело потока. Чем она больше, тем ранее (при меньших Re) наступает турбулизация пограничного слоя. Коэффициент лобового сопротивления зависит также от степени шероховатости поверхности цилиндра, с увеличением Re коэффициент c_x растет от значений, соответствующих кризису сопротивления, до значения 0,7 при $\mathrm{Re}=3{,}5\cdot10^6$; для $\mathrm{Re}>3{,}5\cdot10^6$ c_x становится постоянным.

Периодический отрыв вихрей наблюдается при обтекании не только цилиндра, но также и других тел. Однако для призматического тела линии отрыва вихрей фиксированы и совпадают с его ребрами; коэффициент c_x от чисел Рейнольдса не зависит. В табл. 10.1 приведены коэффициенты c_x для сооружений различной формы и для плоских и пространственных сквозных конструкций. Эти данные заимствованы из [27]. Коэффициенты c_α в п. 1 относятся к единице площади наружной поверхности сооружения.

Данные таблицы применимы, если $\mathrm{Re}=\frac{4\sqrt{q}\,d}{\nu}\geqslant4\cdot10^5$, где q — учитываемый скоростной напор; ν — кинематическая вязкость воздуха; (при $t=15°$ C и атмосферном давлении 760 *мм рт. ст.* $\nu=0{,}145\cdot10^{-4}$ *м²/сек*). Приведенное распределение давления на поверхности сооружения q_α учитывается при расчете оболочки сооружения, а также в тех случаях, когда существенное значение имеет учет местного воздействия ветра.

Коэффициенты c_x в пп. 1 и 2 учитываются при расчете сооружения в целом. Для сооружений цилиндрической формы, труб и проводов с малой шероховатостью c_x определяется в зависимости от чисел Рейнольдса по графику, приведенному в п. 2. Там же даны коэффициенты c_x для круговых цилиндров с ребрами (выступами), для сооружений с полигональным попереч-

Таблица 10.1

№ п/п 1

Сооружения с цилиндрической боковой поверхностью (дымовые трубы, мачты, градирни)

$$q_\alpha = c_\alpha q_0;$$

c_α для $Re > 4 \cdot 10^5$ и для шероховатой поверхности

Сфера

$q_\alpha = c_\alpha q_0$

$R_x = c_x q_0 S;$

$c_x = 0,2;$

c_α для $Re > 2 \cdot 10^5$ и для шероховатой поверхности

H/d	$\alpha°$	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
25	c_α	+1,0	+0,8	+0,1	−0,9	−1,9	−2,5	−2,6	−1,9	−0,9	−0,7	−0,6	−0,6	−0,6
7	c_α	+1,0	+0,8	+0,1	−0,8	−1,7	−2,2	−2,2	−1,7	−0,8	−0,6	−0,5	−0,5	−0,5
1	c_α	+1,0	+0,8	+0,1	−0,7	−1,2	−1,6	−1,7	−1,2	−0,7	−0,5	−0,4	−0,4	−0,4
Сфера	c_α	+1,0	+0,9	+0,5	−0,1	−0,7	−1,1	−1,2	−1,0	−0,6	−0,2	+0,1	+0,3	+0,4

№ п/п 2

Сооружения, указанные в п. 1, а также трубчатые элементы сквозных сооружений, провода, тросы и т. п.

Направление ветра

Коэффициент лобового сопротивления c_x при $Re \geq 4 \cdot 10^5$

Тип сечения \ H/d	25	7	1
Круг с $h = 0,02d$	0,9	0,8	0,7
Круг с $h = 0,08d$, правильный 10—12-угольник	1,2	1,0	0,8
Правильный 5—8-угольник	1,4	1,2	1,0

Для умеренно шероховатой поверхности цилиндра (металл, бетон, дерево)

c_x: 1,2; 1,0; 0,45; 0 — $c = 0,7$ — $Re/10^5$: 1,5; 4; 8; 12; 15; 20; 24; 28; 32; 35

	$Re < 4 \cdot 10^5$	$Re > 4 \cdot 10^5$
Тросы из тонких прядей c_x	1,2	0,9
Тросы из толстых прядей c_x	1,3	1,1

Коэффициенты c_x и c_y для отдельных элементов из профилей

$R_x = k_l c_{x\infty} qS$; $R_y = k_l c_{y\infty} qS$; $S = hl$; x, y—оси сечения

$\alpha°$	$c_{x\infty}$	$c_{y\infty}$	$c_{x\infty}$	$c_{y\infty}$	$c_{x\infty}$	$c_{y\infty}$	$c_{x\infty}$	$c_{y\infty}$	$c_{x\infty}$	$c_{y\infty}$
0	+1,8	+1,8	+1,75	+0,1	+1,6	0	+2,0	0	+2,05	0
45	+2,1	+1,8	+0,85	+0,85	+1,5	−0,1	+1,2	+0,9	+1,85	+0,6
90	−1,9	−1,0	+0,1	+1,75	−0,95	+0,7	−1,6	+2,15	0	+0,6
135	−2,0	+0,3	−0,75	+0,75	−0,5	+1,05	−1,1	+2,4	−1,6	+0,4
180	−1,4	−1,4	−1,75	−0,1	−1,5	0	−1,7	0	−1,8	0

3

$\alpha°$	$c_{x\infty}$	$c_{y\infty}$	$c_{x\infty}$	$c_{y\infty}$	$c_{x\infty}$	$c_{y\infty}$	$c_{x\infty}$	$c_{y\infty}$	$c_{x\infty}$	$c_{y\infty}$
0	+1,4	0	+2,05	0	+2,0	0	+2,1	0	+2,0	0
45	+1,2	+1,6	+1,95	+0,6	+1,8	+0,1	+1,4	+0,7	+1,55	+1,55
90	0	+2,2	0	+0,9	0	+0,1	0	+0,75	0	+2,0

k_{lr} — коэффициент перехода от элемента бесконечного удлинения к элементу с удлинением λ

$$k_{lr} = c_{rl}/c_{r\infty};\quad c_{r\infty} = \sqrt{c^2_{x\infty} + c^2_{y\infty}}$$

l/h_α	5	10	20	35	50	100	∞
k_{lr}	0,60	0,65	0,75	0,85	0,90	0,95	1,00

4

Коэффициент лобового сопротивления для плоских ферм из профилей

$R_x = k_l c_{x\infty} q\varphi S$

$k_l = c_{xl} / c_{x\infty}$

φ	0	0,1	0,15	0.2	0,3÷0,8	0,95	1,0
$c_{x\infty}$	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,8	2,0

l/h \ φ	0,25	0,5	0,9	0,95	1,0
5	0,96	0,91	0,87	0,77	0,60
20	0,98	0,97	0,94	0,89	0,75
50	0,99	0,98	0,97	0,95	0,90
	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

5

Коэффициент уменьшения k_x для ряда плоских параллельно расположенных ферм

x/h \ φ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
1/2	0,93	0,75	0,56	0,38	0,19	0	0	0
1	0,99	0,81	0,65	0,48	0,32	0,15	0,15	0,15
2	1,00	0,87	0,73	0,59	0,44	0,30	0,30	0,30
4	1,00	0,90	0,78	0,65	0,52	0,40	0,40	0,40
6	1,00	0,93	0,83	0,72	0,61	0,50	0,50	0,50

1-я ферма; 2-я ферма

6

Пространственная ферма с коэффициентом заполнения $\varphi \leqslant 0,3$

Для элементов наветренной грани

$R_{xi} = k_{li} c_{\infty\beta} qS_i \cos\beta$

Для элементов подветренной грани

$R_{xi} = k_{li} c_{\infty\beta} k_x qS_i \cos\beta$

Элементы из прокатных профилей

$c_{\infty\beta} = k_\beta c_{\infty 90°}$; $c_{\infty 90°} = c_{x\infty}$ или $c_{y\infty}$ по п.3

β°	0	15	30	45	60
k_β	1,00	0,98	0,93	0,88	0,80

k_x по п. 5

k_{li} по п.3

Трубчатые элементы

β°	0	15	30	45	60
k_β	1	0,97	0,87	0,71	0,50

c_x по графику п. 2

для Re < $4 \cdot 10^6$ k_x — по п. 5; k_{li} по п. 3;

для Re > $4 \cdot 10^6$ $k_x = 0,95$; $k_{li} = 0,9$; $\frac{l}{d} = 25$

7

Коэффициенты давления для здания $h:b:l = 2,5:1:1$

α°	A	B	C	D	E	F	G	H
0	+0,9	−0,6	−0,7	−0,7	−0,8	−0,8	−0,8	−0,8
15	+0,8	−0,5	−0.9	−0,6	−0,8	−0,8	−0,7	−0,7
45	+0,5	−0,5	+0,5	−0,5	−0,8	−0,7	−0,7	−0,5
45	m = − 1,0				n = − 0,8			

ным сечением и для тросов из тонких и толстых прядей. Приведенные в п. 3 коэффициенты c_x и c_y для простых и составных профилей зависят от угла атаки α и от удлинения $\lambda = l/h_\alpha$. Они определяются путем умножения коэффициентов $c_{x\infty}$ и $c_{y\infty}$ для элемента бесконечного удлинения на коэффициент перехода k_l. Рекомендуемый СНиП для рассматриваемых форм поперечного сечения $c_x = 1{,}4$ соответствует $\lambda = 10 \div 15$ и $k_l = 0{,}65 \div 0{,}70$.

Коэффициент лобового сопротивления плоской фермы из профилей (п. 4) зависит от коэффициента заполнения φ и определяется путем умножения $c_{\Phi\infty}$ для фермы бесконечного удлинения на коэффициент k_l; $\varphi = \frac{\Sigma S_i}{S}$, где S_i — площадь проекции элемента на плоскость фермы; S — площадь фермы, ограниченная ее внешним габаритом.

Для первой из ряда параллельно расположенных ферм коэффициент c_Φ определяется по п. 4; для второй и последующих ферм (п. 5) путем умножения c_Φ для первой фермы на коэффициент уменьшения k_x, где x — расстояние между фермами.

Давление ветра на пространственную ферму (башню) с коэффициентом заполнения $\varphi \leqslant 0{,}3$ (п. 6) определяется как сумма давлений на элементы наветренной и подветренной граней сооружения. Давление на эти элементы вычисляется по формулам, приведенным в п. 3.

10.6. Нормативные и расчетные скорости и скоростные напоры ветра

При расчете высоких сооружений на действие ветра величина нормативного или расчетного скоростного напора для данного географического района устанавливается на основе статистического анализа климатологических данных по скоростям ветра в этом районе.

Анализ скоростей ветра по данным примерно 500 метеостанций СССР позволил разработать карты скоростей ветра различной обеспеченности Вся территория СССР по этим картам разбита на семь районов. Приведенные для каждого района скорости относятся к высоте 10 *м* (уровень анемометра), соответствуют 2-*мин* осреднению и условиям открытого незащищенного места.

Под обеспеченностью понимается величина, обратная среднему периоду повторяемости, т. е. периоду, в течение которого один раз вероятно появление скорости выше данной. Например, среднему периоду повторяемости 20 лет соответствует обеспеченность 5%.

Расчетные значения средних скоростей для различных районов СССР установлены Л. Е. Анапольской и Л. С. Гандиным [1] на основе функции распределения типа Вейбулла, построенной для всей выборки значений скоростей без учета направления

$$F(v) = e^{-\left(\frac{v}{\beta}\right)^{\gamma}}, \tag{10.49}$$

где $F(v)$ есть вероятность того, что скорость ветра больше, чем v; β и γ — параметры, зависящие от ветрового режима данного района.

Скорости ветра различной обеспеченности для семи районов СССР (в *м/сек*) приведены в табл. 10.2 [7].

В качестве нормативного принят скоростной напор, определяемый по скорости ветра, превышаемой в среднем один раз в пять лет (при 2-*мин* осреднении наблюдаемых скоростей). Расчетные скоростные напоры устанавливаются с учетом специфики и особенностей работы здания или сооружения.

Период однократного превышения расчетных скоростных напоров принят следующий:

1) для жилых, общественных и промышленных зданий — 10—15 лет (коэффициент перегрузки $n_в$ — 1,2);

Таблица 10.2

Период времени, в течение которого скорость ветра однократно превышается	Район						
	I	II	III	IV	V	VI	VII
Год	17	20	23,5	27	30	33,1	36
5 лет	20,8	23,8	27,3	31,3	34	37,7	40,4
10 »	22	25,8	29	32,8	36,2	39,5	44,5
20 »	23,5	27	31	34,2	38	41,2	45
30 »	24	27,4	31,5	35	38,6	41,8	45,8
50 »	25	29,2	32,8	36,5	40	43,2	48

2) для высоких сооружений (башни, мачты и т. п.) — 20—50 лет ($n_н$ — 1,3÷1,5).

В США [32] расчетные значения скоростей ветра определяются на основе функции распределения экстремальных величин Фишера — Типпета типа II:

$$F(x) = e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\gamma}}. \tag{10.50}$$

Здесь $F(x)$ — вероятность того, что скорость меньше x. Для статистического анализа используются годовые значения самой быстрой мили, т. е. мили воздуха, имеющей наибольшую скорость.

10.7. Вертикальные профили средней скорости и среднего скоростного напора ветра

Изменение скорости ветра с высотой в пограничном слое атмосферы зависит от термической стратификации (распределение по высоте температуры воздуха), от величины геострофического ветра, пропорционального горизонтальному градиенту давления, и от шероховатости подстилающей поверхности земли.

Профиль средней скорости ветра может быть построен по данным скорости на стандартном уровне (уровне установки анемометра) или по величине геострофического ветра.

В нормах СССР профиль среднего скоростного напора принят по логарифмическому закону вида:

$$q_{0j} = q_0 \frac{\ln^2\left(\frac{x_j}{x_0}\right)}{\ln^2\left(\frac{10}{x_0}\right)}, \tag{10.51}$$

где q_{0j}, q_0 — скоростной напор ветра на уровнях x_j и 10 *м* (стандартный уровень установки анемометра); x_0 — параметр шероховатости, принятый равным для участка кривой до отметки 40 *м* — 0,075 *м*, выше этой отметки — 0,05 *м*. При таком значении параметра шероховатости средние скоростные напоры на различных уровнях близки к скоростным напорам, подсчитанным по степенному закону

$$q_{0j} = q_0 \left(\frac{x_j}{10}\right)^{2\alpha}, \tag{10.52}$$

для показателя степени $\alpha=0{,}16$, соответствующего открытой местности с очень небольшими препятствиями. Поправочные коэффициенты на возрастание скоростного напора $k_j=q_{0j}/q_0$ для высот более 10 *м* приведены в табл. 10.3.

Для промежуточных высот величина поправочных коэффициентов определяется линейной интерполяцией. В пределах отдельных зон зданий и соору-

жений при высоте каждой зоны не более 10 *м* величину k_j допускается принимать постоянной и определять ее для центра зоны.

Изменение скорости с высотой объясняется постепенным замедлением ветра вблизи земли благодаря трению об ее поверхность. На больших высотах, где это трение не сказывается, движение воздуха под влиянием градиента давления имеет скорость, называемую градиентной.

Таблица 10.3

Высота над поверхностью земли в *м*	10	20	40	100	350 и выше
Поправочный коэффициент k_j	1	1,35	1,8	2,2	3

Для определения профиля средней скорости Давенпорт [21, 22] предложил использовать карту скоростей градиентного ветра. Такая карта была построена с учетом шероховатости подстилающей поверхности в районе метеостанции и с использованием соответствующего профиля средней скорости ветра. Средняя скорость на уровне x определяется в этом случае по формуле

$$v(x) = v_G \left(\frac{x}{x_G} \right)^{\alpha}, \tag{10.53}$$

где x_G — градиентная высота и v_G — средняя градиентная скорость. Автор рекомендует три вертикальных профиля с показателем степени $\alpha = 0{,}16$; $0{,}28$; $0{,}40$ и с градиентной высотой x_G, равной соответственно 270, 390 и 510 *м*. По этим законам определяются скорости ветра до отметки x_G, выше x_G скорость принимается постоянной.

Приведенные в табл. 10.2 скорости ветра установлены на основании данных наблюдений, записанных на открыто расположенных метеостанциях, характеризующих ветровой режим вне влияния населенного пункта. Для таких станций показатель степени может быть принят равным 0,16, а градиентная высота 300 *м*.

Используя эти данные, можно построить вертикальные профили средних скоростей и скоростных напоров для трех типов подстилающей поверхности земли.

На рис. 10.3 приведены вертикальные профили средних скоростных напоров, вычисленные по фор-

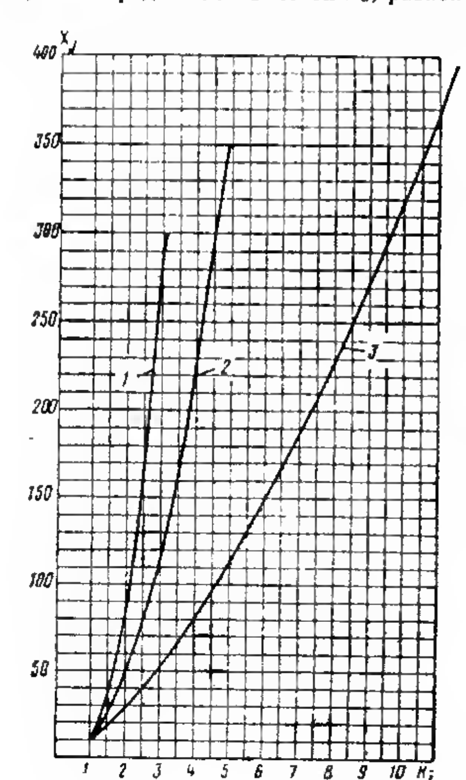


Рис. 10.3. Вертикальные профили средних скоростных напоров для трех типов подстилающей поверхности

1 — для открытой местности с очень небольшими препятствиями (степь, тундра, берега и низкие острова внутренних озер); *2* — для местности, равномерно покрытой препятствиями высотой 10—15 *м* (жилые окраины городов, лесные массивы); *3* — для местности с большими препятствиями (центры больших городов)

муле

$$q_{0l} = q_{0i}\left(\frac{x_j}{10}\right)^{2\alpha_l}, \ (i = 1, 2, 3,), \tag{10.54}$$

где $\alpha_{1,2,3} = 0{,}16$, $0{,}22$; $0{,}33$; q_{0i} — скоростной напор на стандартном уровне для i-го типа подстилающей поверхности. Показатель степени $\alpha = 0{,}16$ соответствует открытой местности с очень небольшими препятствиями (степь, тундра, берега и низкие острова внутренних озер); $\alpha = 0{,}22$ — местности, равномерно покрытой препятствиями высотой 10—15 *м* (жилые окраины городов, лесные массивы); $\alpha = 0{,}33$ — местности с большими препятствиями (центры больших городов); q_{0i} определяется из условия равенства на градиентной высоте скоростного напора ветра для рассматриваемых типов подстилающей поверхности:

$$q_{0G} = q_{0i}\left(\frac{x_{Gi}}{10}\right)^{2\alpha i};$$

$$x_{G1} = 300\ м; \quad x_{G2} = 350\ м; \quad x_{G3} = 400\ м$$

откуда $q_{02} = 0{,}65 q_{01}$; $q_{03} = 0{,}26 q_{01}$.

10.8. Энергетические спектры пульсации скорости ветра

Для приближенного представления нормированной корреляционной функции продольной компоненты пульсации скорости принимается выражение вида

$$R_{v'}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(\cos\beta\tau + \mu\sin\beta|\tau|). \tag{10.55}$$

Для этой функции энергетический спектр (спектральная плотность) имеет вид:

$$S_{v'}(\omega) = 2\,\frac{(\alpha - \mu\beta)\,\omega^2 + (\alpha + \mu\beta)\,m^2}{\omega^4 + 2a\omega^2 + m^4}, \tag{10.56}$$

где $m^2 = \alpha^2 + \beta^2$; $a = \alpha^2 - \beta^2$; α, β и μ — параметры корреляционной функции; при $\mu = 0$:

$$R_{v'}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau; \quad S_{v'}(\omega) = \frac{\omega^2 + m^2}{\omega^4 + 2a\omega^2 + m^4}.$$

На рис. 10.4 приведены вычисленные по формуле (10.56) спектральные плотности пульсации скорости, записанной малоинерционным анемометром в ряде пунктов СССР.

Давенпорт [21, 22] описывает эмпирические энергетические спектры пульсаций скорости на любой высоте формулой

$$S_{v'}(f) = \frac{4k\bar{v}_{10}^2 z^2}{f(1 + z^2)^{4/3}}, \tag{10.57}$$

где $\bar{v}_{10}$ — средняя часовая скорость ветра на стандартной высоте анемометра (10 *м*); f — частота в *гц*; $z = \frac{1200f}{\bar{v}_{10}}$; k — коэффициент лобового сопротивления подстилающей поверхности, принимаемый в первом приближении равным 0,005 для открытой местности, 0,01 для лесных массивов и жилых окраин городов и 0,05 для городских условий.

Интенсивность турбулентности на уровне x

$$\frac{\sigma_{v'}(x)}{\bar{v}(x)} = 2,45k^{1/2}\left(\frac{x}{x_{10}}\right)^{-\alpha}. \qquad (10.58)$$

Из (10.58) следует, что интенсивность турбулентности не зависит от скорости ветра, а только от высоты и от параметров шероховатости подстилающей поверхности.

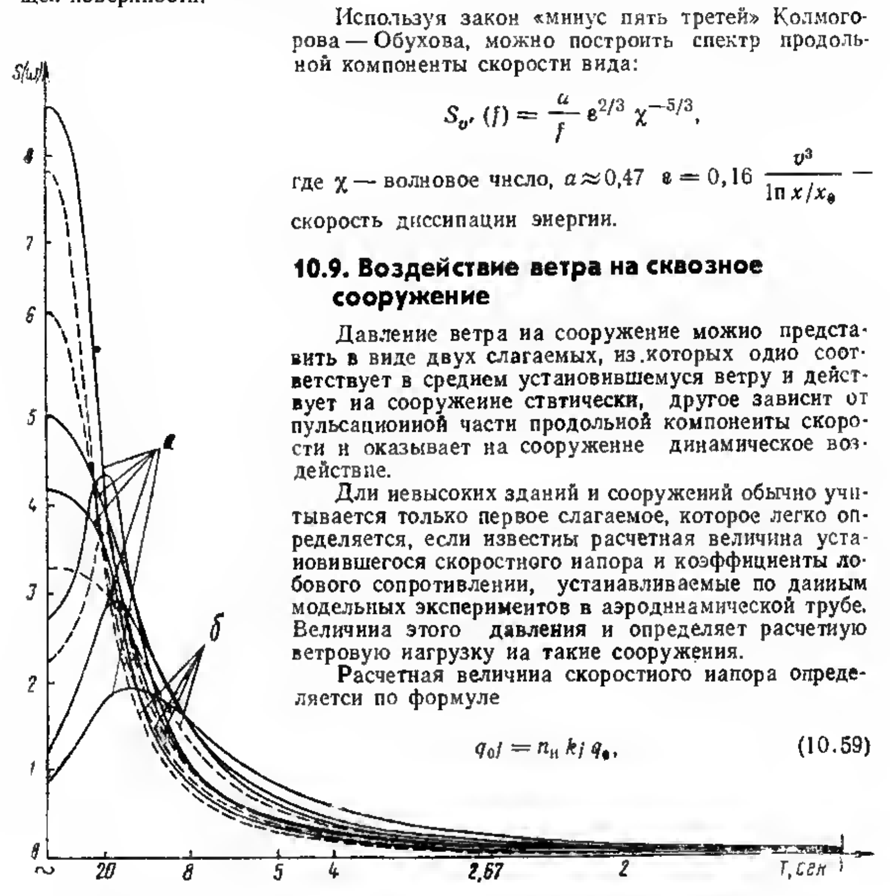


Рис. 10.4. Спектральные плотности для пульсации скорости ветра

а — по записям на Нефтяных Камнях; *б* — по записям в Московской области

Используя закон «минус пять третей» Колмогорова — Обухова, можно построить спектр продольной компоненты скорости вида:

$$S_{v'}(f) = \frac{a}{f}\,\varepsilon^{2/3}\,\chi^{-5/3},$$

где χ — волновое число, $a \approx 0,47$ $\varepsilon = 0,16\,\dfrac{v^3}{\ln x/x_0}$ — скорость диссипации энергии.

10.9. Воздействие ветра на сквозное сооружение

Давление ветра на сооружение можно представить в виде двух слагаемых, из которых одно соответствует в среднем установившемуся ветру и действует на сооружение статически, другое зависит от пульсационной части продольной компоненты скорости и оказывает на сооружение динамическое воздействие.

Для невысоких зданий и сооружений обычно учитывается только первое слагаемое, которое легко определяется, если известны расчетная величина установившегося скоростного напора и коэффициенты лобового сопротивлении, устанавливаемые по данным модельных экспериментов в аэродинамической трубе. Величина этого давления и определяет расчетную ветровую нагрузку на такие сооружения.

Расчетная величина скоростного напора определяется по формуле

$$q_{0j} = n_{н}\,k_j\,q_0, \qquad (10.59)$$

где $n_{н}$ — коэффициент перегрузки; k_j — поправочный коэффициент на возрастание скоростного напора с высотой, определяемый по табл. 10.3; q_0 — нормативный скоростной напор в *кгс/м²* для высоты до 10 *м*, принимаемый по табл. 10.4.

Нормативный скоростной напор можно также определять по данным местных управлений гидрометеослужбы о скоростях ветра для высоты 10 *м* от поверхности земли.

Расчетная величина давления ветра

$$q_j = c_{xj}\,q_{0j}. \qquad (10.60)$$

Таблица 10.4

Район	Нормативные скоростные напоры q_0 в $кгс/м^2$	Район	Нормативные скоростные напоры q_0 в $кгс/м^2$
I	27	V	70
II	35	VI	85
III	45	VII	100
IV	55		

Для высоких сооружений ветровая нагрузка имеет решающее значение, поэтому расчет таких сооружений на статическое действие скоростного напора является уже недостаточным, поскольку не отражает действительной работы высокого сооружения, обтекаемого турбулентным потоком ветра.

Натурные наблюдения показывают, что порывистый ветер вызывает колебания высокого сооружения. От интенсивности этих колебаний зависят динамические напряжения и связанные с ними усталостные явления в элементах сооружения, динамические прогибы, определяющие в ряде случаев эксплуатационные качества сооружения и трещикообразование в стенах высокого здания, и, наконец, комфорт живущих в здании людей.

Отсюда следует, что при расчете высоких сооружений наряду с необходимостью определения вертикального профиля средних скоростей ветра должно быть также учтено динамическое воздействие пульсаций скоростного напора, накладывающихся на средний скоростной напор.

В этой задаче следует различать два этапа. Первый этап заключается в преобразовании потока ветра, характеризуемого скоростью $v(x, t)$, в действующие на сооружение возмущающие силы. Это преобразование выполняется при помощи аэродинамической передаточной функции, зависящей от относительных размеров сооружения и от длин волн гармоник пульсаций скорости. Комбинация спектральной плотности (энергетического спектра) скорости и квадрата модуля аэродинамической передаточной функции дает спектр возмущающей силы, действующей на сооружение.

Второй этап заключается в преобразовании возбуждения в движение сооружения, осуществляемое при помощи второй передаточной функции, зависящей от частоты свободных колебаний сооружения и от суммарного коэффициента диссипации энергии колебаний.

В сквозных сооружениях размер отдельных элементов мал по сравнению с длиной волны или поперечными размерами вихрей (приведенная скорость v/fd будет больше 50), поэтому картину обтекания потоком этих элементов можно рассматривать как квазистационарную. Как известно, в такой модели явления мгновенные аэродинамические силы, действующие на колеблющееся в потоке ветра тело, принимаются такими же, как для неподвижного тела, обтекаемого потоком с относительной скоростью, равной геометрической сумме скорости установившегося потока и скорости поперечных колебаний системы.

При таком предположении квадрат модуля аэродинамической передаточной функции будет близок к единице и энергетический спектр скорости легко преобразуется в спектр аэродинамической силы, при этом используются аэродинамические характеристики элементов сооружения в установившемся потоке.

Общее решение задачи о воздействии турбулентного ветра на сквозное сооружение, рассматриваемое как система с конечным числом степеней свободы, приводится в [4].

Сооружение разбивается на r участков с текущим номером $j = 1, 2, \ldots, k, \ldots, r$; масса участков и действующая на него возмущающая сила сосредоточиваются в центре участка.

Продольную компоненту скорости ветра в точке j по высоте сооружения можно записать в виде:

$$v_j(t) = \bar{v}_j + v_j'(t),$$

где $\bar{v}_j$ — средняя скорость на уровне j; $v_j'(t)$ — ее пульсационная часть. Тогда возмущающая сила, действующая на j-ю массу сооружения,

$$P_j(t) = \bar{P}_j + P_j'(t).$$

Здесь

$$\bar{P}_j = \frac{1}{2} \rho c_{xj} S_j (\bar{v}_j)^2 -$$

статическая ветровая нагрузка;

$$P_j'(t) = \bar{P}_j \left(\frac{2v_j'}{\bar{v}_j} + \frac{v_j'^2}{(\bar{v}_j)^2} \right) -$$

возмущающая сила, соответствующая пульсационной части скорости; ρ — плотность воздуха; c_{xj} — коэффициент лобового сопротивления сооружения на j-м уровне; S_j — площадь проекции сооружения на уровне j на плоскость, перпендикулярную направлению ветра.

Выражение для корреляционной функции обобщенной силы имеет вид:

$$B_{Q_S}(\tau) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=1}^{r} \bar{P}_j \bar{P}_m \left(1 + \gamma_{Tj}^2 + \gamma_{Tm}^2\right) \alpha_s(x_j) \alpha_s(x_m) +$$
$$+ 4 \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=1}^{r} \bar{P}_j \bar{P}_m \gamma_{Tj} \gamma_{Tm} R_{jm}(\tau) \alpha_s(x_j) \alpha_s(x_m). \qquad (10.61)$$

Взаимная корреляционная функция $B_{Q_s Q_l}(\tau)$ получается из (10.61) путем замены $\alpha_s(x_m)$ на $\alpha_l(x_m)$.

Здесь $\gamma_{Tj} = \dfrac{\sigma_{v_j'}}{\bar{v}_j}$ — интенсивность турбулентности в точке j; $\sigma_{v_j'}$ и $\sigma_{v_m'}$ — стандарты пульсаций скорости в точках j и m;

$R_{jm}(\tau) = \dfrac{\overline{v_j'(t)\, v_m'(t+\tau)}}{\sigma_{v_j'} \sigma_{v_m'}}$ — коэффициент пространственно-временной корреляции скорости в точках j и m по высоте сооружения.

Формулы для спектральной плотности обобщенной силы $S_{Q_s}(\omega)$ и взаимной спектральной плотности $S_{Q_s Q_l}(\omega)$ получаются из формул для корреляционных функций обобщенных сил преобразованием Фурье.

Зная статистические характеристики скорости ветра, можно, используя решения, приведенные в п. 10.4 определить реакции системы (перемещения и усилия) на возмущения, вызванные порывистостью ветра.

В настоящее время имеется сравнительно мало надежных экспериментальных данных о пространственных и пространственно-временных характеристиках скорости ветра в пограничном слое атмосферы.

Давенпорт [22] записывает взаимную спектральную плотность возмущающих сил $P_j(t)$ и $P_m(t)$ в виде:

$$S_{jm}(f) = S_{P_r}(f) R_{jm}(f), \qquad (10.62)$$

где $S_{P_r}(f)$ — спектральная плотность возмущающей силы в точке r; $R_{jm}(f)$ — коэффициент взаимной корреляции возмущающих сил с частотой f

в точках j и m; в качестве характеристики коэффициента взаимной корреляции рекомендуется использовать корень квадратный из когерентности

$$R_{jm}(f) = \sqrt{\text{Coherence}} = e^{-c\chi_{mj}},$$

где по вертикали $c=8\frac{f}{\bar{v}_{10}}$, по горизонтали $c=20\frac{f}{\bar{v}_{10}}$.

Приближенное решение задачи [4] построено в предположении, что интенсивность пульсаций **скорости $q'_v(x)$ представляет** собой произведение стационарной случайной функции времени $F(t)$ на функцию координат. Это решение положено в основу приведенных в СНиП рекомендаций по расчету высоких сооружений на действие ветра [19].

Вследствие малости пульсаций скорости по сравнению со средней скоростью между пульсационными составляющими давления $q'_j(t)$ и продольной компонентой скорости $v'_j(t)$ получается линейная зависимость

$$q'_j(t) = \rho c_{xj}\bar{v}_j v'_j(t). \qquad (10.63)$$

Отсюда следует, что: 1) изменчивость давления $\sigma_{q'_j}/\bar{q}_j = 2\gamma_{Tj}$; 2) в случае нормальности пульсаций продольной компоненты скорости пульсация давления также подчиняется нормальному закону; 3) для решения задачи достаточно знать энергетический спектр скорости, записанный в точке, и характер изменения ее пульсации по высоте сооружения.

Для характеристики неоднородности поля пульсаций давления вводится стандарт пульсации $\sigma_{q'}(x)$ на уровне x; параметры нормированного энергетического спектра по высоте постоянны.

При таких предположениях действующая на j-м участке сооружения возмущающая сила равна $P_j(t) = S_j\sigma_j F(t)$, где σ_j — среднее значение стандарта пульсаций давления на участке j; $\overline{F(t)} = 0$; $\sigma_F^2 = 1$.

Используя выражение (10.41), найдем средний квадрат смещений k-й точки сооружения:

$$\sigma_k^2 = \sum_{s=1}^{n} \frac{\eta_{ks}^2\,\xi(\omega_s)}{\omega_s^4}, \qquad (10.64)$$

где η_{ks} — коэффициент, зависящий от формы колебаний сооружения (приведенное ускорение в точке k):

$$\eta_{ks} = \frac{\alpha_s(x_k)\sum\limits_{j=1}^{r} c_{xj} S_j \sigma_j \alpha_s(x_j)}{\sum\limits_{j=1}^{r} M_j \alpha_s^2(x_j)}, \qquad (10.65)$$

квадрат коэффициента динамичности

$$\xi^2(\omega_s) = \psi\frac{\left[\frac{1}{2\alpha}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{m^2}\right)\omega_s^4 + \frac{1}{\gamma}\left(1+\frac{\varepsilon^2\gamma^2}{m^2}\right)\omega_s^3 + 2\alpha\frac{\varepsilon^2}{m^2}\omega_s^2 + \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\omega_s\right]}{\left(\omega_s^4 + 2\alpha\gamma\omega_s^3 + 2a\omega_s^2 + 2\alpha\gamma m^2\omega_s + m^4\right)}, \qquad (10.66)$$

$$\psi = \alpha - \mu\beta; \quad \varepsilon^2 = \frac{(\alpha+\mu\beta)m^2}{\alpha-\mu\beta}.$$

Как видно, коэффициент динамичности ξ зависит от периода свободных колебаний сооружения $T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$, от логарифмического декремента колебаний δ и от параметров корреляционной функции $F(t)$.

Графики ξ на рис. 10.5 соответствуют трем значениям δ. Для гибких стальных конструкций $\delta = 0{,}10$; для стальных и деревянных сооружений $\delta = 0{,}15$, для железобетонных и каменных сооружений $\delta = 0{,}30$.

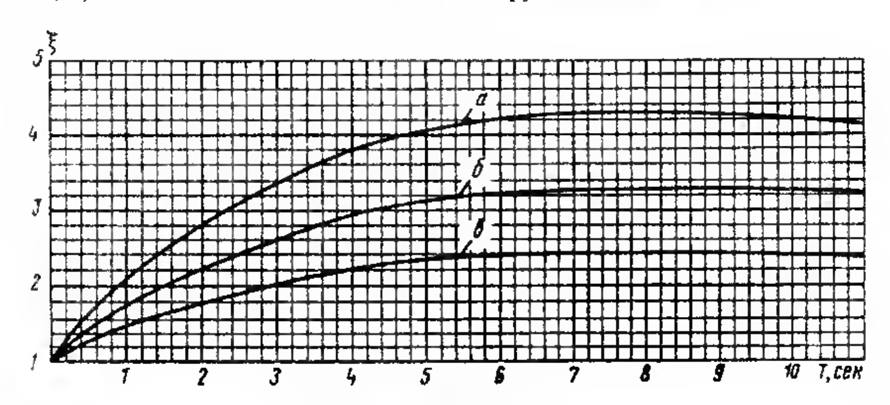


Рис. 10.5. Коэффициенты динамичности

а — для гибких стальных конструкций (логарифмический декремент затухания $\delta \approx 0{,}10$); б — для металлических и деревянных сооружений ($\delta \approx 0{,}15$); в — для железобетонных и каменных сооружений ($\delta \approx 0{,}30$)

Для стандарта инерционной силы T_{ks}, возникающей при установившихся колебаниях сооружения по s-й форме, можно написать следующее выражение:

$$\sigma_{T_{ks}} = M_k\, \omega_s^2 \sqrt{\overline{y_{ks}^2}} = M_k\, \eta_{ks}\, \xi_s, \tag{10.67}$$

где M_k — масса k-го участка сооружения.

Стандарт инерционной силы с учетом всех форм колебаний (в предположении, что динамические перемещения системы, соответствующие каждой форме свободных колебаний, представляют собой статистически независимые случайные величины) имеет вид:

$$\sigma_{Tk} = M_k \sqrt{\sum_{s=1}^{n} \eta_{ks}^2\, \xi_s^2}\,. \tag{10.68}$$

10.10. Расчет сооружений башенного типа

К таким сооружениям относятся: дымовые и вентиляционные трубы, радио- и телевизионные башни, опоры линий электропередачи, аппараты колонного типа и тому подобные сооружения. Ветровая нагрузка для рассматриваемых сооружений с периодом свободных колебаний более 0,25 *сек* должна определяться с учетом динамического воздействия пульсаций давления ветра, вызываемых его порывами. В качестве расчетной схемы таких сооружений принимается защемленный в основание консольный стержень постоянного или переменного по высоте сечения.

Расчетная ветровая нагрузка P_{ks}, действующая на участок сооружения

с номером k при колебаниях его по s-й форме ($s=1, 2, ..., n$), определяется по формуле (рис. 10.6)

$$P_{ks} = P_k^{с} + P_{ks}^{д}, \qquad (10.69)$$

где $P_k^{с} = q_k S_k$ — расчетная ветровая нагрузка в *тс* на k-й участок сооружения, соответствующая статическому действию скоростного напора ветра; $q_k = c_{xk} q_{0k}$ — расчетное давление ветра (*тс/м²*) для середины k-го участка; $P_{ks}^{д} = M_k \eta_{ksp} \xi_s$ — расчетная инерционная сила (*тс*), действующая в середине k-го участка при колебаниях сооружения по s-й форме; η_{ksp} — расчетное приведенное ускорение (*м/сек²*) в точке k:

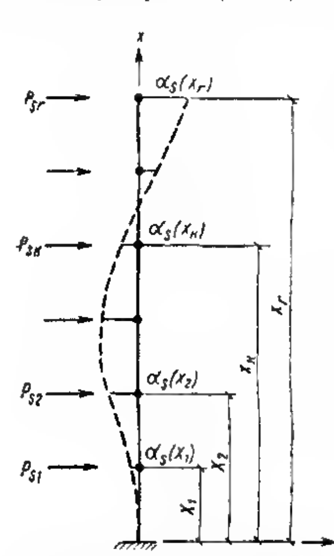


Рис. 10.6. Расчетная схема сооружения (пунктирной линией показана s-я форма свободных колебаний)

$$\eta_{ksp} = \frac{\alpha_s(x_k) \sum_{j=1}^{r} \alpha_s(x_j) P_j^{с} m_j}{\sum_{j=1}^{r} \alpha_s^2(x_j) M_j}; \qquad (10.70)$$

коэффициент пульсации скоростного напора

$$m_j = \alpha_c \frac{\sigma q'_{0j}}{\bar{q}_{0j}} = 2\alpha_c \gamma_{тj}; \qquad (10.71)$$

здесь α_c — число стандартов; $\gamma_{тj}$ — интенсивность турбулентности в точке j.

Если пульсация скоростного напора нормальна, то вероятность превышения ею некоторого заданного значения q'_{0jp}, которое в α_c раз больше стандарта $\sigma_{q'_{0j}}$, определяется по формуле

$$P\left(|q'_{0j}| > q'_{0jp}\right) = 1 - 2\Phi\left(\frac{q'_{0j}}{\sigma'_{0j}}\right),$$

где

$$\Phi\left(\frac{q'_{0j}}{\sigma'_{q0j}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha_c} e^{-z^2/2}\, dz.$$

При $P(|q'_{0j}| > q'_{0jp}) = 0{,}001$, $0{,}01$ и $0{,}05$ α_c равно соответственно 3,24; 2,56 и 1,95.

При числе стандартов $\alpha_c = 3$; 2,5 и 2 вероятности $P(|q'_{0j}| > q_{0jp})$ равны соответственно 0,0027, 0,0123 и 0,0455.

Статистическая обработка 2-*мин* записей скоростных напоров показывает, что изменчивость $\sigma_{q'_{0j}}/\bar{q}_{0j}$ составляет $\sim 0{,}16$. На основании этих данных в нормах СССР коэффициент пульсации для высоты 10 *м* принят равным 0,40, что соответствует $\alpha_c = 2{,}5$. Для отметок выше 10 *м* коэффициент пульсации определяется в зависимости от высоты x по табл. 10.5.

При определении ветровой нагрузки на сооружения башенного типа с высотой не более 150 *м* допускается учитывать только колебания по основному тону. В этом случае расчетная ветровая нагрузка P_k определяется по формуле (10.69), при этом $\xi_s = \xi_1$ и $\eta_{ks} = \eta_1$ соответствуют первой форме свободных колебаний.

Высокие сооружения консольного типа с высотой более 150 *м* следует рас-

Таблица 10.5

Высота в $м$	До 10	20	40	60	80	100—200	200—300	300—400	Выше 400
m_j	0,40	0,35	0,32	0,28	0,25	0,21	0,18	0,14	0,1

считывать на ветровую нагрузку с учстом высших форм колебаний; число форм колебаний s принимается не более трех.

Периоды и формы свободных горизонтальных колебаний сооружения можно определять приближеиио по формулам, приведенным в [20].

Для сооружений с массой и ветровой нагрузкой, приведенными к его вершине (одноэтажные открытые площадки с расположением на них технологическим оборудованием, транспортные галереи и тому подобные сооружения), расчетную ветровую нагрузку, вычисленную по формуле (10.60), следует умножать на коэффициент увеличения расчетного давления ветра

$$\beta = 1 + \xi m, \tag{10.72}$$

где m — коэффициент пульсации на уровне верха сооружения, принимаемый по табл. 10.5.

Определение расчетных усилий в сечениях сооружения. Расчетные изгибающий момент $M_{иk}$ и поперечная сила Q_k в k-м сечении сооружения определяются по формулам:

$$M_{иk} = M_{и.сk} + M_{и.дk}; \quad Q_k = Q_{ck} + Q_{дk}. \tag{10.73}$$

Здесь первые члены правых частей этих формул представляют собой статические, вторые — динамические усилия, вызванные ветром:

$$\left.\begin{aligned} M_{и.ck} &= \sum_{j=k}^{r} q_j S_j (x_j - x_k); \quad Q_{ck} = \sum_{j=k}^{r} q_j S_j; \\ M_{и.дk} &= \sqrt{\sum_{s=1}^{n} M_{ks}^2}; \quad Q_{дk} = \sqrt{\sum_{s=1}^{n} Q_{ks}^2}; \\ M_{ks} &= \sum_{j=k}^{r} P_{js} (x_j - x_k); \quad Q_{ks} = \sum_{j=k}^{r} P_{js}; \end{aligned}\right\} \tag{10.74}$$

$P_{js} = M_j \eta_{jsp} \xi_s$ — инерционная сила, действующая в центре j-го участка сооружения при его колебаниях по s-форме.

Динамические перемещения определяются для нормативного давления

$$y_{дk} = \sqrt{\sum_{s=1}^{n} \eta_{нks}^2 \, \xi_s^2 / \omega_s^4}\,. \tag{10.75}$$

Для вычисления $\eta_{нks}$ следует σ_j в формуле (10.65) заменить на $q_j^н m_j$, где $q_j^н = q_0 c_j k_j$ — нормативное давление ветра.

Расчетные усилия и перемещения в сечениях железобетонной дымовой трубы с учетом нормальных сил от веса сооружения можно определять методом последовательных приближений.

В качестве первого приближения принимаются изгибающие моменты в сечениях трубы, вычисленные по формуле (10.73) без учета нормальных сил. Далее для всех участков трубы вычисляются нормальные силы N_k от собственного веса ствола, футеровки, площадок и т. п.

По усилиям $M_{\text{и}k}^{(1)}$ и N_k вычисляются кривизны и прогибы оси трубы $1/\rho_k^{(1)}$ на уровне середины участков (см. «Инструкцию по проектированию железобетонных дымовых труб»). Затем вычисляются дополнительные моменты от нормальных сил $M_{\text{доп}}^{(1)}$, при этом кроме прогибов $y_k^{(1)}$ учитываются также прогибы $y_{\text{крен}\,k}$, вызванные креном фундамента.

Во втором приближении определяются прогибы трубы по суммарным изгибающим моментам первого приближения

$$M_{\text{и.сумм}}^{(1)} = M_{\text{и}k}^{(1)} + M_{\text{доп}}^{(1)}$$

и вычисляются новые дополнительные изгибающие моменты $M_{\text{доп}}^{(2)}$, суммируемые с моментами $M_{\text{и}}^{(1)}$. Процесс практически сходится после двух-трех приближений.

При расчете трубы по первому предельному состоянию (по несущей способности) прогибы трубы, вызванные солнечной радиацией, не учитываются.

При расчете по второму предельному состоянию прогиб ствола трубы определяется от суммарного действия нормальных сил, нормативной ветровой нагрузки, крена фундамента и солнечной радиации.

Рекомендуется прогиб верха трубы y_0 от действия солнечной радиации принимать равным 0,005 H, где H — высота сооружения. В качестве первого приближения для упругой линии трубы может быть принята парабола вида $y = y_0 x^2/H^2$.

10.11. Расчет мачт

Мачта представляет собой упругий стержень, опирающийся на ряд образованных узлами вант податливых опор, жесткость которых является нелинейной функцией перемещения узлов.

Приближенный метод динамического расчета такой системы разработан в предположении, что мачта представляет собой упругий стержень на линейно податливых опорах. Такой подход основан на анализе зависимости между смещением вантового узла и действующей на него горизонтальной нагрузкой. Результаты натурных наблюдений также показывают, что колебания мачты по своему характеру мало отличаются от колебаний неразрезного стержня на линейно податливых опорах.

В такой постановке задача о свободных колебаниях мачты на вантах может быть решена методом перемещений [9]. Для многоярусных мачт динамический расчет на действие ветра рекомендуется выполнять с применением ЭВМ.

Введем следующие обозначения: r — номер узла и пролета мачты; t — число узлов мачты; p — число пролетов мачты; j — номер участка, длина которого $l_r/10$; x_k — координата точки оси мачты, для которой определяются смещения и усилия (изгибающие моменты и поперечные силы); x_{rj} — текущая координата точки j в пролете r; ω_s, $\alpha_{ys}(x_k)$, $\alpha_{ys}(x_{rj})$, $\alpha_{\varphi s}(x_{rj})$, $\alpha_{Ms}(x_k)$, $\alpha_{Qs}(x_k)$ — соответственно s-я круговая частота свободных колебаний и коэффициенты распределения амплитуд (относительные ординаты) перемещений, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил в рассматриваемой точке k и во всех точках j пролета r, где сосредоточены массы $m_r l_r/10$.

Пусть заданы: 1) район расположения мачты; 2) схема мачты с постоянными погонной массой m_r и жесткостью EJ_r в каждом из ее p пролетов; 3) сосредоточенные в узлах мачты статические осевые силы N_r и массы вант M_r^*; 4) расчетные статические и динамические силы и моменты, действующие в узлах и в точках пролета мачты, P_r, M_r, $P_0(x_{rj})$, $P_{\text{д0}}(x_{rj})$, $M_0(x_{rj})$, $M_{\text{д0}}(x_{rj})$; 5) коэффициенты жесткости узлов c_r.

Вычислим перемещения, изгибающие моменты и поперечные силы от ветровой нагрузки с учетом динамического воздействия пульсаций давления ветра.

Расчет мачты производится в следующем порядке.

1. Вычисляют параметры частоты $a_{r-1,r}$, $d_{r-1,r}$, для каждого пролета мачты по формулам

$$a_{r-1,r},\ d_{r-1,r} = l_r \sqrt{\sqrt{\left(\frac{N_r}{2EJ_r}\right)^2 + \frac{m_r\omega^2}{EJ_r}} \mp \frac{N_r}{2EJ_r}}. \qquad (10.76)$$

2. Составляют канонические уравнения метода перемещений для определения частот и форм свободных колебаний мачты.

3. Вычисляют корни определителя системы канонических уравнений ($s = 1, 2, ..., n$).

4. Определяют относительные ординаты перемещений α_{yr} и $\alpha_{\varphi r}$ узлов мачты путем решения системы неоднородных уравнений, которые получаются из матрицы в результате переноса последнего столбца в правую часть и вычеркивания последней строки.

5. Коэффициенты распределения амплитуд перемещений, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил для каждого яруса и для каждой собственной частоты мачты вычисляют по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{yl}(x) = C_1 \operatorname{ch} d\xi + C_2 \operatorname{sh} d\xi + C_3 \cos a\xi + C_4 \sin a\xi, \quad \left(\xi = \frac{x}{l}\right);\\
&\alpha_{\varphi l}(x) = \frac{d}{l}(C_1 \operatorname{sh} d\xi + C_2 \operatorname{ch} d\xi) - \frac{a}{l}(C_3 \sin a\xi - C_4 \cos a\xi);\\
&\alpha_{Ml}(x) = -\frac{EJ}{l^2}(C_1 d^2 \operatorname{ch} d\xi + C_2 d^2 \operatorname{sh} d\xi - C_3 a^2 \cos a\xi - C_4 a^2 \sin a\xi);\\
&\alpha_{Ql}(x) = -\frac{EJ}{l^3}(C_1 a^2 d \operatorname{sh} d\xi + C_2 a^2 d \operatorname{ch} d\xi + C_3 a d^2 \sin a\xi -\\
&\qquad - C_4 a d^2 \cos a\xi).
\end{aligned}\right\} \qquad (10.77)$$

Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 отыскиваются исходя из граничных условий закрепления каждого пролета мачты.

Далее вычисляют расчетные статические и динамические перемещения точек оси мачты, изгибающие моменты и поперечные силы в ее сечениях.

Если принять для зависимости скоростного напора от высоты степенной закон

$$q_0(x_{rj}) = q_0 \left(\frac{x_{rj}}{10}\right)^{2/7}, \qquad (10.78)$$

а для зависимости коэффициента пульсации скоростного напора от высоты закон вида

$$m(x_{rj}) = 0{,}4 \left(\frac{x_{rj}}{10}\right)^{-3/14} \qquad (10.78а)$$

или $m(x_{rj}) = 2\alpha_c\gamma_т(x_{rj})$, где интенсивность турбулентности $\gamma_т(x_{rj})$ определяется по формуле (10.58), то

$$P(x_{rj}) = n_н q_0 c_{xr} d_{Mr} \frac{l_r}{10} \left(\frac{x_{rj}}{10}\right)^{2/7}; \qquad (10.79)$$

$$P_д(x_{rj}) = m(x_{rj})\, q(x_{rj})\, c_r d_{Mr} \frac{l_r}{10}. \qquad (10.80)$$

По аналогии вычисляют сосредоточенные силы и моменты P_r, $P_{дr}$, $P_0(x_{rj})$, $P_{д0}(x_{rj})$, M_r, $M_{дr}$, $M_0(x_{rj})$, $M_{д0}(x_{rj})$.

Статические перемещения и усилия от действующих на ствол и в узлах мачты сосредоточенных сил и моментов определяют путем разложения нагрузки по высоте мачты в ряд по формам собственных колебаний при соответствующих условиях закрепления опоры и узлов мачты.

Расчетные статические перемещения:

$$y_c(x_k) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ys}(x_k) K_s^{\text{н}};$$

$$K_s^{\text{н}} = \frac{K_s}{n_{\text{н}}};$$

$$K_s = \frac{Q_s}{M_{s\text{об}}\omega_s^2} = \frac{\sum_{r=1}^{p}\sum_{j=1}^{10} P(x_{rj})\alpha_{ys}(x_{rj}) + \sum_{r=1}^{t} P_r\alpha_{yrs} + \sum_{r=1}^{t} M_r\alpha_{\varphi s}(x_{rj}) +}{\omega_s^2\left(0,10\sum_{r=1}^{p}\sum_{j=1}^{10} m_r l_r \alpha_{ys}^2(x_{rj}) + \sum_{r=1}^{t} M_r^*\alpha_{yrs}\right)} \to$$

$$\to \frac{+\sum P_0(x_{rj})\alpha_{ys}(x_{rj}) + \sum M_0(x_{rj})\alpha_{\varphi s}(x_{rj})}{\omega_s^2\left(0,10\sum_{r=1}^{p}\sum_{j=1}^{10} m_r l_r \alpha_{ys}^2(x_{rj}) + \sum_{r=1}^{t} M_r^*\alpha_{yrs}\right)}. \quad (10.81)$$

Приложенные в пролете сосредоточенные массы приводятся к погонной массе, распределенной по высоте пролета. Для последних двух слагаемых числителя суммирование распространяется на все точки оси мачты (кроме узлов), где приложены сосредоточенные силы и моменты.

Расчетные статические изгибающие моменты

$$M_{\text{и.с}}(x_k) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{Ms}(x_k) K_s. \quad (10.82)$$

Расчетные статические поперечные силы

$$Q_c(x_k) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{Qs}(x_k) K_s. \quad (10.83)$$

Расчетные динамические перемещения и усилия в сечениях мачты определяют по формулам:

$$y_{\text{д}}(x_k) = \sqrt{\sum_{s=1}^{n} \alpha_{ys}^2(x_k) K_{\text{д}s}^{H^2}\xi_s^2}, \quad \text{где } \alpha_{ys}(x_k) K_{\text{д}s}^{H} = \frac{\eta_{\text{н}ks}}{\omega_s^2}; \quad (10.84)$$

$$M_{\text{д}}(x_k) = \sqrt{\sum_{s=1}^{n} \alpha_{Ms}^2(x_k) K_{\text{д}s}^2\xi_s^2}; \quad Q_{\text{д}}(x_k) = \sqrt{\sum_{s=1}^{n} \alpha_{Qs}^2(x_k) K_{\text{д}s}^2\xi_s^2}.$$

Вычисляя $K_{\text{д}s}$, следует в формуле для K_s статические силы и моменты, действующие на ствол мачты, заменить на динамические силы и моменты $P_{\text{д}}(x_{rj})$, $P_{\text{д}r}$, $P_{\text{д}0}(x_{rj})$, $M_{\text{д}r}$, $M_{\text{д}0}(x_{rj})$.

Суммарные расчетные усилия в сечениях мачты получают сложением абсолютных значений статических и динамических усилий, при этом для суммы принимают знак статических усилий.

10.12. Расчет высоких протяженных в плане зданий

Механизм взаимодействия турбулентного ветра с такими зданиями изучен еще недостаточно. Основная трудность, с которой сталкиваются при определении реакции высоких зданий на действие ветра, состоит в установлении зависимости средних и переменных давлений от скорости ветра, т. е. в опре-

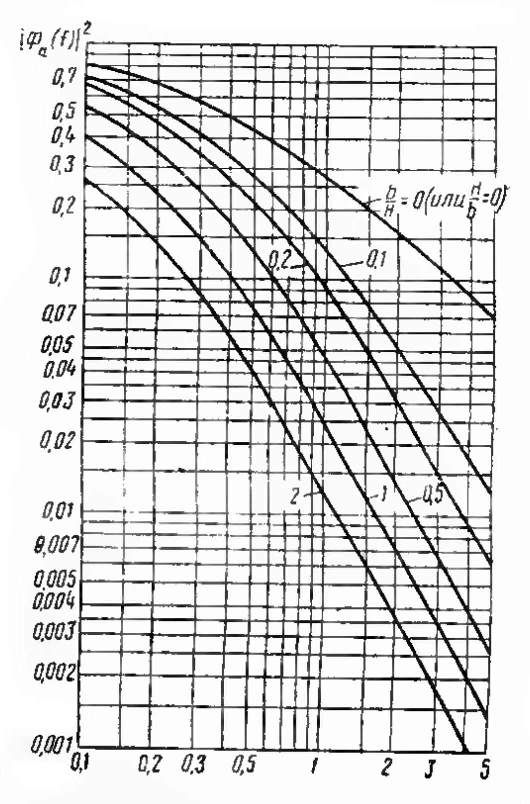


Рис. 10.7. Приведенная частота $\varkappa = \frac{fH}{\bar{v}_н}$ (или $\frac{fb}{\bar{v}_н} \cdot \frac{1}{2,5}$ для $H/b=0$)

делении квадрата модуля аэродинамической передаточной функции здания. Приведенные скорости для таких зданий обычно меньше 10, и квазистационарная теория здесь уже неприменима. Задача осложняется тем, что значительная часть энергии атмосферной турбулентности имеет длину волн того же порядка, что и размер здания, и влияние этих порывов, которые не охватывают здание, на давление еще далеко не выяснено.

Для приближенной оценки воздействия ветра на здания Викери и Девенпорт [23] предполагают, что мгновенная нагрузка пропорциональна мгновенному значению количества движения массы воздуха, проходящей через площадь, равную проекции сооружения на плоскость, перпендикулярную направлению средней скорости. Учитывается только основная частота и первая форма свободных колебаний здания. Для квадрата модуля аэродинамической передаточной функции системы рекомендуется выражение

$$|\Phi_a(f)|^2 = \left[\frac{1}{1+\left(2\frac{f\sqrt{S}}{\bar{v}_z}\right)^{4/3}}\right]^2. \qquad (10.85)$$

График $|\Phi_a(f)|^2$ на рис. 10.7 заимствован из работы [22]. Энергетический спектр возмущающей силы получается путем умножения энергетического спектра пульсации скорости на функцию $|\Phi_a(f)|^2$:

$$S_p(f) = \frac{4(\bar{P}_x)^2}{(\bar{v}_x)^2} |\Phi_a(f)|^2 S_v(f). \tag{10.86}$$

Спектр реакции здания определяется по формуле (10.31).

СНиП рекомендует учитывать воздействие пульсаций скоростного ветра только при расчете зданий высотой более 30 *м*. Расчетная ветровая нагрузка и расчетные усилия в элементах высоких зданий определяются по формулам п. 10.10, при этом коэффициент пульсаций m принимается постоянным по высоте здания и равным 0,2.

10.13. Вихревое возбуждение колебаний сооружений цилиндрической формы

Известно, что срыв вихрей с кромок обтекаемых тел часто является фактором, обусловливающим возбуждение колебаний этих тел. Так, при колебаниях натянутой струны в потоке воздуха возникают тоны, подобные звукам

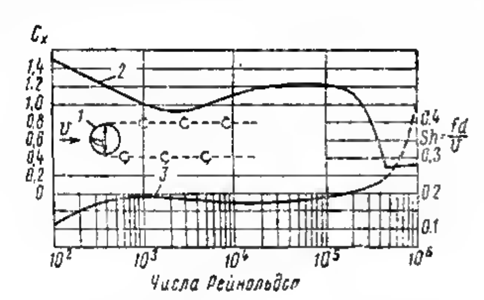


Рис. 10.8. Изменение коэффициента лобового сопротивления и чисел Струхаля для кругового цилиндра в зависимости от чисел Рейнольдса

1 — вихревая дорожка Бенара—Кармана; *2* — кривая коэффициента лобового сопротивления; *3* — кривая чисел Струхаля

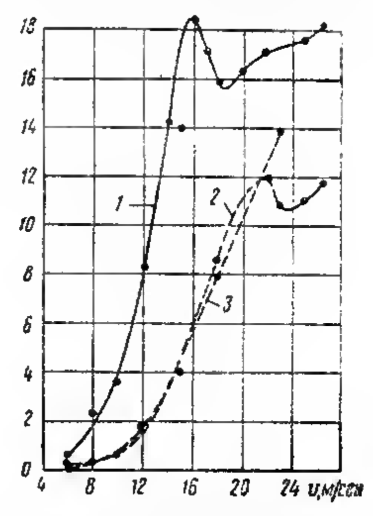


Рис. 10.9. Изменение амплитуд колебаний цилиндра $d=0,8$ *м* на упругих опорах в зависимости от скорости потока. Собственная частота колебаний опор

1 — $n=3,8 \div 4$ *гц*; *2* — $n=5,5$ *гц*; *3* — $n=5,4$ *гц*

эоловой арфы. Исследования Струхаля и Рэлея [15] установили, что частота звука пропорциональна скорости потока v и обратно пропорциональна диаметру струны d. Если скорость потока такова, что возбуждаемый тон совпадает с одним из собственных тонов струны, звук усиливается. Колебания струны происходят как в направлении потока, так и в перпендикулярном направлении.

Явления, установленные Струхалем и Рэлеем, наблюдаются и при колебаниях дымовых труб, радиомачт, телевизионных опор и тому подобных гибких высоких сооружений цилиндрической формы. Они объясняются процессом вихреобразования в области, находящейся позади сооружения, при обтекании его плоскопараллельным потоком ветра. Частота срыва вихрей Бенара — Кармана f определяется числом Струхаля

$$sh = \frac{fd}{v}. \qquad (10.87)$$

Числа Струхаля для различных цилиндрических тел приведены в табл. 10.6. Различие в величине чисел Струхаля для разных тел связано с ши-

Таблица 10.6

Направление ветра	Сечение элементов в мм	$sh=\frac{nd}{v}$	Направление ветра	Сечение элементов в мм	$sh=\frac{nd}{v}$
→	t=2; t; 50; 50	0,120	↓	t=1; 12,5; 25; 12,5; 50	0,147
↓		0,137			
→	t=0,5; 25; 25	0,120	↓	t=1; 12,5; 12,5; 12,5; 12,5; 50	0,150
↓	t=1; 25; 50	0,144	←	t=1; 50; 50	0,145
			↑		0,142
			↙		0,147
↓	t=1,5; 12,5; 50	0,145	←	t=1; 25; 25	0,131
			↑		0,134
			↙		0,137
↓	t=1; 25; 50	0,140	→	t=1; 25; 25; 25; 25	0,121
↑		0,153	↓		0,143
↓	t=1; 12,5; 50	0,145	→	t=1; 25; 12,5; 25; 25	0,135
↑		0,168			
→	t=1,5; 50	0,156	→	t=1; 50; 100	0,160
↓		0,145			
Цилиндр $11800 < Re < 19100$	25	0,200	→	t=1; 25; 50	0,114
			↑		0,145

риной аэродинамического следа. Цилиндр, ширина следа которого зависит от чисел Рейнольдса, будет иметь и различные числа Струхаля. Графики на рис. 10.8 показывают изменение чисел Струхаля и коэффициента лобового сопротивления для кругового цилиндра в зависимости от чисел Рейнольдса.

Вихри, отходящие от цилиндра, вызывают пульсацию давления, которая может быть разложена на составляющие в направлении потока (лобовое сопротивление) и перпендикулярно ему (поперечная сила).

Как показывают опыты [2], колебания цилиндра вдоль и поперек потока происходят в этом случае со случайной амплитудой и фазой и с частотой, близкой частоте свободных колебаний в данном направлении. Сложение этих двух взаимно перпендикулярных колебаний дает траекторию, близкую к эллипсу, большая ось которого перпендикулярна направлению потока.

Такой характер колебаний цилиндра указывает на случайную природу действующих на него аэродинамических сил. Из графиков на рис. 10.9 видно, что колебания цилиндра поддерживаются энергией потока даже при малых скоростях. С увеличением скорости потока растут и амплитуды колебаний цилиндра. Это наблюдается как при ламинарном, так и при турбулентном обтекании ($Re > Re_{кризиса}$). В области падения лобового сопротивления (кризиса сопротивления) наблюдается значительное уменьшение амплитуд поперечных колебаний цилиндра.

При определенных скоростях потока отмечается захват частоты вихрей Бенара—Кармана частотой свободных колебаний цилиндра, и амплитуды его начинают расти. Это явление, называемое иногда ветровым резонансом, носит автоколебательный характер и вызвано аэродинамической (эоловой) неустойчивостью цилиндра, которая возникает при критической скорости ветра, когда отрицательное аэродинамическое демпфирование преобладает над положительным демпфированием в цилиндре.

Эта расчетная модель положена в основу приведенных в СНиП рекомендаций по расчету на ветровой резонанс высоких сооружений, имеющих форму кругового цилиндра [19].

Аэродинамические испытания цилиндров в области чисел Рейнольдса $0{,}4\cdot10^6$—$18{,}2\cdot10^6$ [24, 25, 30], показали, что за кризисом сопротивления при $Re = 1{,}4\cdot10^6 \div 3{,}5\cdot10^6$ действующая на сооружение поперечная сила случайна с непрерывным спектром, при Re от $3{,}5\cdot10^6$ до $6\cdot10^6$ процесс имеет узкополосный спектр, выше $Re = 6\cdot10^6$ до $Re = 18{,}2\cdot10^6$ случайный процесс содержит периодическую составляющую.

Основываясь на этих экспериментах, Фанг [24] и Новак [25] рассматривают задачу о поперечных колебаниях цилиндра, обтекаемого установившимся потоком, как задачу о вынужденных колебаниях системы, возбуждаемой случайной поперечной силой. Такая модель, однако, не объясняет явления ветрового резонанса. Турбулентный поток и изменение скорости с высотой существенно влияют на рассматриваемое явление. Турбулентность нарушает регулярность срыва вихрей. Частота срыва вихрей изменяется по высоте цилиндра в зависимости от градиента средней скорости. Вследствие этого аэродинамические силы становятся менее эффективными; с увеличением интенсивности турбулентности пик динамической реакции системы сглаживается, однако общий уровень возбуждения возрастает.

Расчет сооружений, имеющих форму кругового цилиндра. Для таких сооружений кроме расчета на скоростной напор с учетом динамического воздействия его пульсаций необходим также поверочный расчет на резонанс, который выполняется в следующем порядке.

1. Определяется критическая скорость ветра, вызывающая резонансные колебания:

$$v_{крит\,s} = \frac{5d}{T_s}, \qquad (10.88)$$

где T_s — s-й период свободных колебаний сооружений в *сек*; d — диаметр; для дымовых труб малой конничности d — диаметр верхнего сечения сооружения.

Проверка на резонанс не производится, если критическая скорость, определяемая по (10.88), менее $2\sqrt{q_0}$ и более 25 *м/сек*; q_0 — нормативный скоростной напор для высоты над поверхностью земли 10 *м*.

2. Определяется интенсивность аэродинамической силы $F_s(x, t)$, действующей на сооружение при его колебаниях по s-й форме:

$$F_s(x, t) = F_s(x) \sin \omega_s t, \qquad (10.89)$$

где $F_s(x) = F_{0s}\alpha_s(x)$ — амплитуда аэродинамической силы (*тс/м*), действующей на уровне с абсциссой x; $\alpha_s(x)$ — относительная ордината s-й формы свободных колебаний;

$$F_{0s} = c_y \frac{v^2_{\text{крит } s} d}{16} = 0{,}02\, v^2_{\text{крит } s} d —$$

амплитуда аэродинамической силы, соответствующая наибольшей относительной ординате s-й формы свободных колебаний; для сооружений консольного типа при учете только первой формы свободных колебаний F_{0s} соответствует свободному концу сооружения; $c_y = 0{,}32$ — коэффициент поперечной силы; $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ — s-я круговая частота.

Здесь принято, что распределение интенсивности $F_s(x)$ по высоте сооружения с точностью до постоянной совпадает с s-й формой собственных колебаний.

3. Вычисляются резонансная амплитуда колебаний $y^{\text{р}}_s(x)$, изгибающий момент $M^{\text{р}}_{\text{и}s}(x)$ и поперечная сила $Q^{\text{р}}_s(x)$ в сечении сооружения с абсциссой x:

$$\left.\begin{aligned} &y^{\text{р}}_s(x) = 0{,}8\,\frac{\pi}{\delta}\, y^{\text{с}}_s(x); \quad M^{\text{р}}_{\text{и}s}(x) = 0{,}8\,\frac{\pi}{\delta}\, M^{\text{с}}_{\text{и}s}(x); \\ &Q^{\text{р}}_s(x) = 0{,}8\,\frac{\pi}{\delta}\, Q^{\text{с}}_s(x), \end{aligned}\right\} \qquad (10.90)$$

где $y^{\text{с}}_s(x)$, $M^{\text{с}}_{\text{и}s}$, $Q^{\text{с}}_s(x)$ — прогиб и изгибающий момент от статически приложенной нагрузки $F_s(x)$; для мачт на вантах и для консольных сооружений высотой более 150 *м* в качестве расчетного значения $F_s(x)$ принимается наибольшее из значений, вычисленных для критических скоростей $v_{\text{крит } s} \leqslant 25$ *м/сек*; при этом число учитываемых форм колебаний s для мачт принимается не более четырех, для консольных сооружений не более трех; δ — логарифмический декремент колебаний; для стальных дымовых труб и мачт $\delta = 0{,}1$; для гибких стальных конструкций $\delta = 0{,}05$; для стальных аппаратов на железобетонных постаментах $\delta = 0{,}20$; для железобетонных сооружений $\delta = 0{,}3$; 0,8 — коэффициент, учитывающий малую вероятность возникновения плоскопараллельного потока по высоте сооружения.

Расчетные изгибающий момент $M'_{\text{и}}(x)$ и поперечная сила $Q'(x)$ в рассматриваемом сечении сооружения с абсциссой x

$$\left.\begin{aligned} &M'_{\text{и}}(x) = \sqrt{\left[M^{\text{р}}_{\text{и}s}(x)\right]^2 + \left[M^{\text{д}}_{\text{и}}(x)\right]^2}\,; \\ &Q'(x) = \sqrt{\left[Q^{\text{р}}_s(x)\right]^2 + \left[Q^{\text{д}}(x)\right]^2}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (10.91)$$

где $M^{\text{д}}_{\text{и}}(x)$, $Q^{\text{д}}(x)$ определяются по формулам (10.74), при этом величины $P^{\text{с}}_j$ и $P^{\text{д}}_{sj}$ вычисляют в зависимости от

$$q_j = \frac{v^2_{\text{крит } s}}{16}\, c_j \; (k_j = 1, \quad n_{\text{н}} = 1).$$

При $v_{\text{крит } s} \leqslant 10$ *м/сек* разрешается принимать

$$M'_{\text{и}}(x) = M^{\text{р}}_{\text{и}s}(x); \quad Q'(x) = Q^{\text{р}}_s(x).$$

10.14. Коэффициент диссипации энергии колебаний. Аэродинамическая неустойчивость

Коэффициент диссипации энергии колебаний высокого сооружения обусловлен внутренним трением в соединениях и в материале сооружения и аэродинамическим демпфированием, вызванным движением сооружения, в потоке сильного ветра $\psi_{общ}=\psi+\psi_{аэр}$. Правильное определение этого коэффициента имеет существенное значение при оценке расчетных амплитуд и усилий в сооружении.

Коэффициент диссипации при действии сил внутреннего трения $\psi=2\delta$, где δ — логарифмический декремент колебаний, зависит от вида напряженного состояния при колебаниях, от амплитуды динамического напряжения, от статического напряжения, от частоты колебаний и от количества циклов колебаний. Он может быть установлен только на основании экспериментальных данных. Для дымовых труб, мачт и башен имеются экспериментальные значения δ, однако, как правило, они соответствуют малым амплитудам и потому не могут рассматриваться в качестве расчетных значений. Рекомендуемые в СНиП расчетные значения δ соответствуют суммарному коэффициенту диссипации $\delta_{общ}$.

Силу аэродинамического демпфирования обычно представляют [31] в виде двух слагаемых, из которых первое действует в фазе с движением и пропорционально перемещению системы, другое сдвинуто относительно движения на $\pi/2$ и пропорционально скорости колебаний

$$F = H_a y + K_a \dot{y}. \tag{10.92}$$

Для высоких сооружений параметр H_a при первом слагаемом мал и им можно пренебречь. Параметр K_a при втором слагаемом зависит от формы поперечного сечения, от приведенной скорости, от амплитуды колебаний и от числа Рейнольдса.

Если коэффициент диссипации $\psi_{аэр}>0$, то он снижает амплитуду колебаний. При $\psi+\psi_{аэр}<0$ в сооружении наблюдаются нарастающие колебания.

Такие случаи аэродинамической неустойчивости довольно часто наблюдаются в гибких конструкциях с квадратным, прямоугольным и ромбовидным поперечными сечениями, в покрытых льдом проводах антенно-мачтовых систем и линий электропередачи, а также в конструктивных элементах (из уголков, швеллеров) траверс опор ЛЭП. Это явление принято называть галопированием, а сами колебания галопирующими. Такие колебания характерны для плохо обтекаемых упругих тел, имеющих аэродинамически неустойчивые поперечные сечения, и определяются формой и расположением тела относительно потока, его изгибной и крутильной жесткостями и величиной конструктивного демпфирования тела.

Механизм галопирования проводов линии электропередачи впервые был описан Ден-Гартогом [6]. Автоколебания такого типа, возникающие при обтекании призматических конструкций установившимся потоком, изучались С. Скратоном [31], Паркинсоном [28] и М. Новаком [26] на основе квазистационарной теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анапольская Л. Е., Гандин Л. С. Методика определения расчетных скоростей ветра. «Метеорология и гидрология», 1958, № 10.

2. Барштейн М. Ф. Динамический расчет высотных сооружений цилиндрической формы. В сб.: «Исследования по динамике сооружений». Госстройиздат, 1957.

3. Барштейн М. Ф. Воздействие ветра на высокие сооружения. «Строительная механика и расчет сооружений», 1959, № 1.

4. Барштейн М. Ф. Динамический расчет башен и мачт на действие ветра. «Строительная механика и расчет сооружений», 1967, № 4.

5. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. Госстройиздат, 1961.

6. Ден-Гартог. Механические колебания. Физматиздат, 1960.

7. Клепиков Л. В., Отставнов В. А. Определение нагрузок при расчете строительных конструкций. «Строительная механика и расчет сооружений», 1962, № 5.

8. Крейделл С. Случайные колебания. «Мир», 1967.
9. Колоушек В. Динамика строительных конструкций. Стройиздат, 1965.
10. Ламли Д., Пановский Г. Структура атмосферной турбулентности. «Мир», 1966.
11. Липпман Г. О применении статистических методов к проблеме бафтинга. В сб.: «Механика», № 5. ИЛ, 1953.
12. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. «Советское радио», 1969.
13. Монин А. С. Структура атмосферной турбулентности, теория вероятностей и ее приложение, т. III, вып. 3. Изд-во АН СССР, 1958.
14. Пугачев В. С. Теория случайных функций и их применение к задачам автоматического управления. Гостехиздат, 1957.
15. Рэлей. Теория звука, т. 1 и 2. Гостехиздат, 1940.
16. Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. Госстройиздат, 1960.
17. Фанг И. К статистическому расчету аэродинамических нагрузок. В сб.: «Механика», № 2, 1954.
18. Хинчин А. Я. Теория корреляции стационарных стохастических процессов. Успехи математических наук, вып. 5, 1938.
19. «Бюллетень строительной техники», 1965, № 4.
20. Указания по расчету на ветровую нагрузку технологического оборудования колонного типа и открытых этажерок. Стройиздат, 1965.
21. Davenport A. G. The application of statistical concetcs to the wind loading of structures. Proc. Inst. of Civ. Eng., v. 19, 1961.
22. Davenport A. G. Gust loading factors. J. of the Structural Division Proc. ASCE, 1967.
23. Davenport A. G., Vickery B. I. A comparison of theoretical and experimental determination of the response of elastic structures to turbulent flow. Proc. Symp. Wind on Structures. Ottawa, 1967.
24. Fung Y. C. Fluctuating lift and drag action on a cylinder in a flow at supercritical Reynolds numbers. J. of the Aerospace Sciens. v. 27. 1960.
25. Novák M. A. Statistical solution of the lateral vibrations of cylindrical structures in air-flow. Acta Technica, CSAV, 1967.
26. Novak M. Aeroelastic galloping of rigid and elastic bodies. The University of Western Ontario BLWT-3-68, 1968.
27. Normes pour les charges la mise en service et la surveillance des constructions. Societe Suisse des Ingenieurs et des Architectes, 1956.
28. Parkinson G. V. Aeroelastic galloping in one degree of freedom. Proc. Symp. Wind Effects on Buildings and Structures. NPL, Teddington, 1965.
29. Robson I. D. Introduction to random vibrations. 1964.
30. Roshko A. Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds numbers. J. of Fluid Mech., v. 10, 1961.
31. Scruton C. On the wind-excited oscillations of stacks, towers and masts. Proc. Symp. Wind Effects on Building and Structures. NPL, Teddington, 1965.
32. Thom H. Frequency of maximum wind speeds. Proc. ASCE, v. 80, 1954.

РАЗДЕЛ 11

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ВИСЯЧИХ СИСТЕМ

(В. А. Ивович)

Висячими системами принято называть конструкции, у которых основные несущие элементы испытывают только растяжение. Висячие системы по сравнению с другими видами конструкций обладают повышенной деформативностью. В связи с большой гибкостью роль нелинейности для них существенно возрастает. При действии внешней нагрузки на висячую конструкцию в ряде случаев возникает нелинейная связь между нагрузкой и перемещением. При малых колебаниях влияние нелинейных членов пренебрежимо мало. В этом случае можно ограничиваться рассмотрением линейных колебаний висячих систем. Ниже приводятся основные расчетные зависимости для случаев линейных и нелинейных колебаний висячих систем.

11.1. Собственные линейные поперечные колебания упругих элементов с неподвижными опорами

Струна. Вантовая конструкция в ряде случаев состоит из сильно натянутых нитей, имеющих незначительные статические прогибы. Расчетной схемой такой нити является струна, форма статического равновесия которой совпадает с прямой линией.

Круговая частота собственных линейных колебаний струны вычисляется по формуле

$$\omega_i = \frac{\alpha_i}{l}\sqrt{\frac{S}{m}}\,, \qquad (11.1)$$

где l — длина; S — натяжение; m — погонная масса струны; $\alpha_i = i\pi$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

На рис. 11.1 показаны три первые формы колебаний струны.

Пологая нить с опорами, расположенными на одном уровне. Приближенное значение круговой частоты собственных колебаний в плоскости провисания определяется формулами:

$$\left.\begin{aligned}\omega_i &= \sqrt{\frac{i^2\pi^2 S}{ml^2} + \frac{(8i^4\pi^4 + 1536)\,EFq_0^2}{3i^2\pi^2 ml^4}}\,, \quad (i = 1, 3, 5, \ldots);\\ \omega_i &= \sqrt{\frac{i^2\pi^2 S}{ml^2} + \frac{8\,EFi^2\pi^2 q_0^2}{3ml^4}}\,, \quad (i = 2, 4, 6, \ldots),\end{aligned}\right\} \qquad (11.2)$$

где E — модуль упругости; F — площадь поперечного сечения; q_0 — стрела провеса; S — предварительное натяжение; m — погонная масса; l — пролет.

При маятниковых колебаниях пологой нити вокруг оси (хорды), соединяющей точки ее подвеса (рис. 11.2), круговая частота собственных колебаний будет:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L_{\text{пр}}}}\,, \qquad (11.3)$$

где g — ускорение силы тяжести;

$$L_{\text{пр}} = -\frac{\int\limits_0^l v_0^2(x)\,dx}{\int\limits_0^l v_0(x)\,dx}$$ —

длина эквивалентного маятника; $v_0(x)$ — вертикальное перемещение нити от действия статической нагрузки.

В случае равномерно распределенной нагрузки

$$v_0(x) = \frac{4q_0}{l^2}(lx - x^2), \qquad (11.4)$$

где q_0 — стрела статического провеса ($q_0 < 0$); l — пролет нити. При этом $L_{\text{пр}} = -0{,}8q_0$.

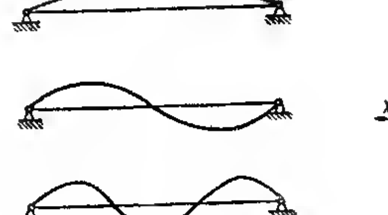


Рис. 11.1. Формы колебаний струны

Рис. 11.2. Расчетная схема маятниковых колебаний пологой нити

Пологая нить с опорами, расположенными на разных уровнях (рис. 11.3). Частота собственных колебаний в плоскости провисания определяется формулами:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{i^2\pi^2 S}{ml^2} + \frac{(8i^4\pi^4 + 1536)\,EFq_0^2\cos\alpha}{3i^2\pi^2 m}},$$

$$(i = 1, 3, 5, \ldots); \qquad (11.5)$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{i^2\pi^2 S}{ml^2} + \frac{8EFi^2\pi^2 q_0^2\cos\alpha}{3ml^4}},$$

$$(i = 2, 4, 6, \ldots), \qquad (11.6)$$

где EF — жесткость на растяжение; q_0 — стрела провеса, измеренная перпендикулярно хорде, соединяющей точки опорных закреплений; α — угол между линией, соединяющей точки закрепления нити к опорам, и горизонтальной осью; остальные обозначения такие же, как и выше.

Приведенные формулы справедливы для пологих нитей с разницей отметок не более $(1/8 \div 1/10)l$.

Плоская мембрана. Для прямоугольной мембраны круговая частота определяется по формуле

$$\omega_{ij} = \pi\sqrt{\frac{S}{m}\left(\frac{i^2}{l_x^2} + \frac{j^2}{l_y^2}\right)}, \qquad (11.7)$$

где, i, j — целые числа; l_x, l_y — размеры сторон мембраны; S — равномерное

натяжение, приходящееся на единицу длины контура мембраны; m — масса мембраны, отнесенная к единице поверхности.

Форма колебаний, соответствующая частоте (11.7)

$$\varphi_{ij} = \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi y}{l_y} . \quad (11.8)$$

Низшая форма колебаний — при $i=j=1$.

Для квадратной мембраны низшая частота (частота основного тона) определяется по формуле



$$\omega = \frac{\pi \sqrt{2}}{l_x} \sqrt{\frac{S}{m}} . \quad (11.9)$$

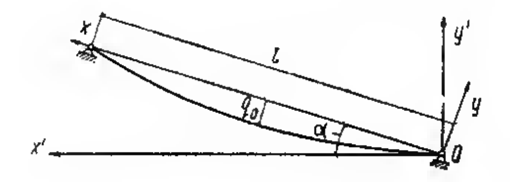


Рис. 11.3. Схема пологой нити с опорами, расположенными на разных уровнях

Частоты следующих двух высших тонов колебаний получаются, если взять в формуле (11.7) одно из чисел i, j равным 2, а другое равным 1. Для квадратной мембраны эти два тона имеют одинаковую частоту

$$\omega_{12} = \omega_{21} = \frac{\pi \sqrt{5}}{l_x} \sqrt{\frac{S}{m}} , \quad (11.10)$$

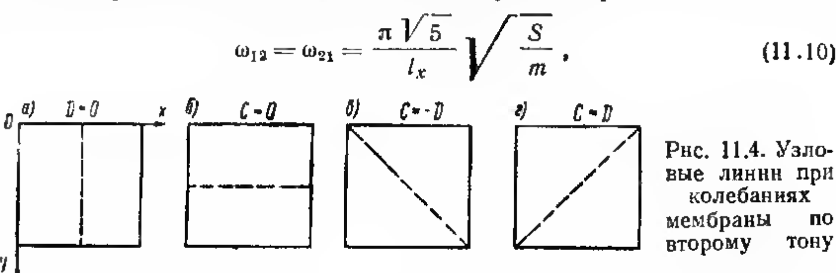


Рис. 11.4. Узловые линии при колебаниях мембраны по второму тону

но различный вид деформированной поверхности. На рис. 11.4,*а* и *б* показаны узловые линии этих двух форм колебаний. Так как их частоты одинаковы, то можно наложить эти две поверхности при любом соотношении их наибольших отклонений. Такая комбинация выражается суммой

$$w = C \sin \frac{2\pi x}{l_x} \sin \frac{\pi y}{l_y} + D \sin \frac{\pi x}{l_x} \sin \frac{2\pi y}{l_y} , \quad (11.11)$$

где C и D — произвольные величины. Четыре частных случая таких комбинированных колебаний показаны на рис. 11.4. Для случая, представленного на рис. 11.4, *а*, мембрана при колебаниях разделяется на две равные части вертикальной узловой линией ($D=0$). При $C=0$ мембрана разделяется горизонтальной узловой линией, показанной на рис. 11.4, *б*. При $C=D$ получим:

$$w = C\left(\sin \frac{2\pi x}{l_x} \sin \frac{\pi y}{l_x} + \sin \frac{\pi x}{l_x} \sin \frac{2\pi y}{l_x}\right) = 2C \sin \frac{\pi x}{l_x} \sin \frac{\pi y}{l_x}\left(\cos \frac{\pi x}{l_x} + \cos \frac{\pi y}{l_x}\right) . \quad (11.12)$$

Это выражение обращается в нуль, когда

$$\sin \frac{\pi x}{l_x} = 0$$

или

$$\sin = \frac{\pi y}{l_x} = 0,$$

а также, когда

$$\cos \frac{\pi x}{l_x} + \cos \frac{\pi y}{l_x} = 0.$$

Первые два уравнения дают стороны контура. Из третьего находим

$$\frac{\pi x}{l_x} = \pi - \frac{\pi y}{l_x} \text{ или } x + y = l_x.$$

Последнее уравнение есть уравнение одной из диагоналей квадрата, показанной на рис. 11.4, *г*. На рис. 11.4, *в* представлен случай, когда $C = -D$.

Частота собственных колебаний круговой мембраны

$$\omega_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{r} \sqrt{\frac{S}{m}},$$

$$(i = 0, 1, 2, 3, \ldots; \; j = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (11.13)$$

где S — равномерное натяжение на единицу длины контура мембраны; m — масса мембраны, отнесенная к единице поверхности; r — радиус мембраны.

Индексы i и j обозначают соответственно число узловых диаметров и число узловых кругов при колебаниях мембраны. Значения коэффициентов α_{ij} даны в табл. 11.1.

Таблица 11.1

Значения коэффициентов α_{ij}

j	i							
	0	1	2	3	4	5	6	7
1	2,40483	3,83171	5,13562	6,38016	7,58834	8,77148	9,93611	11,08637
2	5,52008	7,01559	8,41724	9,76102	11,61984	12,33860	13,58929	14,82127
3	8,65373	10,17347	11,61984	13,01520	14,37254	15,70017	17,00382	18,28758
4	11,79153	13,32369	14,79595	16,22347	17,61597	18,98013	20,32079	21,64154
5	14,93092	16,47063	17,95982	19,40942	20,82693	22,21780	23,58608	24,93493
6	18,07106	19,61586	21,11700	22,58273	24,01902	25,43034	26,82015	28,19119
7	21,21164	22,76008	24,27011	25,74817	27,19909	28,62662	30,03372	31,42279
8	24,35247	25,90367	27,42057	28,90835	30,37101	31,81172	33,23304	34,63709
9	27,49348	29,04683	30,56920	32,06485	33,53714	34,98878	36,42202	37,83872

На рис. 11.5 представлены некоторые формы колебаний круговой мембраны (пунктиром указаны узловые окружности и узловые диаметры).

Для мембран с контуром, близким к круговому, основная частота колебаний близка к основной частоте колебаний круговой мембраны, имеющей ту же площадь.

Формула, определяющая основную частоту колебаний мембран различной формы в плане, имеет вид:

$$\omega = k \sqrt{\frac{S}{mA}}, \qquad (11.14)$$

где A — площадь мембраны.

В табл. 11.2 приведены значения коэффициента k.

Таблица 11.2

Значения коэффициента k

Форма мембраны	k	Форма мембраны	k
Круг	$2{,}404\sqrt{\pi}=4{,}261$	Равносторонний треугольник	$2\pi\sqrt{\operatorname{tg}30^\circ}=4{,}774$
Квадрат	$\pi\sqrt{2}=4{,}443$		
Четверть круга . .	$\frac{5{,}135}{2}\sqrt{\pi}=4{,}551$	Полукруг	$3{,}832\sqrt{\frac{\pi}{2}}=$ $=4{,}803$
Круговой сектор с центральным углом 60°	$6{,}379\sqrt{\frac{\pi}{6}}=4{,}616$	Прямоугольник с отношением сторон 2 : 1	$\pi\sqrt{\frac{5}{2}}=4{,}967$
Прямоугольник с отношением сторон 3 : 2	$\pi\sqrt{\frac{13}{6}}=4{,}624$	То же, 3 : 1 . . .	$\pi\sqrt{\frac{10}{3}}=5{,}736$

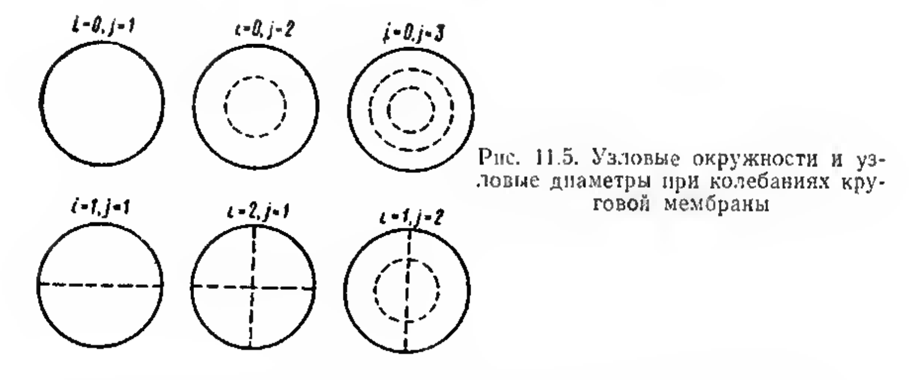


Рис. 11.5. Узловые окружности и узловые диаметры при колебаниях круговой мембраны

Пологая мембрана. Основная частота собственных колебаний прямоугольной мембраны выражается формулой

$$\omega=\sqrt{\frac{\pi^2 S}{m}\left(\frac{1}{l_x^2}+\frac{1}{l_y^2}\right)+3q_0^2\beta}\,, \qquad (11.15)$$

где

$$\beta=\frac{Eh\pi^4}{16m(1-\nu^2)}\left[(3-\nu^2)\left(\frac{1}{l_x^4}+\frac{1}{l_y^4}\right)+\frac{4\nu}{l_x^2\,l_y^2}\right];$$

S — предварительное натяжение, отнесенное к единице длины контура мембраны; q_0 — стрела провеса, вызванная действием статической нагрузки [2, 4]; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости материала; h — толщина мембраны.

Основная частота собственных колебаний круговой мембраны определяется зависимостью

$$\omega=\sqrt{\frac{5{,}72S}{mr^2}+3q_0^2\beta}\,, \qquad (11.16)$$

где r — радиус мембраны;

$$\beta = \frac{5,72Eh\,(408,6 - 174,8\nu)}{64 \cdot 9\,(1-\nu)\,mr^4} - \frac{1,09Eh}{mr^4};$$

буквенные обозначения остальных величин совпадают с обозначениями, принятыми в формулах (11.13) и (11.15).

Вантовая сетка. Частоты собственных колебаний сетки с малыми размерами ячеек, образованных взаимно перпендикулярными нитями, расположенными на одинаковых расстояниях друг от друга и равномерно натянутых, могут быть найдены по соответствующим формулам для мембраны: (11.7), (11.13)—(11.16).

При подсчете коэффициента β для сетки величину h принимают равной суммарной площади поперечных сечений нитей, отнесенной к единице длины опорного контура, а коэффициент Пуассона ν принимается равным нулю.

На практике натяжение нитей может быть неравномерным по контуру. Если обозначить через S_x и S_y натяжения нитей в направлениях осей x и y, приходящиеся на единицу длины контура, то формулы (11.7) и (11.15) преобразуются к виду:

для плоской прямоугольной сетки

$$\omega_{ij} = \sqrt{\frac{\pi^2}{m}\left(\frac{S_x i^2}{l_x^2} + \frac{S_y j^2}{l_y^2}\right)}, \tag{11.17}$$

для пологой прямоугольной сетки

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^2}{m}\left(\frac{S_x}{l_x^2} + \frac{S_y}{l_y^2}\right) + 3q_0^2\beta}, \tag{11.18}$$

где m — масса на единицу площади сетки; q_0 — стрела статического провеса; β — коэффициент, определяемый по формуле (11.15) (при $\nu = 0$).

В случае собственных колебаний сетки, у которой размеры ячеек велики и соизмеримы с размерами самой сетки, или при произвольном строении ячеек рекомендуется площадь сетки разбивать на участки с центрами в узлах. В каждом i-м узле сосредоточивается условная масса μ_i этого участка $\mu_i = mA_i$, где m — масса единицы площади сетки с покрытием; A_i — площадь i-го участка сетки.

Рассматривая движение всех участков сетки, приходим к системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{11}\mu_1\ddot{w}_1 + \delta_{12}\mu_2\ddot{w}_2 + \cdots + \delta_{1n}\mu_n\ddot{w}_n + w_1 = 0; \\ &\delta_{21}\mu_1\ddot{w}_1 + \delta_{22}\mu_2\ddot{w}_2 + \cdots + \delta_{2n}\mu_n\ddot{w}_n + w_2 = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\delta_{n1}\mu_1\ddot{w}_1 + \delta_{n2}\mu_2\ddot{w}_2 + \cdots + \delta_{nn}\mu_n\ddot{w}_n + w_n = 0, \end{aligned}\right\} \tag{11.19}$$

где δ_{ik} — единичное перемещение узла i, вызванное силой, равной единице и приложенной в узле k; w_i — поперечное перемещение i-го узла сетки; n — общее число узлов сетки.

Принимая частное решение (11.19) в виде:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= A_1 \sin(\omega t + \Psi_1); \\ w_2 &= A_2 \sin(\omega t + \Psi_2); \\ &\ldots\ldots\ldots \\ w_n &= A_n \sin(\omega t + \Psi_n) \end{aligned}\right\} \tag{11.20}$$

и подставляя (11.20) в (11.19), приходим к системе алгебраических уравнений. Эти уравнения дают отличные от нуля значения неизвестных A_1, A_2, ...

..., A_n при условии, что определитель системы равен нулю. Приравнивая этот определитель нулю, получим уравнение n-й степени относительно ω^2, корни которого определяют частоты собственных колебаний. Каждому из этих корней соответствует определенная форма собственных колебаний.

Для упрощения расчетов следует пользоваться методикой понижения порядка системы дифференциальных уравнений путем разбивки площади сетки на симметричные участки [5, 7].

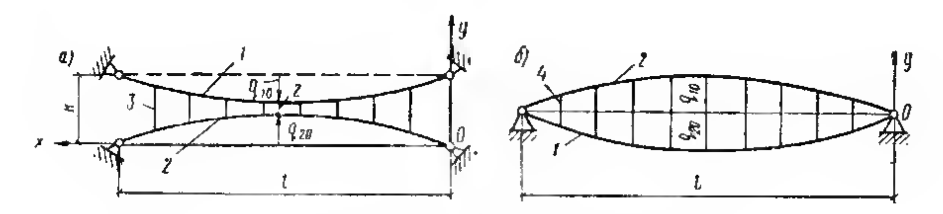


Рис. 11.6. Схемы ферм из тросов

а — ферма с подвесками; *б* — ферма с распорками; *1* — несущий трос; *2* — напрягающий трос; *3* — подвеска; *4* — распорка

Вантовая ферма. Частоты собственных колебаний вантовых ферм, образованных пологими предварительно напряженными тросами, между которыми на одинаковых расстояниях друг от друга закреплены недеформируемые распорки или подвески (рис. 11.6), вычисляются по формулам

$$\omega_i = \sqrt{\frac{(S_1+S_2)\,i^2\pi^2}{ml^2} + \frac{E_1F_1\,q_{10}^2\,(8i^4\pi^4+1536)}{3i^2\pi^2 ml^4} + \frac{E_2F_2\,q_{20}^2\,(8i^4\pi^4+1536)}{3i^2\pi^2 ml^4}},$$

$$(i = 1, 3, 5, \ldots); \qquad (11.21)$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{(S_1+S_2)\,i^2\pi^2}{ml^2} + \frac{8E_1F_1\,i^2\pi^2 q_{10}^2}{3ml^4} + \frac{8E_2F_2\,i^2\pi^2 q_{20}^2}{3ml^4}}, \qquad (11.22)$$

$$(i = 2, 4, 6, \ldots),$$

где S — предварительное натяжение пояса фермы; E_1F_1, E_2F_2 — жесткости на растяжение соответственно верхнего и нижнего поясов фермы; l — пролет; q_0 — стрела провеса пояса фермы; m — масса, приходящаяся на единицу длины фермы.

Индексы 1 и 2 относятся соответственно к буквенным обозначениям несущего и напрягающего поясов фермы. Индекс i, приписанный к круговой частоте в формулах (11.21) и (11.22), представляет сравнительно небольшое число, меньшее общего числа распорок фермы.

11.2. Собственные нелинейные поперечные колебания

Струна с неподвижными опорами. Нормальной формой колебаний струны является синусоида

$$v = f_i(t)\sin\frac{i\pi x}{l}, \qquad (11.23)$$

где $f_i(t)$ — обобщенная координата; l — пролет; i — число полуволн.

Частоты собственных колебаний струны зависят от амплитуды начального отклонения $f_i(0)=A_i$ и выражаются формулой

$$\bar{\omega}_i=\frac{\pi\sqrt{\omega_i^2+\beta_i A_i^2}}{2K}. \tag{11.24}$$

Здесь **K** — полный эллиптический интеграл [8, 9] 1-го рода с модулем

$$k_i=\sqrt{\frac{\beta_i A_i^2}{2\left(\omega_i^2+\beta_i A_i^2\right)}}; \tag{11.25}$$

$$\beta_i=\frac{i^4\pi^4 EF}{4ml^4}; \tag{11.26}$$

ω_i — частота линейных колебаний, вычисляемая по (11.1).

При $\frac{\beta_i A_i^2}{\omega_i^2}\ll 1$ справедливо приближенное равенство

$$\bar{\omega}_i=\sqrt{\omega_i^2+\frac{3\beta_i A_i^2}{4}}. \tag{11.27}$$



Рис. 11.7. Струна, одна из опор которой обладает упругой податливостью в осевом направлении

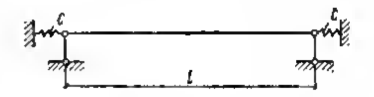


Рис. 11.8. Струна, обе опоры которой упруго податливы относительно продольных перемещений

Струна, одна опора которой неподвижна, а другая упруго податлива относительно продольных перемещений (рис. 11.7). Коэффициентом нелинейной упругости β_i будет:

$$\beta_i=\frac{i^4\pi^4 c}{4ml^3}, \tag{11.28}$$

где c — жесткость упругой опоры.

Частота собственных колебаний $\bar{\omega}_i$ вычисляется по формулам (11.25) или (11.27) с учетом зависимостей (11.28) и (11.1).

Струна, обе опоры которой упруго податливы относительно продольных перемещений (рис. 11.8). Для рассматриваемого случая

$$\beta=\frac{\pi^4 c}{8ml^3}, \tag{11.29}$$

где c — коэффициент жесткости опорного закрепления.

Частота основного тона вычисляется по формуле (11.25) или (11.27).

Струна с противовесом (рис. 11.9). Частота собственных колебаний

$$\bar{\omega}_i=\frac{\pi\omega_i}{2E\sqrt{1+2\mu_i A_i^2}}, \tag{11.30}$$

где Е — эллиптический интеграл 2-го рода с модулем

$$k_i = \sqrt{\frac{2\mu_i A_i^2}{1+2\mu_i A_i^2}};\ \mu_i = \frac{i^4\pi^4 M}{4ml^3};$$

M — сосредоточенная масса на подвижной опоре; A_i — амплитуда колебаний струны. При $2\mu_i A_i^2 \leqslant 1$ величина $\bar{\omega}_i$ может быть найдена по формуле

$$\bar{\omega}_i = \frac{\omega_i}{\sqrt{1+\mu_i A_i^2}}. \quad (11.31)$$



Рис. 11.9. Схема струны с противовесом

Пологая нить с неподвижными опорами, расположенными на одном уровне. Основная частота собственных колебаний (в плоскости провисания) нити с амплитудой начального отклонения A определяется формулой

$$\bar{\omega} = \frac{\pi\sqrt{\Lambda}}{K}, \quad (11.32)$$

где K — полный эллиптический интеграл 1-го рода с модулем

$$\left.\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4\Lambda}}; \\ \Lambda &= \sqrt{9m^2 + n^2}. \end{aligned}\right\} \quad (11.33)$$

Здесь e_2 — действительный корень уравнения $4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$; m, n — вещественная и мнимая части комплексносопряженных корней этого уравнения: $e_1 = m + nj$; $e_3 = m - nj$; j — мнимая единица.

Коэффициенты g_2 и g_3 уравнения (11.33) имеют вид:

$$g_2 = -\beta h_0 + \frac{\omega^2}{12};\ g_3 = \frac{\omega^6}{6^3} + \frac{h_0\omega^2\beta}{6} - \frac{h_0\lambda^8}{18},$$

где

$$\left.\begin{aligned} h_0 &= \frac{\omega^2 A^2}{2} + \frac{\lambda A^3}{3} + \frac{\beta A^4}{4}; \\ \lambda &= \frac{24\pi q_0 EF}{ml^4};\ \beta = \frac{EF\pi^4}{4ml^4}; \end{aligned}\right. \quad (11.34)$$

ω вычисляется по формуле (11.2) при $i=1$.

Для маятниковых колебаний. Частота колебаний нити вокруг оси, соединяющей точки ее подвеса (см. рис. 11.2), вычисляется по формуле

$$\bar{\omega} = \frac{\pi}{2K\sqrt{\frac{L_{\text{пр}}}{g}}}. \quad (11.35)$$

Здесь g — ускорение силы тяжести; $L_{пр}$ — длина эквивалентного маятника [см. формулу (11.3)]; $\mathbf{K}$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $\mathbf{K} = \sin \alpha_0/2$; α_0 — угол начального отклонения плоскости провисания нити от вертикали.

Плоская мембрана, неподвижно закрепленная на прямоугольном контуре. Поперечные перемещения мембраны описываются функцией

$$w = f_{ij}(t) \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{j\pi y}{l_y}. \tag{11.36}$$

Частоты собственных колебаний с амплитудой начального отклонения мембраны $f_{ij}(0) = A_{ij}$ определяются по формуле

$$\bar{\omega}_{ij} = \frac{\pi \sqrt{\omega_{ij}^2 + \beta_{ij} A_{ij}^2}}{2\mathbf{K}} \tag{11.37}$$

Здесь $\mathbf{K}$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода с модулем

$$k_{ij} = \sqrt{\frac{\beta_{ij} A_{ij}^2}{2\left(\omega_{ij}^2 + \beta_{ij} A_{ij}^2\right)}}; \tag{11.38}$$

$$\beta_{ij} = \frac{Eh\pi^4}{16m(1-\nu^2)} \left[(3-\nu^2)\left(\frac{i^4}{l_x^4} + \frac{j^4}{l_y^4}\right) + \frac{4\nu i^2 j^2}{l_x^2 l_y^2}\right]; \tag{11.39}$$

ω_{ij} — вычисляется по (11.7).

При $\beta_{ij} A_{ij}^2 / \omega_{ij}^2 \ll 1$

$$\bar{\omega}_{ij} = \sqrt{\omega_{ij}^2 + \frac{3\beta_{ij} A_{ij}^2}{4}}. \tag{11.40}$$

Плоская сетка, неподвижно закрепленная на круговом опорном контуре. Основная частота вычисляется по формуле

$$\bar{\omega} = \frac{\pi \sqrt{\omega^2 + \beta A^2}}{2\mathbf{K}}, \tag{11.41}$$

где $\mathbf{K}$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода с модулем

$$k = \sqrt{\frac{\beta A^2}{2(\omega^2 + \beta A^2)}}.$$

β — коэффициент, определяемый формулой (11.16) при $\nu = 0$ и величиной h, вычисляемой с учетом приведенных ранее указаний; A — амплитуда колебаний в центре сетки; $\omega = \sqrt{5{,}72\ S/mr^2}$.

Пологая мембрана, пологая сетка и вантовая ферма с неподвижными опорами. В случае прямоугольной мембраны и сетки основная частота собственных колебаний вычисляется по формуле (11.32), в которой следует положить:

$$\lambda = 3\beta q_0;$$

$$\beta = \frac{Eh\pi^4}{16m(1-\nu)^2} \left[(3-\nu^2)\left(\frac{1}{l_x^4} + \frac{1}{l_y^4}\right) + \frac{4\nu}{l_x^2 l_y^2}\right], \tag{11.42}$$

где q_0 — стрела статического провеса.

Для сетки следует положить $\nu = 0$. Приведенная толщина h определяется в соответствии с указаниями 11.1.

Частота линейных колебаний ω определяется по формулам (11.15) и (11.18).

Для мембраны и круговой сетки с неподвижными опорами основная частота собственных колебаний определяется по формулам (11.32) и (11.16) при $\lambda = 3\beta q_0$,

$$\beta = \frac{5{,}72Eh\,(408{,}6 - 174{,}8\nu)}{64\cdot 9\,(1-\nu)\,mr^4} - \frac{1{,}09Eh}{mr^4}. \qquad (11.43)$$

Для сетки следует положить $\nu = 0$, а величину h принять в соответствии с указаниями 11.1.

Для вантовой формы (см. рис. 11.6) основная частота собственных колебаний определяется по формулам (11.16) и (11.32), в которых:

$$\lambda = \frac{24E_1F_1q_{10}\pi}{ml^4} + \frac{24E_2F_2q_{20}\pi}{ml^4}; \qquad (11.44)$$

$$\beta = \frac{\pi^4E_1F_1}{4ml^4} + \frac{\pi^4E_2F_2}{4ml^4}.$$

Обозначения величин, входящих в формулы (11.44), такие же как и в 12.1.

Пологая мембрана и пологая сетка с опорами, неподвижными относительно поперечных перемещений и упруго податливыми относительно тангенциальных перемещений. Основная частота собственных колебаний вычисляется по формуле (11.32), при использовании которой следует положить:

а) в случае прямоугольной мембраны и сетки:

$$\lambda = 3\beta q_0,$$

$$\beta = \frac{Eh\pi^4}{8m}\left\{\frac{\frac{1}{l_x^4}\left(1+\frac{2Eh}{c_y\,l_y}\right)+\frac{2\nu}{l_x^2\,l_y^2}+\frac{1}{l_y^4}\left(1+\frac{2Eh}{c_x\,l_x}\right)}{\left[\left(1+\frac{2Eh}{c_y\,l_y}\right)\left(1+\frac{2Eh}{c_x\,l_x}\right)-\nu^2\right]} + \frac{1}{2l_x^4}+\frac{1}{2l_y^4}\right\}, \qquad (11.45)$$

где c_x, c_y — жесткости опорных закреплений в направлении осей x и y, отнесенные к единице длины контура мембраны или сетки; частота собственных линейных колебаний ω вычисляется по формуле (11.15); для сетки следует положить $\nu = 0$ и принять h согласно п. 11.1;

б) в случае мембраны и сетки с круговым очертанием в плане:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = 3\beta q_0,\\ \beta = 5{,}72\left\{\dfrac{c_r\,(408{,}6 - 174{,}8\nu)}{mr^4 64\cdot 18\left[1+\dfrac{c_r}{2Eh}(1-\nu)\right]} - \dfrac{0{,}115Eh}{mr^4\left[1+\dfrac{c_r}{2Eh}(1-\nu)\right]}\right\} - \dfrac{1{,}09Eh}{mr^4},\end{array}\right\} \qquad (11.46)$$

где c_r — коэффициент жесткости опорного закрепления в направлении радиуса, отнесенный к единице длины контура.

Частота собственных линейных колебаний ω вычисляется по формуле (11.16).

Для сетки следует положить $\nu=0$ и принять h согласно п. 11.1.

Плоская мембрана и плоская сетка с опорами, неподвижными относительно поперечных перемещений и упруго податливыми относительно тангенциальных перемещений. Основная частота собственных колебаний вычисляется по формуле (11.25) или (11.27), при использовании которых следует положить:

а) в случае прямоугольной мембраны и сетки

$$\beta=\frac{Eh\pi^4}{8m}\left\{\frac{\frac{1}{l_x^4}\left(1+\frac{2Eh}{c_y l_y}\right)+\frac{2\nu}{l_x^2 l_y^2}+\frac{1}{l_y^4}\left(1+\frac{2Eh}{c_x l_x}\right)}{\left[\left(1+\frac{2Eh}{c_y l_y}\right)\left(1+\frac{2Eh}{c_x l_x}\right)-\nu^2\right]}+\frac{1}{2l_x^4}+\frac{1}{2l_y^4}\right\}; \qquad (11.47)$$

б) в случае мембраны и сетки с круговым очертанием в плане

$$\beta=5,72\left\{\frac{c_r(408,6-174,8\nu)}{mr^4 64\cdot 18\left[1+\frac{c_r}{2Eh}(1-\nu)\right]}-\frac{0,115Eh}{mr^4\left[1+\frac{c_r}{2Eh}(1-\nu)\right]}\right\}-\frac{1,09Eh}{mr^4}. \qquad (11.48)$$

В формулах (11.47) и (11.48) для сетки следует положить $\nu=0$ и принять приведенную толщину h согласно п. 11.1.

11.3. Вынужденные нелинейные поперечные колебания при гармоническом воздействии

Струна с неподвижными опорами. Интегро-дифференциальное уравнение вынужденных поперечных колебаний струны имеет вид:

$$\left[S+\frac{EF}{2l}\int_0^l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\varkappa'\frac{\partial y}{\partial t}-m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-F(x,t), \qquad (11.49)$$

где $F(x, t)=b(t)\overline{F}(x)$ — погонная поперечная нагрузка; $\varkappa'$ — коэффициент вязкого сопротивления.

Применение метода Галеркина в случае, когда поперечное перемещение представляется в форме

$$y=f(t)\sin\frac{\pi x}{l} \qquad (11.50)$$

приводит к нелинейному дифференциальному уравнению

$$\ddot{f}+\varkappa\dot{f}+\omega^2 f+\beta f^3=P\sin\Omega t, \qquad (11.51)$$

где

$$P = \frac{\int\limits_0^l \overline{F}(x)\sin\frac{\pi x}{l}\,dx}{m\int\limits_0^l \sin^2\frac{\pi x}{l}\,dx}; \qquad \varkappa = \frac{\varkappa'}{m}.$$

Коэффициенты ω и β определяются формулами (11.1) и (11.26). Решением уравнения (11.51) будет:

$$f = A\sin(\Omega t - \psi). \tag{11.52}$$

Частота возмущения связана с амплитудой установившихся колебаний зависимостью

$$\Omega = \sqrt{b \pm \sqrt{b^2 - c}}, \tag{11.53}$$

где

$$b = \omega^2 + \frac{3\beta A^2}{4} - \frac{\varkappa^2}{2};$$

$$c = \left(\omega^2 + \frac{3\beta A^2}{4}\right)^2 - \frac{P^2}{A^2}.$$

Сдвиг фаз между возмущающей силой и смещением определяется из формулы

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\varkappa\Omega}{-\Omega^2 + \omega^2 + \frac{3\beta A^2}{4}}. \tag{11.54}$$

Струна, у которой обе опоры неподвижны относительно поперечных перемещений и упруго податливы относительно продольных перемещений. В рассматриваемом случае (см. рис. 11.8) амплитуды и фазы могут быть вычислены по формулам (11.53) и (11.54) с учетом соответствующих значений ω, β и P [см. формулы (11.1), (11.29) и (11.51)].

Струна с противовесом (см. рис. 11.9). Амплитуда и фаза могут быть определены по формулам

$$\Omega = \sqrt{\frac{a\omega^2 - d \pm \sqrt{(a\omega^2 - d)^2 - a^2(\omega^4 - P^2/A^2)}}{a}}; \tag{11.55}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\varkappa\Omega}{-\Omega^2 + \omega^2 - \mu A^2\Omega^2}, \tag{11.56}$$

где $a = 1 + \mu A^2$; $d = \varkappa^2/2$.

Коэффициент μ вычисляется по формуле (11.30), а величина ω — по формуле (11.1) при $i = 1$.

Струна, у которой одна опора неподвижна, а другая упруго податлива относительно продольных перемещений (см. рис. 11.7). Амплитуда и фаза могут быть найдены по формулам (11.53) и (11.54), если коэффициент β принять в виде

$$\beta = \frac{\pi^4 c}{4ml^3}. \tag{11.57}$$

Поперечные колебания пологой нити с неподвижными опорами в плос-

кости провисания. Динамическое перемещение, отсчитываемое от положения статического равновесия, принимается в форме (11.50).

Обобщенная координата

$$f = C_0 + A \sin(\Omega t - \psi). \tag{11.58}$$

Здесь

$$A = \sqrt{\frac{-2\left(\omega^2 C_0 + \lambda C_0^2 + \beta C_0^3\right)}{\lambda + 3\beta C_0}}; \tag{11.59}$$

$$\Omega = \sqrt{b \pm \sqrt{b^2 - c}}, \tag{11.60}$$

где

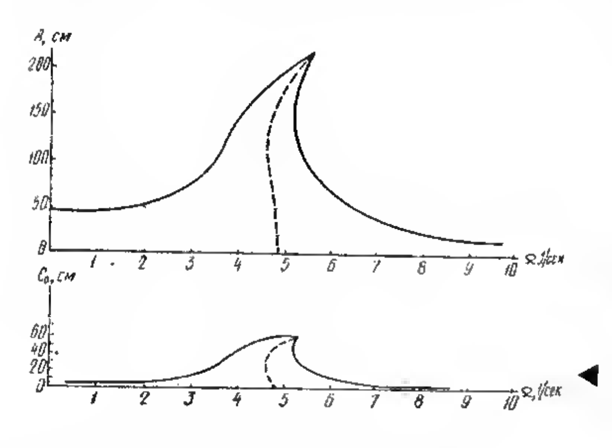
$$b = -\frac{\varkappa^2}{2} + \omega^2 + 2\lambda C_0 + 3\beta C_0^2 + \frac{3}{4}\beta A^2;$$

$$c = \left(\omega^2 + 2\lambda C_0 + 3\beta C_0^2 + \frac{3\beta A^2}{4}\right)^2 - \frac{P^2}{A^2}.$$

Зависимость для сдвига фаз имеет вид:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\varkappa\Omega}{-\Omega^2 + \omega^2 + 2\lambda C_0 + \beta\left(3C_0^2 + \frac{3A^2}{4}\right)}. \tag{11.61}$$

Величины λ, β и ω вычисляются по формулам (11.2) и (11.34) (при $i=1$). Приведенные формулы позволяют построить зависимости $C_0(\Omega)$, $A(\Omega)$ и



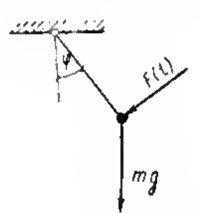


Рис. 11.11. Расчетная схема маятниковых колебаний нити

◀ Рис. 11.10. Резонансные кривые $A(\Omega)$ и $C_0(\Omega)$ для пологой нити

$\psi(\Omega)$. Задаваясь значениями C_0, можно найти амплитуду колебаний A по формуле (11.59), а затем Ω и ψ — по формулам (11.60) и (11.61).

На рис. 11.10 приведен график амплитудно-частотной зависимости, являющийся характерным для нелинейных колебаний пологих элементов.

Маятниковые колебания пологой нити (рис. 11.11). Амплитуда и фаза определяются по формулам (11.53) и (11.54) при

$$\beta = -\frac{g}{6L_{\text{пр}}}; \qquad P = \frac{F(t)}{mL_{\text{пр}}}; \tag{11.62}$$

ω определяется формулой (11.3).

Вынужденные колебания плоских прямоугольных мембран и прямоугольных сеток с малыми размерами ячеек. Поперечные перемещения мембраны и сетки с неподвижно закрепленными кромками представляются функцией (11.37).

Зависимость обобщенной координаты от времени имеет вид (11.52). Амплитудно-частотная зависимость определяется выражением (11.53), в котором ω принимают по формуле (11.7) или (11.17), β — по формуле (11.15) (для сетки $\nu=0$). Сдвиг фаз вычисляют по формуле (11.54).

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. ГИТТЛ, 1956.
2. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. Техтеоретиздат, 1956.
3. Гольденблат И. И. Динамическая устойчивость сооружений. Стройиздат, 1948.
4. Коренев Б. Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. Физматгиз, 1960.
5. Лилеев А. Ф., Селезнева Е. Н. Методы расчета пространственных вантовых систем. Стройиздат, 1964.
6. Попов Н. Н., Расторгуев Б. С. Динамический расчет висячих конструкций. Стройиздат, 1966.
7. Рабинович И. М., Синицын А. П., Лужин О. В., Теренин Б. М. Расчет сооружений на импульсивные воздействия. Стройиздат, 1970.
8. Сегал Б. И., Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1948.
9. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. ОНТИ, М. — Л., 1936.
10. Смирнов В. А. Висячие мосты больших пролетов. «Высшая школа», 1970.

РАЗДЕЛ 12

РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ НА ПОДВИЖНЫЕ НАГРУЗКИ

(А. П. Филиппов)

Изучение колебаний конструкций под действием движущихся нагрузок имеет большое практическое значение. В настоящее время нагрузки и скорости движения непрерывно возрастают, в связи с чем увеличиваются и динамические воздействия на конструкции.

В расчетах конструкций на действие подвижных нагрузок наибольший интерес представляют два случая: расчет опертых балок (однопролетных и неразрезных) и расчет балок, лежащих на сплошном упругом основании.

Задачи о движении силы или груза по опертым балкам, аркам и плитам решались различными способами в работах [1, 3—13, 16, 18—21]. В общем случае, когда учитывается инерция и балки и груза, а также другие факторы, точное решение этой задачи может быть получено с помощью весьма сложных алгоритмов, применение которых в практических расчетах или в исследовательских целях возможно лишь при использовании ЭВМ. Результаты натурных испытаний мостов, а также испытаний балочных моделей под действием подвижных нагрузок приведены в работе [2].

Динамическое воздействие подвижной нагрузки на балки, лежащие на упругом основании, изучалось главным образом при допущении, что упругое основание подчиняется гипотезе Винклера о пропорциональности реактивного давления прогибу балки (см., например, [4]). Однако для винклеровского основания критические скорости движения оказываются весьма значительными, и при обычных для практики скоростях динамический эффект очень мал. В связи с этим вызывает интерес изучение движения масс и возмущающих сил по балкам и пластинам, лежащим на инерционном упругом полупространстве.

Исследования [14, 15, 17, 18] показали, что динамический эффект может быть существенным даже при достигаемых в настоящее время скоростях, причем инерционность полупространства оказывает большое влияние на напряженно-деформированное состояние балки.

Здесь приводятся данные по определению коэффициентов динамичности прогибов и напряжений для различных случаев движения груза по балкам[1].

12.1. Динамическое воздействие груза, движущегося с постоянной скоростью, на весомые балки конечной длины

Уравнение поперечных колебаний балки переменного сечения имеет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 z_д}{\partial x^2}\right)+\rho F\,\frac{\partial^2 z_д}{\partial t^2}=f(x,\,t), \qquad (12.1)$$

где $z_д$ — динамический прогиб; $EJ(x)$ — жесткость балки; $F(x)$ — площадь поперечного сечения; $\rho(x)$ — плотность материала балки; $f(x,\,t)$ — нагрузка, действующая на балку.

[1] Эти результаты получены А. П. Филипповым совместно с С. С. Кохманюком. Программы для расчета имеются в Харьковском филиале Института механики АН УССР.

В случае движения сосредоточенного груза со скоростью v, $f(x, t)$ всюду равна нулю, за исключением точки приложения нагрузки (рис. 12.1) $\eta = vt$, где давление на балку будет:

$$P_д = P_0\left(1 - \frac{1}{g}\cdot\frac{d^2 z_д}{dt^2}\right) + G\sin\omega t. \qquad (12.2)$$

Здесь P_0 — вес движущегося груза; $G\sin\omega t$ — вертикальная составляющая инерционной силы, создаваемой неуравновешенной массой.

Решение уравнения (12.1) для свободно опертого стержня записывается в виде:

$$z_д(t, x) = z_0\sum_i q_i(t)\sin\frac{i\pi x}{l} = z_0 z(t, x), \qquad (12.3)$$

где $z_0 = \dfrac{2P_0 l^3}{\pi^4 EJ}$; z — коэффициент динамичности для прогибов.

В случае балки постоянного сечения при постоянных EJ, ρ и F решение уравнения (12.1) удобно находить методом обобщенных координат или методом интегральных уравнений.

По методу обобщенных координат [19] прогибы $z_д$ определяются с достаточной точностью, однако этот метод не позволяет найти напряжения. Коэффициенты динамичности для прогибов подсчитываются при различных значениях безразмерных параметров

$$\alpha = \frac{vl}{\pi\sqrt{\dfrac{EJ}{F\rho}}} \quad и \quad \beta = \frac{P_0}{F\rho lg}.$$

Для программирования на ЭЦВМ более удобен метод интегральных уравнений [19], который позволяет определять динамические прогибы и напряжения.

Уравнения Лагранжа для обобщенной координаты q_i после перехода к переменной η будут:

$$\frac{d^2 q_i(\eta)}{d\eta^2} + k_i^2 q_i(\eta) = \frac{\pi^2}{(\alpha l)^2}\left[1 - 2\alpha^2\beta\frac{l^2}{\pi^2}\cdot\frac{d^2 z(\eta, \eta)}{d\eta^2} + \frac{G}{P_0}\sin\frac{\nu\pi\eta}{l}\right]\sin\frac{i\pi\eta}{l} = f_i(\eta), \quad (i = 1, 2, \ldots), \qquad (12.4)$$

Рис. 12.1

где

$$k_i^2 = \frac{\pi^2 i^4}{\alpha^2 l^2}; \quad \nu = \frac{\omega l}{\pi v}. \qquad (12.5)$$

Переход к интегральному уравнению производится следующим образом. Вводим новую функцию

$$U(\eta) = l^2\frac{d^2 z(\eta, \eta)}{d\eta^2}. \qquad (12.6)$$

Общий интеграл уравнений (12.4), (12.6) будет:

$$q_i(\eta) = A_i(b)\cos k_i\eta + B_i(b)\sin k_i\eta + \frac{1}{k_i}\int_b^\eta f_i(\lambda)\sin k_i(\eta - \lambda)\,d\lambda;$$

$$z(\eta, \eta) = K_1(b)\,\eta + K_2(b) + \frac{1}{l^2}\int_b^{\eta} (\eta - \lambda)\, U(\lambda)\, d\lambda, \quad (0 \leqslant \eta < l).$$

Здесь A_i, B_i, K_1, K_2 — произвольные постоянные.

Расчет на ЭЦВМ производится следующим образом. Промежуток интегрирования l разбивается на n участков длиной τ каждый, причем медленно меняющиеся компоненты подынтегральных выражений принимаются постоянными, равными среднему значению, и выносятся за знак интеграла.

Результаты в конце каждого шага служат исходными данными для следующего, т. е. сводятся к рекуррентным зависимостям. Запишем их для $m+1$-го шага, когда $\eta = m\tau + \tau$:

$$U_{m+1}\left[\frac{1}{2n^2} + \frac{2\alpha^2\beta}{\pi^2}\sum_i d_{im}\sin\frac{i\pi(m+1)}{n}\right] = \sum_i\left\{\left[1 + \frac{G}{P_0}\sin\frac{\nu\pi(2m+1)}{2n}\right]d_{im} + M(i, m)\,c(i) + N(i, m)\,s(i)\right\}\sin\frac{i\pi(m+1)}{n} - Q(m) - R(m), \quad (12.7)$$

где

$$c(i) = \cos\frac{i^2\pi}{\alpha n}; \quad s(i) = \sin\frac{i^2\pi}{\alpha n};$$

$$d_{im} = \frac{1}{i^4}\sin\frac{i\pi(2m+1)}{2n}\,[1 - c(i)];$$

$$\left.\begin{aligned} M(i, m+1) &= M(i, m)\,c(i) + N(i, m)\,s(i) + F_{i,m+1}[1 - c(i)];\\ N(i, m+1) &= N(i, m)\,c(i) - M(i, m)\,s(i) + F_{i,m+1}\,s(i);\\ Q(m+1) &= Q(m) + R(m) + \frac{1}{2n^2}U_{m+1};\\ R(m+1) &= R(m) + \frac{1}{n^2}U_{m+1};\\ F_{i,m+1} &= \frac{1}{i^4}\left[1 - \frac{2\alpha^2\beta}{\pi^2}U_{m+1} + \frac{G}{P_0}\sin\frac{\nu\pi(2m+1)}{2n}\right]\sin\frac{i\pi(2m+1)}{2n}. \end{aligned}\right\} \quad (12.8)$$

Вычислительный процесс строится так. Принимаем нулевые начальные условия. Тогда

$$M(i, 0) = N(i, 0) = Q(0) = R(0) = 0;$$

из (12.7) определяем U_1, затем из (12.8) находим $M(i, 1)$, $N(i, 1)$, $Q(1)$, $R(1)$. Последние значения подставляем в (12.7) и получаем U_2. Вычисление заканчивается при $m = n - 1$. Попутно определяются коэффициенты динамичности для прогибов в любом сечении x

$$z(m\tau + \tau, x) = \sum_i M(i, m+1)\sin\frac{i\pi x}{l}$$

и для напряжений

$$\sigma(m\tau + \tau, x) = \frac{8}{\pi^3}\sum_i i^2 M(i, m+1)\sin\frac{i\pi x}{l},$$

причем

$$\sigma_д = \sigma_0 \sigma; \quad \sigma_0 = \frac{P_0 l}{4W},$$

где W — момент сопротивления балки.

В случае переменного сечения балки выражения для кинетической и потенциальной энергии, представляя собой определенно положительные квадратичные формы, не будут выражены в виде суммы квадратов. Следовательно, при составлении уравнений Лагранжа в каждое из них будут входить все обобщенные координаты, что нежелательно. Однако можно ввести линейное преобразование обобщенных координат q_i, приводящее одновременно обе квадратичные формы к диагональному виду, после чего придем к уравнениям в обычной форме (12.4).

12.2. Динамическое воздействие груза, движущегося с постоянной скоростью, на невесомую балку

Если при выводе уравнения колебаний балки пренебречь ее инерцией по сравнению с инерцией движущейся нагрузки, т. е. рассматривать балку как невесомую, то придем к задаче Стокса. Прогиб под грузом запишется в виде:

$$z_д(\xi, \xi) = \frac{P_д(\xi)\, l^3 \xi^2 (1-\xi)^2}{3EJ}; \quad \xi = \frac{\eta}{l}. \qquad (12.9)$$

С другой стороны, $z_д(\xi, \xi) = z_0 z(\xi, \xi)$. Поэтому

$$\frac{P_д(\xi)}{P_0} = \frac{6z(\xi, \xi)}{\pi^4 \xi^2 (1-\xi)^2}.$$

Подставляя значение $P_д(\xi)$ (12.2) в (12.4) и используя обозначения (12.5), получим уравнение Стокса:

$$\frac{d^2 z(\xi, \xi)}{d\xi^2} + \frac{3z(\xi, \xi)}{\pi^2 \alpha^2 \beta \xi^2 (1-\xi)^2} = \frac{\pi^2}{2\alpha^2 \beta}\left(1 + \frac{G}{P_0} \sin \nu\pi\xi\right). \qquad (12.10)$$

Здесь $\alpha^2\beta$ — безразмерная величина, не зависящая от веса балки.

Из уравнения (12.10) численным интегрированием по одной из стандартных программ можно определить перемещение под грузом $z(\xi, \xi)$. При этом возникает необходимость для начала расчета определить $\dfrac{d^2 z(\xi, \xi)}{d\xi^2}$ при $\xi = 0$. Представив решение в начале координат в виде степенного ряда, найдем:

$$\left.\frac{d^2 z}{d\xi^2}\right|_{\xi=0} = \frac{\pi^4}{3 + 2\alpha^2 \beta\pi^2}.$$

Коэффициент динамичности для напряжений балки будет:

$$\sigma(\xi, \xi) = \frac{24\, z(\xi, \xi)}{\pi^4 \xi (1-\xi)}. \qquad (12.11)$$

12.3. Результаты расчетов при движении груза с постоянной скоростью

В табл. 12.1 приведены наибольшие коэффициенты динамичности для прогибов под грузом $z(\xi, \xi)$. Результаты получены по методу обобщенных

Таблица 12.1

Коэффициенты динамичности для прогибов балки

α	$\beta=1/3$		$\beta=1/2$		$\beta=1$		$\beta=2$		$\beta=3$	
	z	ξ	z	ξ	z	ξ	z	ξ	z	ξ
$1/10$	1,035	0,42	1,072	0,44	1,1277	0,49	1,144	0,53	1,150	0,54
$1/8$	1,127	0,42	1,188	0,44	1,350	0,50	1,430	0,60	1,386	0,68
$1/4$	1,372	0,49	1,437	0,51	1,558	0,58	1,669	0,65	1,658	0,75
$1/3$	1,602	0,57	1,646	0,60	1,680	0,67	1,621	0,72	1,534	0,78
$1/2$	1,572	0,68	1,556	0,72	1,419	0,80	1,254	0,83	1,252	0,84

координат при различных значениях параметра α, характеризующего скорость груза, и β, равного отношению массы груза к массе балки. Здесь также приведены ординаты пролета $\xi=\eta/l$, в которых прогибы максимальны.

При расчетах по методу интегральных уравнений интервал интегрирова-

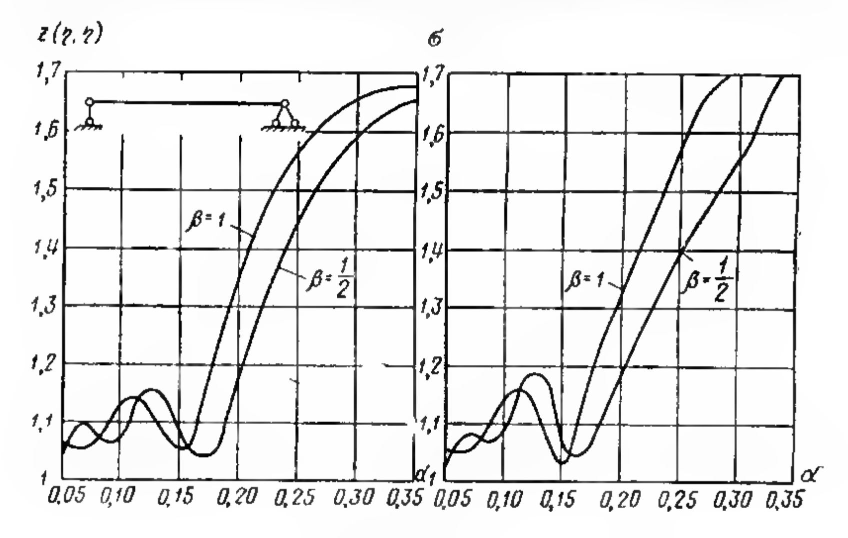


Рис. 12.2

ния разбивался на 200 участков ($n=200$), в разложении (12.3) удерживалось 50 членов ($i=50$). Исходными данными задачи служат безразмерные параметры α, β, G/P_0, ν. Время счета одного варианта на ЭЦВМ «Урал-2» равно 10 *мин* и пропорционально n и i. Расхождение вычисленных прогибов с данными табл. 12.1 не превышает 0,5%, что говорит о достаточной надежности результатов.

На рис. 12.2 приведены графики изменения наибольших динамических коэффициентов прогибов и напряжений в зависимости от значений параметра α, характеризующего скорость груза. При «больших» значениях α динамические коэффициенты возрастают тем больше, чем больше масса груза.

В качестве возможных приложений метода интегральных уравнений рассмотрена задача о колебаниях балки под действием нескольких подрессоренных грузов и пульсирующих сил [19].

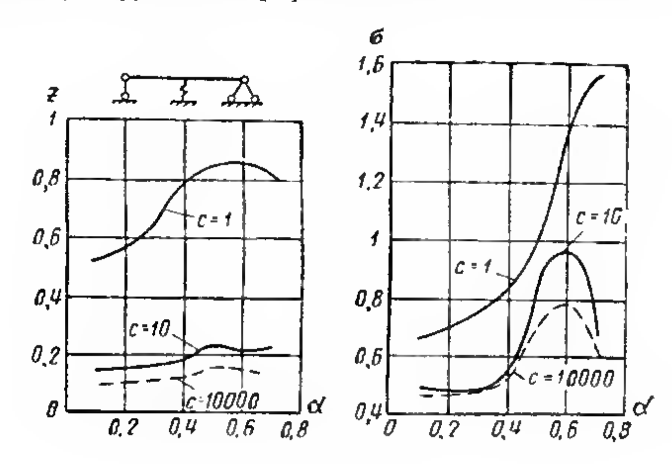


Рис. 12.3

Колебания многопролетных балок с промежуточными упругими опорами рассмотрены в работах [8, 19]. Рис. 12.3 дополняет приведенные в [8] результаты расчетов диаграммами наибольших прогибов z и напряжений σ под грузом для балок с одной промежуточной упругой опорой. Относительный коэффициент упругости опоры $C = \dfrac{cz_0}{P_0}$, где $z_0 = \dfrac{2P_0\, l^3}{\pi^4 EJ}$, l — длина всей неразрезной балки; c — жесткость упругой опоры.

Динамические прогибы и напряжения получатся после умножения значений z и σ, взятых из графиков, на соответствующие величины z_0 и σ_0:

$$z_д = \frac{2P_0\, l^3}{\pi^4 EJ}\, z;\quad \sigma_д = \frac{P_0\, l}{4W}\, \sigma .$$

Расчеты показали, что при малых значениях отношения массы груза к массе балки β уравнение Стокса приводит к значительным погрешностям по сравнению с точным методом интегральных уравнений. Но уже при $\beta > 3$ отличие в перемещениях не превышает 5%, в напряжениях — 10%, и вычисления можно проводить по более простому уравнению Стокса.

12.4. Динамическое воздействие груза, движущегося равнопеременно, на весомые и невесомые балки конечной длины

В случае равнопеременного движения груза его горизонтальное перемещение в момент времени t (см. рис. 12.1) будет:

$$\eta = \frac{wt^2}{2} + vt,$$

где w — ускорение груза; v — его скорость при входе на балку.

Делая замену $t=t_1-v/w$, получим:

$$\eta=\frac{1}{2}wt_1^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{w}. \qquad (12.12)$$

Давление груза на балку (в точке $x=\eta$) запишется в виде:

$$P_д=P_0-\frac{P_0}{g}\cdot\frac{d^2z_д(t_1,\eta)}{dt_1}+G(t_1)\sin\varphi(t_1).$$

Переходя к переменной η, находим:

$$P_д=P_0\left[1-\frac{v^2}{g}\cdot\frac{d^2z(\eta,\eta)}{d\eta^2}\left(\frac{2w\eta}{v^2}+1\right)-\frac{w}{g}\cdot\frac{dz_д(\eta,\eta)}{d\eta}+\right.$$
$$\left.+\frac{G_0}{P_0}\left(\frac{2w\eta}{v^2}+1\right)\sin\frac{\nu\pi\eta}{l}\right]. \qquad (12.13)$$

Здесь $G(t_1)$ — инерционная сила неуравновешенной массы; G_0 — ее значение в момент входа груза на балку; $\varphi(t_1)=\frac{\nu\pi\eta}{l}$ — угол поворота неуравновешенной массы.

Будем искать решение в виде (12.3). Определив кинетическую и потенциальную энергию и обобщенную силу, из уравнений Лагранжа получим:

$$\frac{d^2q_i(t_1)}{dt_1^2}+v^2k_i^2q_i(t_1)=\frac{v^2\pi^2}{\alpha^2l^2}\left[1-2\alpha^2\beta\frac{l^2}{\pi^2}\cdot\frac{d^2z(\eta,\eta)}{d\eta^2}\left(\frac{2\eta}{\gamma l}+1\right)-\right.$$
$$\left.-2\alpha^2\beta\frac{l}{\pi^2\gamma}\cdot\frac{dz(\eta,\eta)}{d\eta}+\frac{G_0}{P_0}\left(\frac{2\eta}{\gamma l}+1\right)\sin\frac{\nu\pi\eta}{l}\right]\sin\frac{i\pi\eta}{l}=$$
$$=f_i(\eta),\quad (i=1,2,\ldots). \qquad (12.14)$$

Здесь сохранены обозначения (12.5) и введен параметр, характеризующий ускорение груза $\gamma=\frac{v^2}{lw}$. Решение уравнения (12.14) будет:

$$q_i(t_1)=A_i(b_1)\cos vk_it_1+B_i(b_1)\sin vk_it_1+\frac{1}{vk_i}\int_{b_1}^{t_1}f(\lambda)\sin vk_i(t_1-\lambda)\,d\lambda,$$

или в переменных η:

$$q_i(\eta)=A_i(b)\cos\left(\frac{i^2\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2\eta\gamma}{l}+\gamma^2}\right)+$$
$$+B_i(b)\sin\left(\frac{i^2\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2\eta\gamma}{l}+\gamma^2}\right)+\frac{\pi\gamma}{\alpha li^2}\int_b^\eta f_i^1(\eta_1)\sin\left[\frac{i^2\pi}{\alpha}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\sqrt{\frac{2\eta\gamma}{l}+\gamma^2}-\sqrt{\frac{2\eta_1\gamma}{l}+\gamma^2}\right)\right]d\eta_1,$$
$$(0\leqslant\eta\leqslant l),$$

где

$$b=\frac{w}{2}\left(b_1^2-\frac{v^2}{w^2}\right);$$

$$f_i^1(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\eta\gamma}{l} + \gamma^2}} \left[1 - \frac{2\alpha^2\beta}{\pi^2} U(\eta)\left(\frac{2\eta}{\gamma l} + 1\right) - \frac{2\alpha^2\beta}{\pi^2\gamma} S(\eta) + \right.$$

$$\left. + \frac{G_0}{P_0}\left(\frac{2\eta}{\gamma l} + 1\right)\sin\frac{\nu\pi\eta}{l}\right]\sin\frac{i\pi\eta}{l};$$

$$U(\eta) = l^2 \frac{d^2 z(\eta,\eta)}{d\eta^2}; \quad S(\eta) = l\frac{dz(\eta,\eta)}{d\eta}.$$

Разбив интегралы на m частей длиной τ $(1 \leqslant m \leqslant n,\ n = l/\tau)$, применив теорему о среднем для медленно меняющихся функций и проведя интегрирование, придем к рекуррентным формулам при $\eta = m\tau$:

$$U_m\left[\frac{m}{n^2} - \frac{1}{2n^2}(2m-1) + \frac{2\alpha^2\beta}{\pi^2}\left(\frac{2m}{\gamma n} + 1\right)\sum_i a_{im}\right] =$$

$$= -\frac{m}{n^2}\sum_{k=1}^{m-1} U_k + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{m-1} U_k(2k-1) + \sum_i\left\{\frac{1}{i^4}\sin\frac{i\pi m}{n}\left[s(i,m)\sum_{k=1}^{m-1} I_{ki} + \right.\right.$$

$$\left. + c(i,m)\sum_{k=1}^{m-1} J_{ki}\right] + \left[1 + \frac{G_0}{P_0}\left(\frac{2m-1}{\gamma n} + 1\right)\sin\frac{\nu\pi(2m-1)}{2n} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{2\alpha^2\beta}{\pi^2\gamma n}\sum_{r=1}^{m-1} U_r\right] a_{im}\right\}, \qquad (12.15)$$

где

$$s(i,m) = \sin\left(\frac{i^2\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m\gamma}{n} + \gamma^2}\right);$$

$$c(i,m) = \cos\left(\frac{i^2\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m\gamma}{n} + \gamma^2}\right);$$

$$a_{im} = \frac{1}{i^4}\sin\frac{i\pi m}{n}\sin\frac{i\pi(2m-1)}{2n}\left\{s(i,m)\left[s(i,m) - s(i,m-1)\right] + \right.$$

$$\left. + c(i,m)\left[c(i,m) - c(i,m-1)\right]\right\}.$$

После вычисления U_m находим q_i, далее определяем коэффициенты динамичности для прогибов z и напряжений σ в любом сечении x:

$$J_{ki} = F_{ki}\left[s(i,k) - s(i,k-1)\right];$$

$$J_{ki} = F_{ki}\left[c(i,k) - c(i,k-1)\right];$$

$$F_{ki} = \left[1 - \frac{2\alpha^2\beta}{\pi^2} U_k\left(\frac{2k-1}{\gamma n} + 1\right) - \frac{2\alpha^2\beta}{\pi^2\gamma n}\sum_{r=1}^{k} U_r + \right.$$

$$\left. + \frac{G_0}{P_0}\left(\frac{2k-1}{\gamma n} + 1\right)\sin\frac{\nu\pi(2k-1)}{2n}\right]\sin\frac{i\pi(2k-1)}{2n}.$$

$$q_i(m\tau) = \frac{1}{i^4}\left[s(i,m)\sum_{k=1}^{m} J_{ki} + c(i,m)\sum_{k=1}^{m} J_{ik}\right];$$

$$z(m\tau, x) = \sum_i q(m\tau)\sin\frac{i\pi x}{l};$$

$$\sigma(m\tau, x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_i i^2 q_i(m\tau)\sin\frac{i\pi x}{l}.$$

Затем переходим к вычислению U_{m+1} и т. д., пока $m<n$. Для случая невесомой балки, подставив в выражение (12.9) значение давления в месте контакта с грузом (12.13), придем к обобщенному уравнению Стокса для случая равнопеременного движения груза

$$\frac{d^2 z(\xi,\xi)}{d\xi^2}\left(\frac{2\xi}{\gamma}+1\right)+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{dz(\xi,\xi)}{d\xi}+\frac{3z(\xi,\xi)}{\pi^2\alpha^2\beta\xi^2(1-\xi)^2}=$$

$$=\frac{\pi^2}{2\alpha^2\beta}\left[1+\frac{G_0}{P_0}\left(\frac{2\xi}{\gamma}+1\right)\sin\nu\pi\xi\right]. \qquad (12.16)$$

При равномерном движении $1/\gamma=0$, и уравнение (12.16) переходит в (12.10).

Условие в начале координат сохраняет прежний вид. Напряжение определяется по формуле (12.11).

12.5. Результаты расчетов при равнопеременном движении груза

Точность расчетов, проведенных по методу интегральных уравнений для весомой балки, принималась такой же, как и в случае постоянной скорости, т. е. $n=200$, $i=50$. Исходными данными здесь были α, β, γ, G_0/P_0, ν. Время счета одного варианта ~ 10 *мин*.

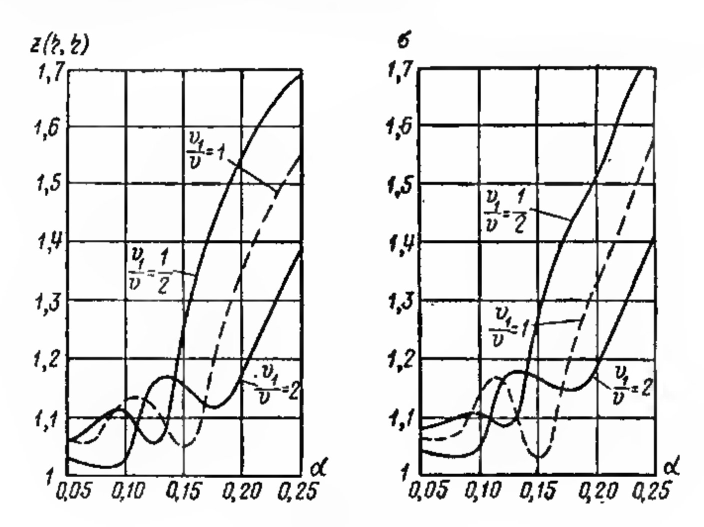


Рис. 12.4

Задавшись отношением скорости схода груза с балки v_1 к скорости входа на балку v, получим величину γ, соответствующую данному отношению $v_1/v = \alpha_1/\alpha$. Из (12.12), положив $\eta = l$, найдем время пробега груза $t_1 = 1/w \sqrt{2lw + v^2}$. Так как $v_1 = wt_1$, то $v_1/v = \sqrt{2/\gamma + 1}$. Отрицательному значению γ отвечает равнозамедленное движение, положительному — равноускоренное.

Средняя скорость в пролете $v_{ср} = (v + v_1)/2$.

Расчеты проводились для равноускоренного или равнозамедленного движения при одинаковой средней скорости в пролете. Для сравнения также был проведен расчет для постоянной скорости движения груза, равной $v_{ср}$.

На рис. 12.4 приводятся значения максимальных коэффициентов динамичности для прогибов z и напряжений σ. Принималось $v_1/v = 1/2$ ($\gamma = -2{,}667$, $v_{ср} = \frac{3}{4} v$, $\alpha_{ср} = \frac{3}{4} \alpha$) и $v_1/v = 2$ ($\gamma = 0{,}667$, $v_{ср} = \frac{3}{2} v$). Графики для $v_1/v = 1$ нанесены пунктиром. По оси абсцисс отложено α, соответствующее $v_{ср}$. Было принято $\beta = 1$.

Как видно, динамические коэффициенты при равнозамедленном движении выше, чем при равномерном и равноускоренном (при «большом» значении средней скорости) [7, 19].

С уменьшением ускорения по модулю графики сверху и снизу приближаются к графикам для равномерного движения. С уменьшением β динамические характеристики уменьшаются.

Расчеты, приведенные для обобщенного уравнения Стокса (в случае невесомой балки), показали, что область применения уравнения (12.16) та же, что и уравнения (12.10), т. е. оно пригодно для $\beta > 3$.

12.6. Динамическое воздействие движущихся нагрузок на бесконечно длинные балки, лежащие на упругом основании

Для бесконечно длинных балок, лежащих на упругом основании (например, рельсы или балки эстакад), по которым движутся массы m, m_1 со скоростью v (рис. 12.5), определение динамического воздействия на балку связано с решением дифференциального уравнения колебаний балки

$$B \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial y}{\partial t} - R = 0. \qquad (12.17)$$

Здесь R — реакция основания; B — жесткость балки; μ — коэффициент затухания в основании. Для упругого винклеровского основания $R = -cy$.

В случае если балка лежит на упругом полупространстве, реакция основания определяется с помощью совместного решения уравнения (12.17) с уравнениями движения полупространства [17]:

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (i = x,\ y,\ z),$$

при удовлетворении всех условий контакта. Решение задачи о движении силы по упругому полупространству приведено в [18].

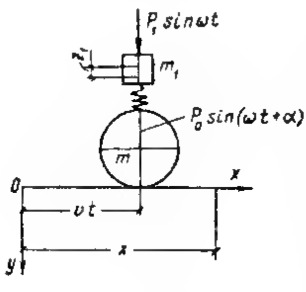


Рис. 12.5

Движение подрессоренных масс по полупространству, на которые действуют периодические возмущающие силы, изучено в работе [15]. В этом наиболее общем случае суммарное воздействие на полупространство слагается из действия движущихся сил, сил инерции и периодических сил.

Действие движущейся силы зависит от скорости v, модуля упругости основания E, жесткости балки B и определяется величиной параметров:

$$\varepsilon = \frac{2}{\pi}\left(1-\nu_1^2\right)\left(\frac{2}{b}\right)^4 \frac{B}{E_1} = \frac{\varepsilon_0}{E_1};$$

$$\delta_1^2 = \frac{\rho}{\rho_1}\left(\frac{b}{2}\right)^2 \frac{c_v E_1}{2(1+\nu)B} = \delta_0^2 c_v E_1 \cdot 10^{-4}$$

и коэффициента скорости

$$c_v = \frac{2\rho_1 v^2 (1-\nu)}{E_1}.$$

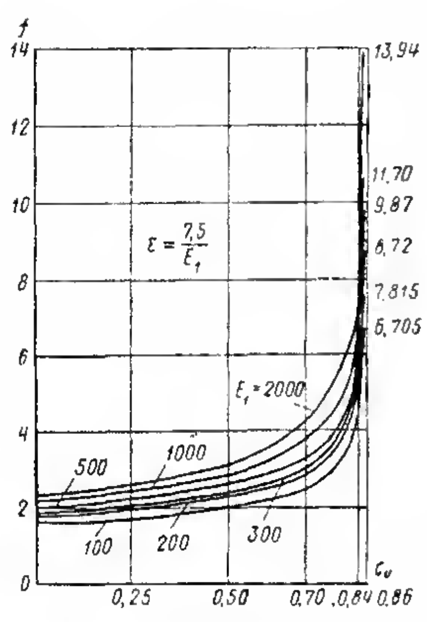


Рис. 12.6

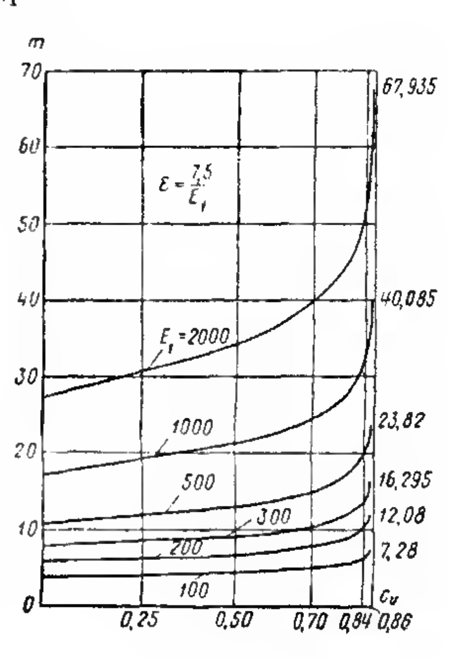
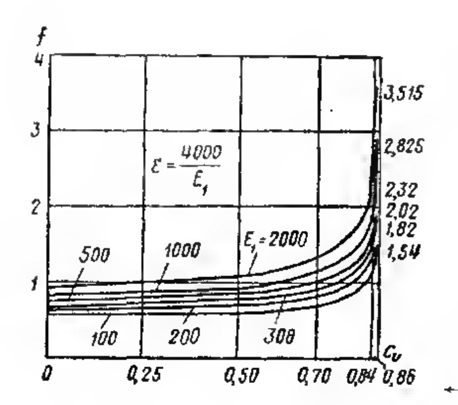


Рис. 12.8



← Рис. 12.7

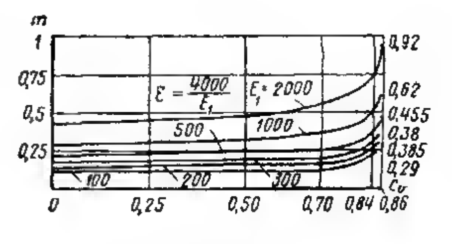


Рис. 12.9

Для случая двух балок (рельсов) при $B=2\cdot 2016\ E$ *кгс/см²* для $b=270$ *см*, плотности $\rho_1=1{,}7\cdot 10^{-6}$ *кгс·сек²/см⁴* на рис. 12.6—12.9 приведены значения величин $f(\varepsilon, \delta)$, $m(\varepsilon, \delta)$, с помощью которых определяются перемещение $u(0, 0, 0)$ под силой P и момент M

$$u_2(0,\ 0,\ 0)=\frac{2{,}736}{E_1}10^{-3}f(\varepsilon,\delta)\,P \text{ и } M=\frac{6{,}052E}{E_1}10^{-4}m(\varepsilon,\delta)\,P$$

для различных значений ε_0.

Как показывает анализ графиков, с возрастанием скорости v перемещения остаются ограниченными и сначала возрастают до некоторой величины, а затем опять начинают убывать.

Инерция движущихся масс и действие периодических сил создают дополнительное динамическое влияние на балку и основание. Величина динамического коэффициента зависит от скорости и характерных параметров системы.

При приближении скорости движения к скорости поверхностных волн коэффициент динамичности возрастает, однако его величина остается ограниченной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Задача о колебаниях мостов под действием подвижной нагрузки. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 4.
2. Бондарь Н. Г., Казей И. И., Лесохин Б. Ф., Козьмин Ю. Г. Динамика железнодорожных мостов. «Транспорт», 1965.
3. Вольпер Д. Б., Моргаевский А. Б. О динамическом воздействии подвижной нагрузки при больших скоростях движения. «Исследования по теории сооружений», вып. XII. Госстройиздат, 1963.
4. Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П. Нестационарные колебания механических систем. Киев, «Наукова думка», 1966.
5. Карновский И. А. О колебаниях пластинки с большими прогибами, несущей подвижную нагрузку. «Прикладная механика», вып 8, 1968.
6. Колесник И. А. О динамическом воздействии подвижного груза на гибкую арку с балкой жесткости. Известия вузов. «Строительство и архитектура», 1970, № 2.
7. Кохманюк С. С., Филиппов А. П. Динамическое действие на балку груза, движущегося с переменной скоростью. «Строительная механика и расчет сооружений», 1967, № 2.
8. Кохманюк С. С., Филиппов А. П. Колебания многопролетных балок на упругих опорах при подвижной нагрузке. «Строительная механика и расчет сооружений», 1965, № 6.
9. Крылов А. Н. Вибрация судов. М. — Л., Изд-во АН СССР. 1948.
10. Моргаевский А. Б. О критических состояниях и устойчивости сооружений, загруженных нагрузками, движущимися с большой скоростью. В сб.: «Проблемы устойчивости в строительной механике». Стройиздат, 1965.
11. Моргаевский А. Б., Кучма В. К. О расчете плит на подвижную нагрузку в виде полосы. В сб.: «Исследования по теории сооружений», т. XV, 1967.
12. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. «Наука», 1967.
13. Рязанова М. Я. Про коливання балки під дією вантажу, що рухається вздовж неї. Доповіді АН УРСР, 1958, № 2.
14. Терентьев В. Н., Филиппов А. П. Вынужденные установившиеся колебания бесконечных балок, лежащих на упругом полупространстве. «Прикладная механика», т. 1, вып. 9. Киев, 1965.
15. Терентьев В. Н. Динамическое воздействие периодической нагрузки, движущейся прямолинейно по поверхности пластинки, лежащей на упругом полупространстве. Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. «Наука», 1966.
16. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. «Наука», 1967.
17. Филиппов А. П. Динамическое действие на балку с шарнирно опертыми концами груза и гармонической силы, движущихся с постоянной скоростью. Известия АН СССР, ОТН, «Механика и машиностроение», 1964, № 4.
18. Филиппов А. П. Колебания механических систем. «Наукова думка», 1965. Изд. 2-е «Колебания деформируемых систем». «Машиностроение», 1970.
19. Филиппов А. П., Кохманюк С. С. Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни. «Наукова думка», 1967.
20. Фрыба Л. Экспериментальное исследование динамического воздействия локомотивов новых типов на металлические пролетные строения больших пролетов. Acta Technica CSAV, 1964, № 1.
21. Fryba L. Vibration of a beam under the action of a moving mass system. Acta Technica A. S. Hungaricae, 1—2, 1966.

РАЗДЕЛ 13

РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ НА ДЕЙСТВИЕ КРАТКОВРЕМЕННЫХ НАГРУЗОК БОЛЬШОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

(Н. Н. Попов, Б. С. Расторгуев)

13.1. Виды кратковременных нагрузок

В гражданском и промышленном строительстве кратковременные нагрузки возникают главным образом под влиянием ударных и взрывных воздействий (падение груза на перекрытие, удар льдины о ледорез, сейсмические воздействия, ударная волна взрыва и т. п.)[1]. Результат таких воздействий на конструкцию зависит, вообще говоря, от взаимодействия конструкции с ударяющим телом, с ударной волной и т. п. Вследствие сложности происходящих при этом процессов взаимодействия такого рода в расчетах в большинстве случаев не учитываются и заменяются кратковременной динамической нагрузкой, не зависящей от движения конструкции.

Продолжительность действия кратковременной нагрузки изменяется от малых долей секунды до нескольких минут. Законы изменения динамической нагрузки во времени могут быть различными, и при расчетах они задаются графически или аналитически. Если действительный закон изменения нагрузки достаточно сложен, то его заменяют упрощенным законом, описываемым несколькими прямыми или кривыми. При этом необходимо, чтобы возникающие в результате такой замены погрешности в усилиях и перемещениях были минимальны.

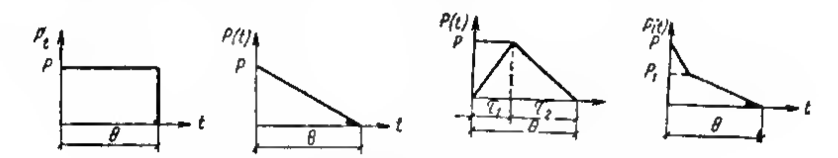


Рис. 13.1. Законы изменения нагрузки во времени

Наиболее часто встречающиеся в расчетах упрощенные законы изменения нагрузки во времени представлены на рис. 13.1.

При действии на сооружение кратковременной нагрузки большой интенсивности в ряде случаев в конструкциях могут быть допущены значительные пластические деформации. Это прежде всего относится к тем конструкциям, которые в соответствии с эксплуатационными требованиями должны выдержать однократное действие кратковременной нагрузки, не обрушившись.

Для конструкций, материал которых работает в пластической стадии, характерны: нелинейная зависимость между деформациями и напряжениями (физическая нелинейность), влияние изменения геометрии конструкция на ее работу (геометрическая нелинейность), влияние больших скоростей деформирования на прочностные свойства материалов конструкции (повышение предела текучести стали, предела прочности бетона и т. п.).

[1] Расчет конструкций на кратковременные нагрузки малой интенсивности, см. раздел 5.

13.2. Влияние скорости деформирования на механические характеристики материалов [1, 8]

При больших скоростях деформирования ($\dot{\varepsilon} > 10^{-2}$ 1/*сек*) механические характеристики материалов изменяются.

Сталь. Наибольшее влияние скорость деформирования оказывает на величину предела текучести, в меньшей степени на предел прочности. Величина модуля Юнга от скорости деформирования практически не зависит.

Влияние скорости деформирования на механические свойства сталей зависит от содержания углерода, причем с повышением содержания углерода, а также при упрочнении арматурных сталей вытяжкой это влияние уменьшается.

Повышение предела текучести мягких сталей объясняется свойством запаздывания пластических деформаций стали. Это свойство заключается в том, что сталь в течение определенного времени сохраняет состояние упругости при напряжениях, превышающих статический предел текучести. Время, в течение которого напряжение в стали достигает величины динамического предела текучести, называется временем запаздывания пластических деформаций.

Величина динамического предела текучести зависит от времени запаздывания, режима загружения и температуры.

Явление запаздывания пластических деформаций объясняют исходя из теории дислокаций. На основании этой теории получена зависимость [9], связывающая время запаздывания (τ) и динамический предел текучести ($\sigma_0^{д}$) при одноосном напряженном состоянии и произвольном режиме загружения ($\sigma(t)$), которую удобно представить в виде:

$$\int_0^{\tau} [\sigma(t)]^{\alpha}\, dt = t_0\, \sigma_0^{\alpha}, \qquad (13.1)$$

где σ_0 — статический предел текучести; t_0, α — константы, равные для арматурных сталей классов А-I, А-II, А-III; $t_0 = 0{,}895$ *сек*, $\alpha = 17$ [6].

Критерий (13.1) справедлив при условии, что начальные напряжения равны нулю и $\sigma(\tau) > \sigma_0$. Динамический предел текучести равен: $\sigma_0^{д} = \sigma(\tau)$.

Вследствие большой величины α при непосредственном использовании критерия (13.1) удобнее всего применять численное интегрирование. Однако в большинстве случаев достаточную точность дает прием, основанный на замене в промежутке $0 \leqslant t \leqslant \tau$ функции $\sigma(t)$ кусочно-линейной функцией.

При замене функции $\sigma(t)$ линейной зависимостью $\sigma = kt$ уравнение для определения τ будет иметь вид

$$[t_0(\alpha + 1)]^{\frac{1}{\alpha}}\, \sigma_0 = \tau^{\frac{1}{\alpha}}\, \sigma(\tau). \qquad (13.2)$$

Для сталей классов А-I, А-II, А-III выражение (13.2) принимает вид

$$1{,}1776\sigma_0 = \tau^{\frac{1}{17}}\, \sigma(\tau). \qquad (13.3)$$

При практических расчетах железобетонных конструкций, армированных сталями классов А-I, А-II, А-III на действие внезапно приложенной нагрузки, динамический предел текучести можно принимать равным

$$\sigma_0^{д} = 1{,}1\omega^{\frac{1}{17}}\, \sigma_0, \qquad (13.4)$$

где ω — низшая частота собственных колебаний конструкции (*сек*$^{-1}$).

Для арматурных сталей классов А-IV, А-IIIв, В-II повышение предела текучести можно не учитывать.

Бетон. Влияние скорости деформирования на бетон проявляется в изменении диаграммы деформаций и в повышении предела прочности. При увеличении скорости загружения диаграммы деформаций изменяются, приближаясь на начальном участке к диаграмме упругого материала.

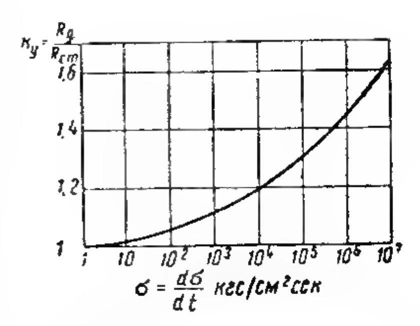


Рис. 13.2. График зависимости коэффициента упрочнения предела прочности бетонов при сжатии

Модуль деформации при этом возрастает, величина же предельной деформации остается практически постоянной и для бетонов различных марок изменяется в пределах от $2 \cdot 10^{-3}$ до $3 \cdot 10^{-3}$. Величина коэффициента упрочнения бетона k_y в зависимости от времени нагружения τ при сжатии может быть определена по формуле $k_y = 1{,}58 - 0{,}35 \lg\tau + 0{,}07 (\lg\tau)^2$, где τ — продолжительность возрастания нагрузки от нуля до максимальной разрушающей в миллисекундах.

Зависимость k_y от скорости загружения дана на графике рис. 13.2. При приближенных расчетах железобетонных конструкций можно принимать $R_д = (1{,}2 \div 1{,}3) R_{ст}$.

13.3. Расчетные диаграммы деформаций материалов и конструкций

Диаграммы деформаций (зависимость $\sigma - \varepsilon$) материалов в области пластических деформаций имеют различный вид при нагружении и разгрузке. Для большинства строительных материалов диаграмма деформаций при разгрузке принимается по линейному закону. При нагружении диаграмма деформаций ($\sigma - \varepsilon$) большинства материалов, вследствие влияния скорости деформирования, заранее неизвестна и при заданной кратковременной нагрузке может быть получена лишь в результате расчета или экспериментальным путем. Однако общий характер диаграммы деформаций при медленном и быстром нагружениях в основном сохраняется. Поэтому при приближенных расчетах на кратковременную нагрузку обычно используются диаграммы деформаций материала, аналогичные статическим, но с измененными основными параметрами, например, с повышенным пределом текучести для стали, повышенным пределом прочности для бетона (динамические диаграммы деформаций).

Для малоуглеродистых сталей (классов А-I, А-II, А-III) расчетные диаграммы деформаций представляются в виде упруго-пластической или жестко-пластической диаграммы без упрочнения (рис. 13.3, *а*, *в*) или с упрочнением (рис. 13.3, *б*, *г*), в которых приняты динамические пределы текучести.

Иногда применяются (для бетонов, сплавов) диаграммы $\sigma - \varepsilon$ в виде плавных кривых (рис. 13.4, *а*), аналитически выраженных степенной функцией, многочленом и т. п. или в виде ломаных (рис. 13.4, *б*).

Для хрупких материалов (высокопрочные стали, бетоны) диаграмма $\sigma - \varepsilon$ имеет вид, указанный на рис. 13.4, *в*, *г*.

В динамических расчетах конструкций [4, 12] используется зависимость между усилиями и деформациями элемента конструкции, например для изгибаемых конструкций зависимость между изгибающим моментом и кривизной. Такие зависимости находятся экспериментально или теоретически на основе динамических диаграмм деформаций $\sigma - \varepsilon$. Для изгибаемой конструкции из материала с произвольной диаграммой $\sigma - \varepsilon$ зависимость между изгибающим моментом и кривизной может быть получена на основе закона плоских сечений.

Для прямоугольного сечения ($b \times h$) при одинаковых диаграммах растяжения и сжатия $\sigma(-\varepsilon) = -\sigma(\varepsilon)$ нейтральная ось в течение всего процесса деформирования делит сечение пополам, и зависимость изгибающего момента от кривизны будет:

$$M = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma\left(\frac{z}{\rho}\right) z dz = M\left(\frac{1}{\rho}\right). \qquad (13.5)$$

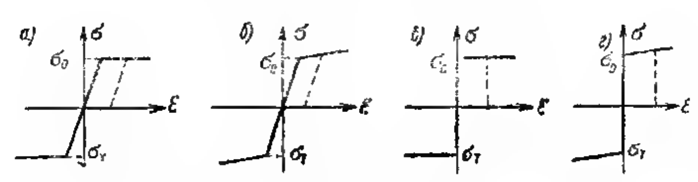


Рис. 13.3. Расчетные диаграммы деформаций материалов

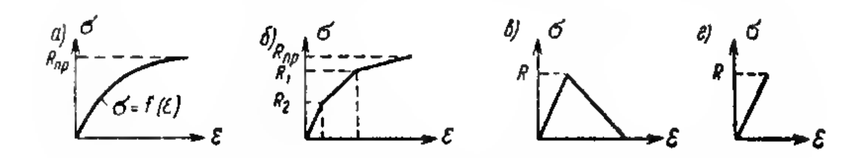


Рис. 13.4. Расчетные диаграммы деформаций материалов

Если

$$\sigma = E_1\varepsilon + E_3\varepsilon^3 + \dots + E_n\,\varepsilon^n = \sum_{k=1,3,5,\dots} E_k\,\varepsilon^k, \qquad (13.6)$$

то

$$M = \sum_{k=1,3,5\dots} B_k\left(\frac{1}{\rho}\right)^k; \; B_k = \frac{E_k\,bh^{k+2}}{(k+2)\,2^{k+1}}. \qquad (13.7)$$

При разных диаграммах растяжения и сжатия положение нейтральной оси будет меняться в процессе деформирования.

Если

$$\sigma = E_1\varepsilon + E_2\varepsilon^2 + \dots + E_m\,\varepsilon^m = \sum_{k=1}^{m} E_k\,\varepsilon^k, \qquad (13.8)$$

то положение нейтральной оси определяется из уравнения

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{F_k}{(k+1)\,\rho^k}\left[(h-h_1)^{k+1} - (-h_1)^{k+1}\right] = 0, \qquad (13.9)$$

а зависимость $M\left(\frac{1}{\rho}\right)$ имеет вид:

$$M = \sum_{k=1}^{m} B_k \left(\frac{1}{\rho}\right)^k ; \; B_k = \frac{E_k b}{(k+2)} [(h - h_1)^{k+2} - (-h_1)^{k+2}], \qquad (13.10)$$

где h_1 — расстояние от нейтральной оси до растянутого волокна элемента балки.

Для диаграммы

$$\sigma = E_1 \varepsilon - E_3 \varepsilon^3 \qquad (13.11)$$

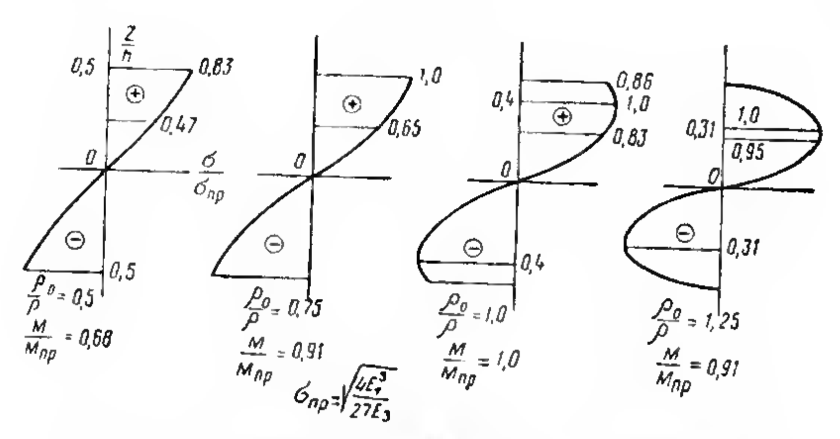


Рис. 13.5. Распределение напряжений по высоте сечения балки при $\sigma = E_1\varepsilon - E_3\varepsilon^3$

имеем

$$\frac{M}{M_{\text{пр}}} = \frac{3}{2}\left[\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^3\right],$$

где

$$M_{\text{пр}} = \frac{bh^2}{18}\sqrt{\frac{20E_1^3}{9E_1}}; \; \frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{20E_1}{9E_3}}.$$

Распределение напряжений по высоте сечения при разных величинах кривизн приведено на рис. 13.5.

Для диаграммы

$$\sigma = E_1\varepsilon - E_2\varepsilon^2 \qquad (13.12)$$

положение нейтральной оси определяется из уравнения

$$\alpha = \frac{h_1}{h} = 0,5 - \frac{E_1\rho}{2E_2 h} + \sqrt{\left(\frac{E_1}{2E_2}\cdot\frac{\rho}{h}\right)^2 - 0,083}, \qquad (13.13)$$

и зависимость момента от кривизны будет:

$$M = \frac{E_1 bh^3}{3\rho}\{[(1-\alpha)^3 + \alpha^3] - \frac{3}{8}\cdot\frac{2E_2}{E_1}\cdot\frac{h}{\rho}[(1-\alpha)^4 - \alpha^4]\}. \qquad (13.14)$$

Распределение напряжений по высоте сечения приведено на рис. 13.6.

Для балок различных сечений, выполненных из идеального упруго-пластического материала, зависимости изгибающего момента от кривизны приведены в табл. 13.1, в которой M_0 — предельный (пластический) изгибающий момент, равный $M_0=\sigma_0 W_0$, где W_0 — пластический момент сопротивления сечения; σ_0 — предел текучести; $k=1/\rho$ кривизна элемента. Зависимость

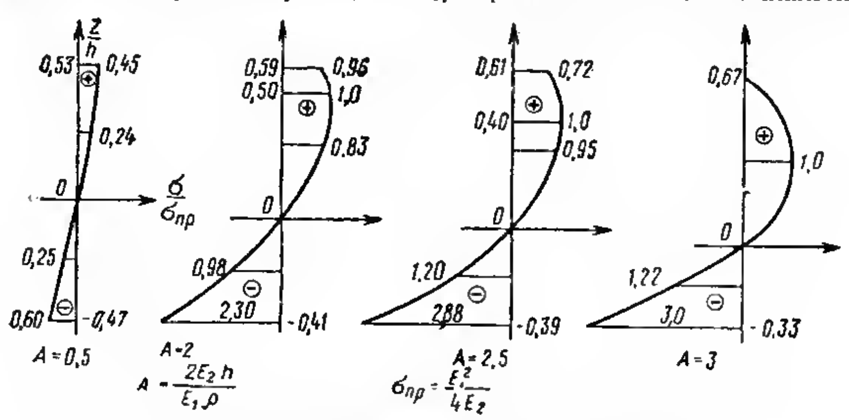


Рис. 13.6. Распределение напряжений по высоте сечения балки при $\sigma=E_1\varepsilon-E_2\varepsilon^2$

Таблица 13.1

Сечение элемента (профиль)	Зависимость «изгибающий момент—кривизна»		
	изгиб в упругой стадии	граничное значение кривизны	изгиб в упруго-пластической стадии
I	$\frac{M}{M_0}=\frac{EJ}{M_0}k$	$\frac{EJ}{M_0}k=1$	$\frac{M}{M_0}=1$
I		$\frac{EJ}{M_0}k=\frac{14}{15}$	$\frac{M}{M_0}=1-\frac{1}{15}\left(\frac{14}{15}\cdot\frac{M_0}{EJ}\cdot\frac{1}{k}\right)^2$
□		$\frac{EJ}{M_0}k=\frac{8}{9}$	$\frac{M}{M_0}=1-\frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\cdot\frac{M_0}{EJ}\cdot\frac{1}{k}\right)^2$
▨		$\frac{EJ}{M_0}k=\frac{2}{3}$	$\frac{M}{M_0}=1-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{M_0}{EJ}\cdot\frac{1}{k}\right)^2$

$M(1/\rho)$ является идеальной упруго-пластической диаграммой только для идеального профиля. Однако при расчетах зависимость $M(1/\rho)$ и для других профилей часто заменяют идеальной упруго-пластической.

Для железобетонных изгибаемых и внецентренно сжатых конструкций, подверженных действию кратковременных нагрузок, зависимость $M(1/\rho)$ представляется идеальной упруго-пластической диаграммой, когда в растянутой арматуре пластические деформации возникают прежде, чем начинается разрушение бетона сжатой зоны, и диаграммой хрупко разрушающегося тела, когда бетон сжатой зоны разрушается до появления пластических деформаций в арматуре (переармированные конструкции). Эти случаи устанавливаются согласно СНиП II-В.1-62*.

13.4. Предельные состояния

Расчет конструкций на действие кратковременных динамических нагрузок производится по двум предельным состояниям.

По первому предельному состоянию (по несущей способности) рассчитываются конструкции, к которым предъявляется следующее требование:

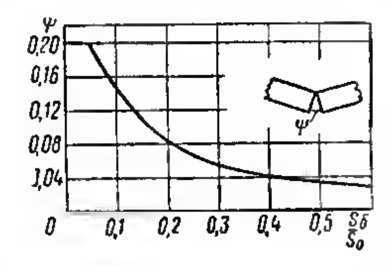


Рис. 13.7. Предельные величины углов раскрытия в шарнире пластичности

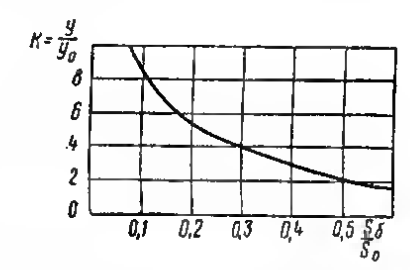


Рис. 13.8. Предельные величины относительных прогибов для железобетонной балки

конструкция должна выдержать однократное действие динамической нагрузки, полностью исчерпав свою несущую способность; при этом допускаются пластические деформации в материале конструкции, большие остаточные деформации и трещины.

По второму предельному состоянию (по деформациям) рассчитываются конструкции, к которым предъявляются специальные требования по ограничению величин перемещений. При этом в конструкции могут допускаться или не допускаться пластические деформации.

В конструкциях, которые предназначены для многократного восприятия динамических нагрузок, пластические деформации, как правило, не допускаются.

Для изгибаемых и внецентренно сжатых с большим эксцентриситетом железобетонных конструкций достижение первого предельного состояния характеризуется началом разрушения бетона сжатой зоны в сечениях, в арматуре которых возникли пластические деформации (шарниры пластичности). Нормирование первого предельного состояния производится по величине полных углов раскрытия в шарнирах пластичности, а также по величине прогибов или по отношению полного прогиба к упругому (соответствующему началу текучести арматуры).

Условие прочности конструкции, в которой образовалось n шарниров пластичности, имеет вид: $\psi_i \leqslant \psi_{пi}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, где ψ_i — полученный из

динамического расчета угол раскрытия в i-м шарнире пластичности; $\psi_{\text{п}i}$ — предельный угол раскрытия в i-м шарнире пластичности, принимаемый по графику рис. 13.7.

Для однопролетных шарнирно опертых балок условие прочности может быть представлено в виде $k \leqslant k_{\text{п}}$, где k — отношение полного прогиба к упругому, полученное из динамического расчета; $k_{\text{п}}$ — предельная величина отношения прогибов, принимаемая по графику рис. 13.8.

Металлические конструкции, выполненные из низкоуглеродистых сталей, рассчитываются на однократное действие динамической нагрузки обычно по второму предельному состоянию с допущением пластических деформаций, так как до достижения напряжениями в конструкции предела прочности возникнут перемещения, приводящие к нарушению условий ее эксплуатации. Величины предельных перемещений определяются из условия сохранения связей с примыкающими конструкциями.

13.5. Основные методы расчета конструкций и сооружений на кратковременные нагрузки в пластической стадии [3, 5, 8, 12, 15]

В настоящее время наибольшее развитие получили методы расчета конструкций, диаграмма деформаций которых может быть представлена идеальной упруго-пластической диаграммой (упруго-пластические конструкции) и идеальной жестко-пластической диаграммой (жестко-пластические конструкции) (см. рис. 13.3).

При расчете упруго-пластической конструкции учитывается упругая стадия работы конструкции (до образования зон пластичности) и упругие деформации участков конструкции между пластическими зонами. Положение пластических областей и их развитие во времени определяется в процессе расчета. Однако этот метод вследствие сложности позволил получить решение лишь для ограниченного круга задач.

При расчете жестко-пластической конструкции она считается недеформируемой, пока усилия в каком-либо сечении не станут равными предельной величине и не возникнет возможность образования пластических деформаций. После этого начнется перемещение конструкции. Пластические деформации сосредоточены в шарнирах пластичности или на участках конечной длины, причем положение шарнира пластичности может меняться в процессе движения конструкции. Участки конструкции между шарнирами пластичности рассматриваются как жесткие. Полученные этим методом решения дают достоверные результаты лишь при больших пластических деформациях.

Основная трудность при использовании этих методов вызывается учетом движения пластических шарниров и пластических зон. Поэтому получают широкое распространение упрощенные методы, в которых шарниры или зоны пластичности считаются неперемещающимися в процессе деформирования конструкции (стационарными), а участки между ними принимаются жесткими.

При этом упругая стадия работы может учитываться или не учитываться. Положение зон пластичности определяют расчетом в упругой стадии, энергетическими методами или на основе экспериментов. Упрощенные методы позволяют получить приближенные решения для очень широкого класса конструкций (в том числе и для оболочек).

Во всех этих методах влияние скорости деформирования учитывается повышением предела текучести. Существуют также методы [7, 12], в которых влияние скорости деформирования учитывают непосредственно в процессе расчета путем использования законов деформирования, учитывающих вязкопластические свойства материала.

Если диаграмма деформации конструкции выражена плавной кривой, которая не может быть заменена идеальной упруго-пластической диаграммой, то при расчете исходят из действительной диаграммы деформаций, применяя вариационные или численные методы.

В рассматриваемых задачах метод расчета конструкции выбирают исходя из ее диаграммы деформации. Для большинства изгибаемых и внецентренно сжатых с большим эксцентрицитетом железобетонных и металлических конструкций диаграмма деформации может быть представлена идеальными упруго-пластической и жестко-пластической схемами.

Упруго-пластическими схемами в большинстве случаев представляются диаграммы деформаций железобетонных конструкций, пластические деформации которых относительно невелики. При расчете металлических конструкций из сталей, для которых характерны большие пластические деформации, достаточно хорошие результаты дает применение жестко-пластической диаграммы.

При выборе расчетной схемы сооружения во многих случаях возможно расчленять его на отдельные простейшие конструктивные элементы (балки, плиты и т. п.) путем введения упругих и пластических связей (шарниры пластичности). Выбор расположения пластических шарниров может производиться путем расчета сооружения на статическое действие рассматриваемой нагрузки.

Для каждого из отдельных элементов выполняется динамический расчет.

Для более точного расчета следует учесть взаимное влияние элементов: податливость оснований, фундаментов, стен, колонн при расчете перекрытий, смещение всего сооружения в целом и т. д.

При расчете конструкций в упругой стадии применяются общие методы динамики упругих систем с конечным или бесконечным числом степеней свободы. При этом, поскольку основной целью упругого расчета является получение начальных условий для пластической стадии, целесообразно пользоваться приближенными методами решения дифференциальных уравнений, например вариационными методами и т. п.

13.6. Расчет систем с одной степенью свободы [5, 15]

Коэффициенты динамичности нелинейно-деформирующихся систем. При динамических расчетах нелинейных систем применяются два коэффициента динамичности:

коэффициент динамичности перемещения

$$k_п = \frac{y_{макс}}{y_{ст}}; \qquad (13.15)$$

коэффициент динамичности нагрузки

$$k_н = \frac{P_{ст}}{P_д}, \qquad (13.16)$$

где $y_{макс}$ — максимальное перемещение системы при действии динамической нагрузки; $y_{ст}$ — перемещение системы, вызываемое статической нагрузкой, равной наибольшей величине динамической нагрузки; $P_{ст}$, $P_д$ — величины статической и динамической нагрузок, вызывающие в системе одни и те же усилия (перемещения).

Для систем с линейной восстанавливающей силой $R(y)$ (рис. 13.9, *а*) $k_н = k_п$. Для нелинейной системы с «жесткой» восстанавливающей силой $R(y)$ (рис. 13.9, *б*) $k_н > k_п$, и для систем с «мягкой» восстанавливающей силой (рис. 13.9, *в*) $k_п < k_н$.

Система с произвольной восстанавливающей силой. Дифференциальное уравнение колебаний системы с одной степенью свободы с произвольной восстанавливающей силой имеет вид:

при нагружении

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + R(y) = P(t); \qquad (13.17)$$

при разгрузке

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+c\,(y-y_{\text{ост}})=P\,(t); \qquad (13.18)$$

$$y_{\text{ост}}=y_{\text{макс}}-\frac{R\,(y_{\text{макс}})}{c},$$

где m — масса системы; c — жесткость системы при разгрузке.

Уравнение (13.17) ниже проинтегрировано в квадратурах при $P(t)=\text{const}$. В этом случае, учитывая, что

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

имеем

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\int\limits_0^y R\,(y)\,dy=Py+D_1, \qquad (13.19)$$

откуда получим зависимость $t=t(y)$;

$$t+D_2=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_0^y\frac{dy}{\sqrt{Py+D_1-\int\limits_0^y R\,(y)\,dy}}. \qquad (13.20)$$

Постоянные интегрирования D_1 и D_2 находят из начальных условий. Максимальное перемещение системы определится из (13.19) при $dy/dt=0$:

$$Py-\int\limits_0^y R\,(y)\,dy+D_1=0. \qquad (13.21)$$

При

$$R\,(y)=ky^n \qquad (13.22)$$

и при нулевых начальных условиях ($D_1=0$) имеем:

$$y_{\text{макс}}=\left(\frac{n+1}{k}\,P\right)^{\frac{1}{n}}; \quad R\,(y_{\text{макс}})=(n+1)\,P.$$

Из (13.15) и (13.16) следует:

$$k_{\text{п}}=(n+1)^{\frac{1}{n}}; \quad k_{\text{п}}=n+1. \qquad (13.23)$$

Зависимости (13.23) приведены на рис. 13.10.

Движение системы в области разгрузки определяется из решения уравнения (13.18) при начальных условиях $y(t_m)=y_{\text{макс}}$; $\dot{y}(t_m)=0$, где t_m находится из (13.20) при $y=y_{\text{макс}}$.

При действии на систему мгновенного импульса величиной i уравнение (13.17) следует интегрировать, полагая $P(t)=0$,

$$y(0)=0; \quad \frac{dy}{dt}(0)=\frac{i}{m}.$$

В этом случае $D_1=\dfrac{i^2}{2m}$, и из (13.19) получаем уравнение для определе-

ния максимального прогиба:

$$\int_0^y R(y)\,dy = \frac{i^2}{2m}.$$

Для системы с восстанавливающей силой (13.22) имеем:

$$y_{\text{макс}} = \left[\frac{(n+1)}{k}\cdot\frac{i^2}{2m}\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

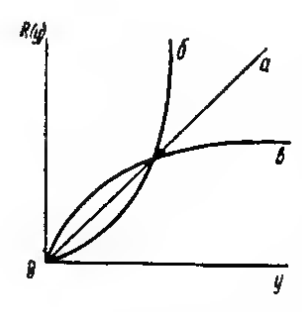


Рис. 13.9. Виды восстанавливающих сил

Рис. 13.10. Величины коэффициентов динамичности $k_{\text{и}}$ и $k_{\text{п}}$

Идеальная упруго-пластическая система. В этом случае

$$\left.\begin{aligned} &R(y) = cy \text{ при } y \leqslant \frac{R_0}{c} = y_0; \\ &R(y) = R_0 = \text{const при } y > \frac{R_0}{c}. \end{aligned}\right\} \qquad (13.24)$$

Уравнение (13.17) распадается на два линейных дифференциальных уравнения:

$$m\frac{d^2y_1}{dt^2} + cy_1 = P(t) \text{ при } y_1 \leqslant y_0; \qquad (13.25)$$

$$m\frac{d^2y_2}{dt} + R_0 = P(t) \text{ при } y_2 > y_0. \qquad (13.26)$$

Начальные условия для уравнения (13.26) получаются из решения уравнения (13.25) при $t = t_0$, $y_2 = y_0$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_1}{dt}(t_0),$$

где t_0 — время, соответствующее окончанию упругой стадии и определяемое из уравнения

$$y_1(t) = y_0 = \frac{R_0}{c}.$$

При $P(t) = \text{const}$ выражения для $k_н = R_0/P$ и для $k_п$ имеют вид:

$$k_н = \frac{1}{1 - 0{,}5\frac{y_0}{y}}; \quad k_п = k_н\left(1 + 0{,}5\,\frac{2 - k_н}{k_н - 1}\right). \tag{13.27}$$

На рис. 13.11 приведены графики коэффициентов динамичности нагрузки в зависимости от $\frac{y}{y_0} = \frac{cy}{R_0}$ и $\lambda\theta$ для различных видов кратковременных нагрузок, где $\lambda = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

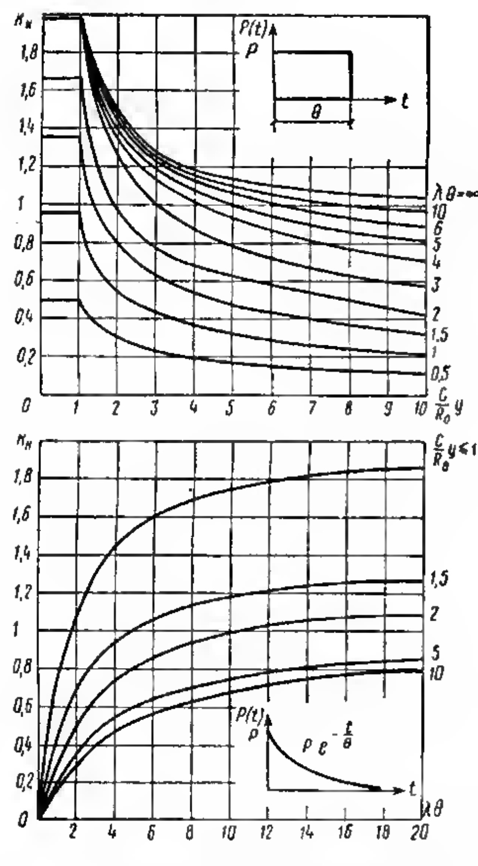
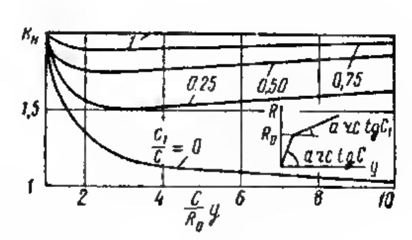


Рис. 13.11. Величины коэффициентов динамичности $k_н$ для упруго-пластической системы

Рис. 13.12. Величины коэффициентов динамичности $k_н$ для упруго-пластической системы с упрочнением



Упруго-пластическая система с линейным упрочнением. В этом случае:

$$\left.\begin{aligned} R(y) &= cy \text{ при } y \leq y_0 = \frac{R_0}{c}; \\ R(y) &= c_1 y + R_0\left(1 - \frac{c_1}{c}\right) \text{ при } y > y_0, \end{aligned}\right\} \tag{13.28}$$

где c_1 — жесткость системы в стадии упрочнения.

Уравнение (13.17) распадается на два линейных дифференциальных уравнения:

$$m\frac{d^2 y_1}{dt^2}+cy_1=P(t), \quad y_1 \leqslant y_0; \tag{13.29}$$

$$m\frac{d^2 y_2}{dt^2}+c_1 y_2=P(t)-R_0\left(1-\frac{c_1}{c}\right); \quad y_2>y_0. \tag{13.30}$$

Начальные условия для уравнения (13.30) получаются из решения уравнения (13.29).

Величина коэффициента динамичности нагрузки при действии на систему постоянной во времени нагрузки $P(t)=\text{const}$ равна:

$$\left.\begin{aligned} &k_н=2 \text{ при } 0\leqslant y\leqslant y_0;\\ &k_н=\left(\frac{2(y/y_0)^2}{c/c_1-1}+2\frac{y}{y_0}\right):\frac{(y/y_0)^2}{c/c_1-1}+2\frac{y}{y_0}-1 \text{ при } y_0<y.\end{aligned}\right\} \tag{13.31}$$

Графики коэффициентов $k_н$ приведены на рис. 13.12.

Идеальная жестко-пластическая система. В этом случае:

$$\left.\begin{aligned} &y=0 \quad\quad\quad \text{при } P(t)\leqslant R_0;\\ &R(y)=R_0 \text{ при } P(t)\geqslant R_0.\end{aligned}\right\} \tag{13.32}$$

Уравнение движения системы имеет вид:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=P(t)-R_0. \tag{13.33}$$

Интегрирование уравнения (13.33) при нулевых начальных условиях дает:

$$m\frac{dy}{dt}=\int_0^t P(t)\,dt-R_0 t;$$

$$my=\int_0^t\int_0^t P(t)\,dt^2-\frac{R_0 t^2}{2}.$$

При $P(t)=P_0(1-t/\theta)$ имеем:

$$k_н=\frac{R_0}{P_0}=1-\sqrt[3]{\frac{3}{2}\cdot\frac{y_{макс}\,m}{P_0\theta^2}}, \tag{13.34}$$

где $y_{макс}$ — максимальное перемещение системы.

Для идеальной жестко-пластической системы всегда $k_н<1$.

Хрупко разрушающаяся система. В этом случае (см. рис. 13.4):

$$\left.\begin{aligned} &R(y)=cy \text{ при } y\leqslant y_0=R_0/c;\\ &R(y)=-c_1 y+R_0\left(1+\frac{c_1}{c}\right)\\ &\text{при } y_п=y_0+\frac{R_0}{c_1}>y>y_0.\end{aligned}\right\} \tag{13.35}$$

Дифференциальные уравнения колебаний имеют вид:

$$m\frac{d^2 y_1}{dt}+cy_1=P(t); \quad y_1\leqslant y_0; \tag{13.36}$$

$$m\frac{d^2y_2}{dt^2} - c_1 y_2 = P(t) - R_0\left(1+\frac{c_1}{c}\right); \quad y_0 \leqslant y_2 \leqslant y_п. \tag{13.37}$$

При $P(t) = \text{const}$, $P > R_0/2$ максимальное перемещение равно:

$$y_{2макс} = \frac{1}{s}\sqrt{\left(\frac{R}{ms^2}\right)^2 - \dot{y}_{20}^2} - \frac{R}{ms^2}, \tag{13.38}$$

где

$$s^2 = \frac{c_1}{m}; \quad R = P - R_0\left(1+\frac{c_1}{c}\right);$$

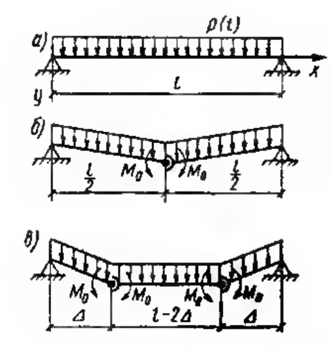
$$\dot{y}_{20} = \frac{P}{c}\sqrt{\frac{c}{m}}\sqrt{2\frac{R_0}{P}\left(1-\frac{R_0}{P}\right)}. \tag{13.39}$$

13.7. Расчет балочных конструкций

Балка с идеальной жестко-пластической диаграммой деформации [5, 12]

Балка считается неподвижной до тех пор, пока в каком-либо сечении изгибающий момент не достигнет предельной величины. После этого начинается движение по схеме абсолютно жестких стержней, соединенных пластическими шарнирами или пластическими участками конечной длины. Пластические шарниры могут быть стационарными (неподвижными) и нестационарными (перемещающимися по длине балки). Длины пластических участков могут меняться во времени.

Перед расчетом назначаются места расположения пластических шарниров, после чего определяется движение балки. Для проверки принятой расчетной схемы вычисляются изгибающие моменты, вызываемые действующей нагрузкой и силами инерции. Если величины изгибающих моментов меньше предельного значения или равны ему, то принятая расчетная схема правильна. Если же изгибающий момент на каком-либо участке балки превышает предельную величину, то необходимо изменить расчетную схему: ввести не-



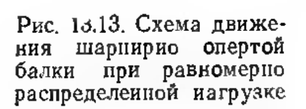


Рис. 13.13. Схема движения шарнирно опертой балки при равномерно распределенной нагрузке

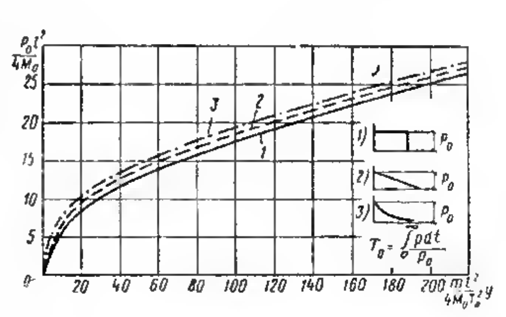


Рис. 13.14. Максимальный прогиб шарнирно опертой балки при действии равномерно распределенной кратковременной нагрузки

стационарные шарниры пластичности вместо стационарных; жесткие участки между нестационарными шарнирами заменить пластическими зонами и т. п.

Шарнирно опертая балка

Равномерно распределенная нагрузка $p(t)$. При $\frac{pl^2}{8} \leqslant M_0$ балка двигаться не будет.

При

$$M_0 < \frac{pl^2}{8} \leqslant 3M_0 \tag{13.40}$$

в середине балки образуется стационарный шарнир пластичности и движение балки происходит вследствие вращения относительно опор двух жестких участков (рис. 13.13, *а, б*). Уравнение движения

$$\frac{ml^3}{24}\ddot{\varphi} = \frac{p(t)l^2}{8} - M_0, \tag{13.41}$$

где φ — пластический угол поворота половины балки.

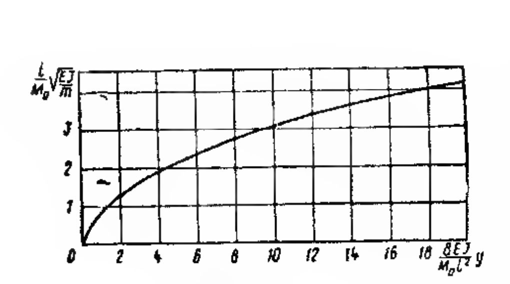


Рис. 13.15. Максимальный прогиб шарнирно опертой балки при действии равномерно распределенного мгновенного импульса

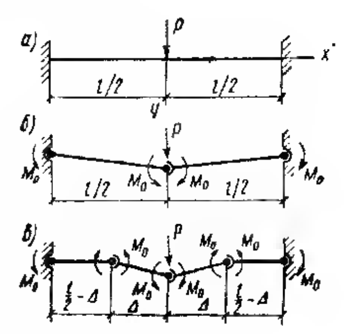
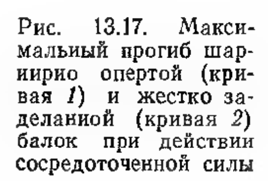


Рис. 13.16. Схемы движения шарнирно опертой балки при действии сосредоточенной силы



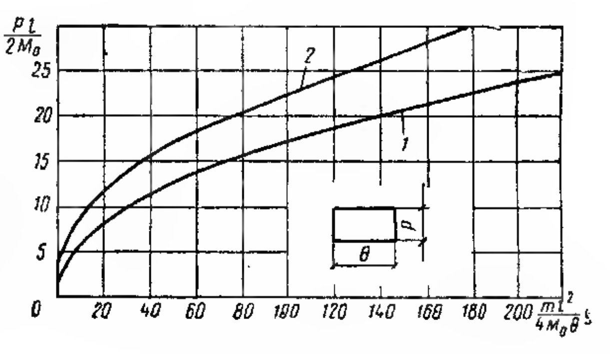


Рис. 13.17. Максимальный прогиб шарнирно опертой (кривая *1*) и жестко заделанной (кривая *2*) балок при действии сосредоточенной силы

При $\frac{pl^2}{8} > 3M_0$ максимальный изгибающий момент, вызываемый нагрузкой и силами инерции, будет больше M_0, что свидетельствует о неточности схемы балки со стационарным пластическим шарниром. В этом случае в балке образуются два нестационарных шарнира пластичности, разбивающих балку на три жестких участка (рис. 13.13, *в*).

Скорость перемещения среднего участка равна:

$$m\frac{dy_2}{dt} = \int_0^t p(t)\,dt. \tag{13.42}$$

Угловая скорость вращения крайних дисков находится из выражения

$$\frac{m\Delta}{2}\dot{\varphi}_1 = \int_0^t p(t)\,dt, \tag{13.43}$$

где координата пластического шарнира Δ равна:

$$\Delta = 24M_0\frac{t}{\int_0^t p(t)\,dt}. \tag{13.44}$$

При возрастающей во времени нагрузке шарниры пластичности перемещаются к опорам, а при убывающей — к середине балки.

На рис. 13.14 приведен график зависимости максимального прогиба балки от величины кратковременной нагрузки, изменяющейся по различным законам.

В случае действия на балку равномерно распределенного мгновенного импульса шарниры пластичности образуются в момент начала движения вблизи опорных сечений и затем перемещаются к середине балки, где, сливаясь, образуют стационарный шарнир пластичности. Поэтому движение балки рассматривается в двух фазах. Зависимость максимального прогиба от величины мгновенного импульса приведена на рис. 13.15.

Сосредоточенная сила в середине пролета. При $\frac{Pl}{4} < M_0$ балка двигаться не будет; при $M_0 \leqslant \frac{Pl}{4} \leqslant 9M_0$ движение по схеме с одним шарниром (рис. 13.16, *б*); при $\frac{Pl}{4} > 9M_0$ движение по схеме с тремя шарнирами (рис. 13.16, *в*).

Зависимость прогиба от величины и времени действия силы приведена на рис. 13.17 (кривая *1*).

Жестко заделанная балка

Равномерно распределенная нагрузка. Возможные схемы движения балки приведены на рис. 13.18. Если предельные опорные и пролетный изгибающие моменты равны, то для определения перемещений можно использовать формулы, полученные для расчета шарнирно опертой балки, заменив M_0 на $2M_0$.

Сосредоточенная сила в середине пролета. При $\frac{Pl}{8} < M_0$ движения не будет; при $M_0 \leqslant \frac{Pl}{8} \leqslant 6M_0$ — движение по схеме с тремя шарнирами пластич-

ности (рис. 13.19, *б*); при $6M_0 < \frac{Pl}{8}$ — движение с пятью шарнирами пластичности (рис. 13.19, *в*).

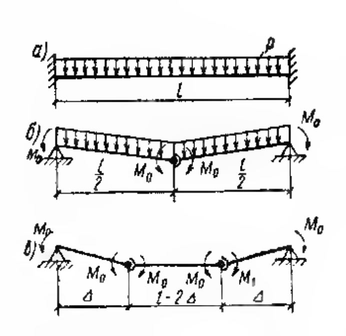


Рис. 13.18. Схемы движения жестко заделанной балки при равномерно распределенной нагрузке

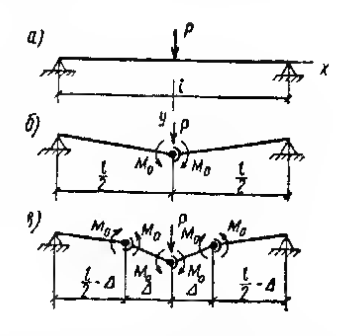


Рис. 13.19. Схемы движения жестко заделанной балки при действии сосредоточенной силы

Зависимость прогиба балки от величины и времени действия силы приведена на рис. 13.17 (кривая *2*).

Балка с идеальной упруго-пластической диаграммой деформаций при равномерно распределенной нагрузке

Шарнирно опертая балка

Зависимость изгибающего момента от кривизны

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2};$$

$$M = -\frac{EJ}{\rho} \text{ при } \frac{1}{\rho} \leqslant \frac{1}{\rho_0};$$

$$M = M_0 \text{ при } \frac{1}{\rho} > \frac{1}{\rho_0}.$$

Упругая стадия. В упругой стадии дифференциальное уравнение колебаний имеет вид:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t) \qquad (13.45)$$

при граничных условиях

$$y\Big|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0.$$

Для железобетонной балки жесткость $EJ = B$ определяется с учетом раскрытия трещин в растянутой зоне и принимается постоянной по длине про-

лета и равной жесткости в месте максимального изгибающего момента. При решении уравнеиия (13.45) методом Бубнова — Галеркиа в случае равномерно распределенной иагрузки выражение для $y(x, t)$ может быть принято в виде:

$$y(x, t) = T(t)\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{x}{l}\right]. \qquad (13.46)$$

Уравнеине для фуикцнн $T(t)$ будет:

$$\ddot{T}(t) + \lambda^2 T(t) = Ap(t), \qquad (13.47)$$

$$\lambda^2 = \frac{189 \cdot 16}{31\, l^4} \cdot \frac{B}{m} = \frac{97{,}6}{l^4} \cdot \frac{B}{m}; \; A = \frac{126}{31\, m}. \qquad (13.48)$$

Решение уравнения (13.47) при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$T(t) = \frac{A}{\lambda} \int_0^t p(\tau) \sin \lambda (t - \tau)\, d\tau = \frac{pl^4}{24\, B} f(\lambda t). \qquad (13.49)$$

Изгибающий момент и скорость равиы:

$$M(x, t) = BT(t) \frac{12}{l^2}\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{pl^2}{2}\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] f(\lambda t); \qquad (13.50)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{pl^4}{24B} \lambda \left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{x}{l}\right] f'(\lambda t). \qquad (13.51)$$

Прн решении уравнения (13.45) методом Фурье получим:

$$y(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x; \qquad (13.52)$$

$$T_n(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p_n(\tau) \sin \omega_n (t - \tau)\, d\tau, \qquad (13.53)$$

где

$$p_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l p(t) \sin \frac{n\pi}{l} x dx; \qquad (13.54)$$

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{B}{m}}; \qquad (13.55)$$

$$M(x, t) = B \frac{\pi^2}{l^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x. \qquad (13.56)$$

Балка работает в упругой стадии до момента времеии t_0, в который изгибающий момент в средием сечении достигает предельной величины M_0.

Для железобетонной балки величина M_0 равна:

$$M_0 = \sigma_0^{д} F_a (h_0 - 0{,}5\,x),$$

где $\sigma_0^{д}$ — динамический предел текучести, принимаемый по п. 13.3.

Пластическая стадия. При условии (13.40) балка представляет собой два жестких стержня, соединенных шарниром пластичности. Уравнение движения балки при равномерно распределенной нагрузке

$$\frac{ml^3}{24}\ddot{\varphi}(t) = \frac{p(t)\,l^2}{8} - M_0. \tag{13.57}$$

Прогиб равен:

$$w(x,\,t) = \varphi(t)\,x + y(x,\,t_0),\ \ 0 \leqslant x \leqslant l/2. \tag{13.58}$$

Начальные условия

$$\varphi\Big|_{t=t_0} = 0, \quad \dot{\varphi}\Big|_{t=t_0} = \dot{\varphi}_0, \tag{13.59}$$

где начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$ определяется из равенства количеств движения в конце упругой и в начале пластической стадии:

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{4}{l^2}\int\limits_0^l \dot{y}(x,\,t_0)\,dx. \tag{13.60}$$

Интегрируя (13.57), получим:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{24}{ml^3}\left[\frac{l^2}{8}\int\limits_0^t p(\tau)\,d\tau - M_0 t\right] + \dot{\varphi}_0;$$

$$\varphi(t) = \frac{24}{ml^3}\left[\frac{l^2}{8}\int\limits_0^t\int\limits_0^t p(\tau)\,d\,\tau^2 - \frac{M_0\,t^2}{2}\right] + \dot{\varphi}_0 t,$$

Величина максимального угла поворота $\varphi_{макс}$ будет достигнута в момент времени $t_{макс}$, при котором $\dot{\varphi}_0 = 0$. Тогда $\varphi_{макс} = \varphi(t_{макс})$. Полученные зависимости справедливы, если остановка конструкции происходит раньше, чем нагрузка прекращает свое действие. Если это условие не соблюдается, необходимо рассмотреть движение конструкции после прекращения действия нагрузки.

Для балочных конструкций коэффициенты динамичности для изгибающих моментов $(k_{н}^{M})$ и поперечных сил $(k_{н}^{Q})$ имеют разные величины.

Для внезапно приложенной постоянной во времени нагрузки при учете одного члена ряда (13.52) имеем:

$$w\left(\frac{l}{2},\ t_{макс}\right) = w_{макс} = y_0\left[1 + 0{,}65\,\frac{2 - k_{н}^{(M)}}{k_{н}^{(M)} - 1}\right], \tag{13.61}$$

где $y_0 = \dfrac{M_0\,l^2}{9{,}6\,B}$ — прогиб балки в середине пролета в конце упругой стадии;

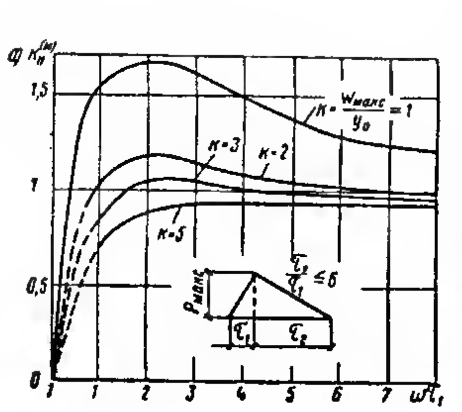
$k_{н}^{(M)} = \dfrac{M_0}{\dfrac{pl^2}{8}}$ — коэффициент динамичности для изгибающего момента.

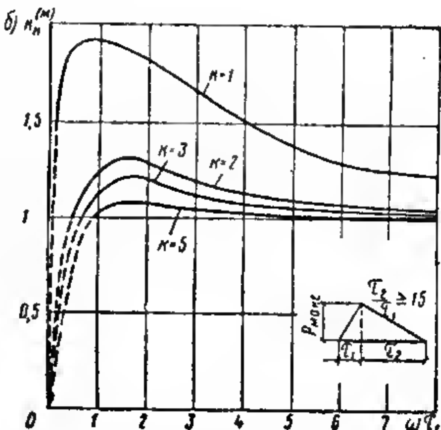
Из (13.61) получаем зависимость коэффициента динамичности $k_н^{(M)}$ от отношения прогибов k:

$$k_н^{(M)} = \frac{k + 0,3}{k - 0,35}.$$

При изменении k от 1 до ∞ $k_н^{(M)}$ меняется от 2 до 1.

Поперечные силы в балке при ее работе в пластической стадии можно приближенно найти из равенства: $Q(x,t) = p(t)\left(\frac{l}{2} - x\right) - \int\limits_x^{l/2} m\ddot{\varphi}x dx.$





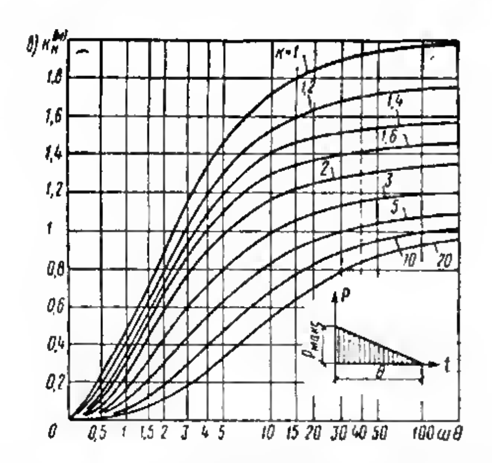


Рис. 13.20. Величины коэффициентов $k_н^{(M)}$ при различных законах изменения нагрузки во времени

Для постоянной во времени нагрузки

$$k_н^{(Q)} = \frac{1 + 3k_н^{(M)}}{4}.$$

На рис. 13.20 даны графики зависимости величины коэффициента $k_н^{(M)}$ от $k = w_m/y_0$ при различных законах изменения нагрузки во времени.

При действии равномерно распределенного мгновенного импульса интенсивностью i максимальный упруго-пластический прогиб балки равен:

$$y_{макс} = \frac{4M_0 l^2}{\pi^3 EJ}\left(0,262 + 0,85\frac{i^2 EJ}{M_0^2 m}\right).$$

Жестко заделанная балка

Упругая стадия. Дифференциальное уравнение колебаний имеет вид (13.45) при граничных условиях: $y|_{x=0,l}=0$; $\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0,l}=0$.

При решении методом Бубнова — Галеркина принимаем:

$$y(x,t)=T(t)\left[\left(\frac{x}{l}\right)^4-2\left(\frac{x}{l}\right)^3+\left(\frac{x}{l}\right)^2\right].$$

Для функции $T(t)$ в случае постоянной во времени нагрузки получаем уравнение

$$\ddot{T}(t)+\lambda^2 T(t)=\frac{21p}{16m},$$

где

$$\lambda^2=\frac{504}{l^4}\cdot\frac{EJ}{m}.$$

Отсюда имеем:

$$T(t)=\frac{pl^4}{384EJ}(1-\cos\lambda t).$$

Упругая стадия продолжается до момента времени t_1, когда изгибающий момент в опорных сечениях достигнет предельной величины M_0, т. е.

$$\frac{pl^2}{12}(1-\cos\lambda t_1)=M_0.$$

Упруго-пластическая стадия. Балка работает по схеме шарнирно опертой балки с сосредоточенными постоянными моментами M_0, приложенными в опорных сечениях.

Прогиб балки принимается в виде:

$$y(x,t)=T_2(t)\left[\left(\frac{x}{l}\right)^4-2\left(\frac{x}{l}\right)^3+\frac{x}{l}\right]+\frac{M_0l^2}{32EJ}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^4-2\left(\frac{x}{l}\right)^3+\left(\frac{x}{l}\right)^2\right].$$

Начальная скорость определяется из условия равенства кинетических энергий или количеств движения в конце упругой и в начале упруго-пластической стадии.

Упруго-пластическая стадия продолжается до момента времени t_2, когда изгибающий момент в середине пролета балки достигнет предельной величины M_0.

Пластическая стадия. Балка представляет собой два жестких стержня, соединенных шарниром пластичности. В этом шарнире и в опорных сечениях приложены сосредоточенные моменты.

Уравнение движения балки

$$\frac{ml^3}{24}\ddot{\varphi}=\frac{pl^2}{8}-2M_0.$$

Прогиб балки в середине пролета

$$w\left(\frac{l}{2},t\right)=\varphi(t)\frac{l}{2}+y\left(\frac{l}{2},t_2\right).$$

Начальная угловая скорость определяется из условия равенства кинетических энергий или количеств движения в конце упруго-пластической и в начале пластической стадии.

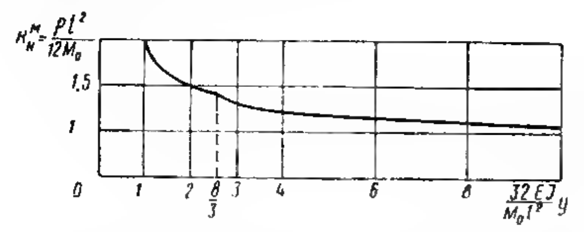


Рис. 13.21. Величины коэффициента $k_{н1}^{(M)}$ для жестно заделанной балки

На рис. 13.21 даны графики динамических коэффициентов в зависимости от отношения полного прогиба к прогибу в конце упругой стадии.

Шарнирно опертая балка с хрупкой диаграммой деформаций при равномерно распределенной нагрузке

Предполагается, что в центральном сечении балки изгибающий момент после достижения предельного значения $M_{пр}$ уменьшается по закону

$$M = M_{пр} - a\,\varphi, \tag{13.62}$$

где

$$a = \frac{M_{пр}}{\varphi_{пр}};$$

$\varphi_{пр}$ — приращение угла поворота половины балки от конца упругой стадии до полной потери несущей способности.

Уравнение движения балки в пластической стадии

$$\frac{ml^3}{24}\ddot{\varphi} - \frac{p(t)\,l^2}{8} + M_{пр} - a\varphi = 0. \tag{13.63}$$

Начальные условия имеют вид (13.59).

При постоянной во времени нагрузке выражение для полного прогиба в середине балки имеет вид:

$$w_{макс} = \frac{M_{пр} l^2}{9{,}6\,B}\left[1 + k_1\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) - \frac{\sqrt{k_1}}{\gamma}\sqrt{(\gamma - 1)^2 k_1 - 1{,}42\,r^2}\right], \tag{13.64}$$

где

$$k_1 = \frac{\varphi_{пр} l}{2y_0}; \quad \gamma = \frac{M_0 \cdot 8}{pl^2}; \quad r = \sin \omega t_0.$$

При этом должно быть $\gamma \geqslant 1{,}19/\sqrt{k_1}$.

Вследствие того что сопротивление конструкции уменьшается с ростом прогиба, для каждого вида нагрузки существует определенная величина прогиба $w_{пр}$, при превышении которого произойдет обрушение конструкции. В рассматриваемом случае его величина равна:

$$w_{пр} = y_0\left(1 - \frac{1{,}19\,rk_1}{1{,}19\,r + \sqrt{k_1}}\right). \tag{13.65}$$

При этом

$$\gamma_{\text{пр}} = 1 + \sqrt{\frac{1,34}{1,34 + k_1}}\,, \tag{13.66}$$

т. е. при $\gamma \geqslant \gamma_{\text{пр}}$ $w_{\text{макс}} < w_{\text{пр}}$; при $\gamma < \gamma_{\text{пр}}$ $w_{\text{макс}} = \infty$.

Например: $k_1 = 10$, $\gamma_{\text{пр}} = 1{,}36$, $w_{\text{пр}} = 3{,}64\, y_0$; $k_1 = 50$, $\gamma_{\text{пр}} = 1{,}17$, $w_{\text{пр}} = 8{,}15\, y_0$; $k_1 = 100$, $\gamma_{\text{пр}} = 1{,}12$, $w_{\text{пр}} = 11{,}70\, y_0$.

Шарнирно опертая балка с криволинейной диаграммой деформаций

При криволинейной диаграмме деформаций $M = M(1/\rho)$ расчет балки может быть проведен вариационным методом, исходя из уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_{\text{к}}}\right) + \frac{\partial V}{\partial y_{\text{к}}} = -\frac{\partial W}{\partial y_{\text{к}}}, \tag{13.67}$$

где T — кинетическая энергия системы; V — потенциальная энергия системы; W — потенциал внешней нагрузки; $y_{\text{к}}$ — обобщенные координаты.

При этом имеем:

$$T = \int_0^l \frac{m w_t^2}{2}\, dx;$$

$$V = \int_0^l \left[\int_0^{\frac{1}{\rho}} M\left(\frac{1}{\rho}\right) d\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] dx; \tag{13.68}$$

$$W = -\int_0^l pw\,dx.$$

Если зависимость изгибающего момента от кривизны $\frac{1}{\rho} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ представлена многочленом вида

$$M = \sum B_n \left(\frac{1}{\rho}\right)^n, \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

то

$$V = \int_0^l \left[\sum_{n=1,3,\ldots} \frac{B_n}{(n+1)} w_{xx}^{n+1} - pw\right] dx. \tag{13.69}$$

Выражение для прогиба $w(x, t)$ можно искать в виде ряда по формам собственных колебаний соответствующей упругой балки

$$w = \sum_{k=1,2,\ldots} y_{\text{к}}(t)\, X_k(x). \tag{13.70}$$

При учете одного члена ряда получим:

$$T = \frac{ma_1}{2}\,\dot{y}_1^2;\; V = \sum_{n=2,3}^{N+1} b_n y_1^n;\; W_1 = -p_1 y_1, \tag{13.71}$$

где

$$a_1 = \int_0^l X_1^2\,dx; \quad p_1 = \int_0^l pX_1 dx;$$

$$b_n = \frac{1}{n}\int_0^l B_{n-1}\left(X_1''\right)^n dx.$$

Подставив (13.71) и (13.69) в (13.67), получим уравнение движения системы

$$\overline{m}\,\ddot{y}_1 + \sum_{k=1,2,\ldots}^{N} F_n y_1{}^n = p_1. \tag{13.72}$$

где

$$F_n = \int_0^l B_n\left(X_1''\right)^{n+1} dx; \ \overline{m} = ma_1.$$

Для балки прямоугольного сечения из материала с кривой деформаций в виде (13.11) зависимость $M(1/\varrho)$ будет:

$$\left.\begin{aligned} M &= B_1\frac{1}{\rho} - B_3\left(\frac{1}{\rho}\right)^3; \\ B_1 &= \frac{E_1\,bh^3}{12}; \quad B_3 = \frac{E_3\,bh^5}{80}. \end{aligned}\right\} \tag{13.73}$$

Уравнение (13.72) при этом имеет вид:

$$\overline{m}\ddot{y} + F_1 y - F_3 y^3 = \frac{4}{\pi}\,p\,(t), \tag{13.74}$$

где для шарнирно опертой балки:

$$F_1 = \frac{\pi^4}{l^4}\cdot\frac{B_1}{m}; \ F_3 = \frac{3\pi^8}{4l^8}\cdot\frac{B_3}{m}.$$

В случае постоянной во времени нагрузки $p(t) = \text{const}$ из (13.74) получаем уравнение для определения максимального прогиба (см. п. 13.6):

$$f\,(y) = \frac{F_1 y}{2} - \frac{F_3}{4}\,y^3 - \frac{4}{\pi}\,p = 0. \tag{13.75}$$

Наименьший положительный корень уравнения (13.75) дает значение максимального прогиба. Если уравнение (13.75) не имеет положительных корней, то это значит, что при данной нагрузке p произойдет разрушение конструкции. Из уравнения (13.75) может быть найдена предельная величина нагрузки при условии, что (13.75) имеет один положительный корень. Предельный прогиб находится из уравнения

$$\frac{df}{dy} = \frac{F_1}{2} - \frac{3}{4}\,F_3\,y^2 = 0,$$

откуда

$$y_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{2F_1}{3F_3}} = 0{,}2465\,\frac{l^2}{h}\sqrt{\frac{E_1}{E_3}}. \tag{13.76}$$

Подставив (13.76) в (13.75), найдем величину предельной нагрузки

$$p_{пр} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{y_{пр}}{2}\left(F_1 - \frac{F_3}{2} y_{пр}^2\right). \qquad (13.77)$$

13.8. Расчет упруго-пластических прямоугольных пластинок, опертых по контуру [12, 15]

Упругая стадия. При расчете на кратковременную нагрузку дифференциальное уравнение колебаний пластинки (тонкой плиты) целесообразно решать методом Бубнова — Галеркина в первом приближении, задавая форму колебаний в виде произведения балочных функций.

Для шарнирно опертой по контуру плиты имеем

$$w(x, y, t) = T(t) \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y.$$

При равномерно распределенной нагрузке функция $T(t)$ определяется из уравнения

$$\ddot{T} + \lambda^2 T = \frac{16\, p(t)}{\pi^2}, \qquad (13.78)$$

где

$$\lambda = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \sqrt{\frac{D}{m}}. \qquad (13.79)$$

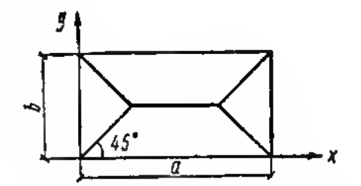


Рис. 13.22. Схема движения прямоугольной пластинки

Упругая стадия продолжается до момента времени, когда наибольший изгибающий момент достигает предельной величины. При $a \geqslant b$ время конца упругой стадии находится из уравнения $M_y(a/2,\ b/2,\ t) = M_{yo}$, где M_{yo} — предельная величина изгибающего момента в сечении, перпендикулярном оси Oy.

Пластическая стадия. После достижения изгибающим моментом M_y в среднем сечении предельной величины предполагается, что в плите мгновенно образуются линейные шарниры пластичности по схеме рис. 13.22. Участки плиты между шарнирами пластичности рассматриваются как жесткие диски.

Уравнение движения плиты, полученное исходя из принципа возможных перемещений, будет:

$$\frac{mb^3}{24}(2a - b)\ddot{\varphi} = \frac{pb^2(3a - b)}{12} - 2(M_{yO}\, a + M_{xO}\, b). \qquad (13.80)$$

Пластический прогиб равен:

$$w_{п} = \varphi \frac{b}{2}.$$

Начальная угловая скорость, определенная из равенства количеств движения плиты в конце упругой и в начале пластической стадии, равна:

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{12}{b^3(3a - b)} \int_0^b \int_0^a \dot{w}(x, y, t)\, dx\, dy. \qquad (13.81)$$

При постоянной во времени нагрузке выражение для максимального прогиба будет:

$$w_{макс} = w_0 \left[1 + 4{,}8 \frac{(2 - \psi)(2 - \gamma)}{(3 - \psi)^3 (\gamma_1 - 1)}\right], \qquad (13.82)$$

где

$$\left.\begin{aligned} w_0 = \frac{M_{yO}}{\pi^2 D\left(\frac{\nu}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}; \quad \psi = \frac{b}{a} \leqslant 1; \\ \gamma = \frac{\pi^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) M_{Oy}}{16\,p\left(\frac{\nu}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}; \quad \gamma_1 = \frac{24\,(M_{yO}\,a + M_{xO}\,b)}{pb^2\,(3a-b)}. \end{aligned}\right\} \qquad (13.83)$$

Для равномерно распределенного мгновенного импульса интенсивностью i максимальный прогиб равен:

$$w_{\text{макс}} = w_0\left[1 + \frac{2{,}82\,(2-\psi)\,(1+\psi^2)^2\,\mathrm{ctg}\,\lambda t_1}{(3-\psi)^2\left(1+\psi\,\frac{M_{xO}}{M_{yO}}\right)(1+\nu\psi^2)}\right], \qquad (13.84)$$

где

$$\sin \lambda t_1 = \frac{\pi^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 M_{yO}}{16 i\lambda\left(\frac{1}{b^2}+\frac{\nu}{a^2}\right)}.$$

Для квадратной плиты при $M_{xO} = M_{yO} = M_0$

$$w = w_0\left(1 + \frac{1{,}41}{1+\nu}\,\mathrm{ctg}^2\,\lambda t_1\right). \qquad (13.85)$$

13.9. Расчет упруго-пластических арок кругового очертания

Упругая стадия. В упругой стадии дифференциальное уравнение колебаний имеет вид:

$$\frac{\partial^6 u}{\partial \alpha^6} + 2\,\frac{\partial^4 u}{\partial \alpha^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{mR^4}{EJ}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial \alpha^2\,\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{R^4}{EJ}\left(\frac{\partial p_w}{\partial \alpha} - p_u\right), \qquad (13.86)$$

где $u(\alpha, t)$ — тангенциальное перемещение; R — радиус арки; p_w, p_u — проекции нагрузки p на оси w и u $p_w = p(t) f_1(\alpha)$; $p_u = p(t) f_2(\alpha)$.

Радиальное перемещение равно: $w = du/d\alpha$. Изгибающий момент и продольная сила:

$$M = -\frac{EJ}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + w\right); \quad N = \frac{EJ}{R^3}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right) - \left(p_w - m\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) R.$$

Уравнение (13.86) может быть решено методом Фурье. Однако при этом возникает необходимость в трудоемких вычислениях.

Значительно меньшее количество вычислений и достаточную точность можно получить, применив метод Бубнова — Галеркина. В этом случае выражение для $u(\alpha, t)$ ищется в виде: $u(\alpha, t) = T(t)\,u_0(\alpha)$, где $u_0(\alpha)$ — форма тангенциальных перемещений от статической нагрузки, распределенной по тому же закону, что и динамическая нагрузка; $u_0(\alpha)$ находится из уравнения

$$\frac{\partial^6 u_0}{\partial \alpha^6} + 2\,\frac{\partial^4 u_0}{\partial \alpha^4} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} - f_2.$$

Проделав вычисления согласно методу Бубнова — Галеркина, получим уравнение для функции $T(t)$:

$$\ddot{T}(t) + \lambda^2 T = \frac{R^4}{EJ}\lambda^2 p(t), \tag{13.87}$$

где

$$\lambda^2 = \frac{\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\left(f_1' - f_2\right) u_0\, d\alpha}{\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0} u_0\left(u_0'' - u_0\right) d\alpha}\cdot\frac{EJ}{mR^4}.$$

Выражения для изгибающего момента и нормальной силы будут:

$$M(\alpha, t) = M^0(\alpha)\, T(t); \tag{13.88}$$

$$N(\alpha, t) = N^0(\alpha)\, T(t) + mRw_0(\alpha)\,\ddot{T}(t). \tag{13.89}$$

Здесь

$$M^0(\alpha) = -\frac{EJ}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial\alpha^2} + w_0\right);\quad N^0(\alpha) = \frac{EJ}{R^3}\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial\alpha^4} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial\alpha^2} - f_1\right).$$

Величину частоты радиальных колебаний λ можно принимать равной частоте собственных колебаний, соответствующей форме колебаний арки, близкой к форме перемещений от статической нагрузки.

Пластическая стадия. Для внецентренно сжатых или внецентренно растянутых элементов возможность работы в пластической стадии определяется соотношениями между продольной силой и изгибающим моментом, при которых в некоторых сечениях образуются шарниры пластичности. Эти соотношения зависят от деформационных свойств материала и формы поперечного сечения.

В табл. 13.2 для некоторых основных видов поперечных сечений элементов из идеального упруго-пластического материала приведены зависимости $M(N)$ в предельном состоянии.

Для железобетонного внецентренно сжатого элемента возможность образования шарнира пластичности определяется согласно СНиП II-В.1-62 *.

По выражениям (13.88)—(13.89), используя соответствующее условие возникновения шарнира пластичности, можно определить места расположения шарниров пластичности и время конца упругой стадии. Проверку следует начинать с сечения с максимальным изгибающим моментом.

При действии на арку симметричной динамической нагрузки возможная схема расположения шарниров пластичности будет иметь вид, показанный на рис. 13.23. Схема дана для бесшарнирной арки; для двухшарнирной арки следует положить $M_0^{(0)} = 0$, для трехшарнирной $M_0^{(0)} = M_0^{(2)} = 0$.

Разложим перемещение оси арки на горизонтальное v_x и вертикальное v_y. Выражения для них на различных участках арки будут:

на участке *0—1*

$$v_x^{(1)} = \varphi R\left(\cos\alpha - \cos\alpha_0\right);\quad v_y^{(1)} = \varphi R\left(\sin\alpha_0 - \sin\alpha\right);$$

на участке *1—2*

$$v_x^{(2)} = \varphi R\,\frac{(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)}{1 - \cos\alpha_1}(1 - \cos\alpha);\quad v_y^{(2)} = \varphi R\,\frac{e_1 + e_2\sin\alpha}{1 - \cos\alpha_1}.$$

Таблица 13.2

Профиль	Зависимость „изгибающий момент—продольная сила" в предельном состоянии
I (тонкостенный)	$\frac{M}{M_0}+\frac{N}{N_0}-1=0$
I	$\frac{M}{M_0}+\frac{9}{5}\left(\frac{N}{N_0}\right)^2-1=0,$ $\left(0\leqslant\frac{N}{N_0}\leqslant\frac{1}{3}\right);$ $\frac{5}{6}\frac{M}{M_0}+\frac{N}{N_0}-1=0,$ $\left(\frac{1}{3}<\frac{N}{N_0}\leqslant 1\right)$
□	$\frac{M}{M_0}+\frac{4}{3}\left(\frac{N}{N_0}\right)^2-1=0,$ $\left(0\leqslant\frac{N}{N_0}\leqslant\frac{1}{2}\right);$ $\frac{3}{4}\frac{M}{M_0}+\frac{N}{N_0}-1=0,$ $\left(\frac{1}{2}<\frac{N}{N_0}\leqslant 1\right)$
○	$\frac{M}{M_0}-\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{N}{N_0}=0$
▨	$\frac{M}{M_0}+\left(\frac{N}{N_0}\right)^2-1=0$

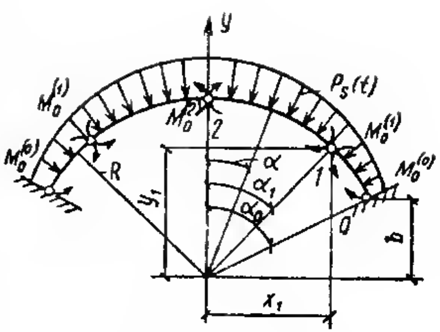


Рис. 13.23. Схема движения арки в пластической стадии

Здесь φ — угол поворота опорного сечения; $e_1=\sin\alpha_0-\sin\alpha_1-\sin(\alpha_0-\alpha_1)$; $e_2=\cos\alpha_1-\cos\alpha_0$.

В шарнирах пластичности *1* и *2* величины углов раскрытия будут равны:

$$\varphi_1=\varphi\frac{1-\cos\alpha_0}{1-\cos\alpha_1};\quad \varphi_2=2(\varphi_1-\varphi). \tag{13.90}$$

Уравнение движения арки в пластической стадии, полученное на основе принципа возможных перемещений, имеет вид:

$$mR^3\Pi_и\ddot{\varphi}=A_p-M_0^{(1)}\Pi_в,$$

где

$$\Pi_и=2\left\{\alpha_0-\alpha_1-\sin(\alpha_0-\alpha_1)+\frac{1}{(1-\cos\alpha_1)^2}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\alpha_1 e_1^2}{2}+e_2^2(\alpha_1-\sin\alpha_1)+e_1e_2(1-\cos\alpha_1)\right]\right\};$$

$$\Pi_в=\frac{1-\cos\alpha_0}{1-\cos\alpha_1}+\frac{M_0^{(0)}}{M_0^{(1)}}+\frac{M_0^{(2)}}{M_0^{(1)}}\cdot\frac{\cos\alpha_1-\cos\alpha_0}{1-\cos\alpha_1};$$

A_p — работа нагрузки на перемещениях арки при $\varphi=1$.

При нагрузке, изменяющейся вдоль оси арки по линейному закону

$$p_w=p(t)\left(1-\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)\ \text{при}\ \alpha>0, \tag{13.91}$$
$$p_u=0$$

получим:

$$mR^3\Pi_и \ddot{\varphi} = \frac{p(t) R^3}{\alpha_0} \Pi_p - M_0^{(1)} \Pi_в, \tag{13.92}$$

где

$$\Pi_p = (\alpha_0 - \alpha_1)\cos(\alpha_0 - \alpha_1) - \sin(\alpha_0 - \alpha_1) - \frac{e_1 f_1 + e_2 f_2}{1 - \cos\alpha_1};$$

$$f_1 = 1 - \cos\alpha_1 + (\alpha_0 - \alpha_1)\sin\alpha_1; \quad f_2 = \alpha_0 - \sin\alpha_1 - (\alpha_0 - \alpha_1)\cos\alpha_1.$$

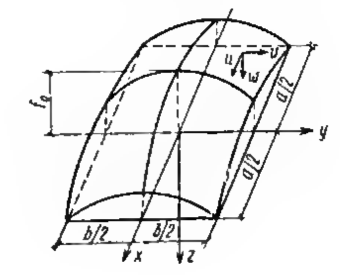


Рис. 13.24. Прямоугольная в плане пологая оболочка

Начальные условия: $\varphi|_{t=t_0} = 0$, $\dot{\varphi}_{t=t_0} = \dot{\varphi}_0$.

Начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$ определяется из условия равенства кинетических энергий в конце упругой $T_у$ и в начале пластической стадии $T_п$:

$$T_у = \frac{mR}{2}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (\dot{w}^2 + \dot{u}^2)\, d\alpha = \frac{mR}{2}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(w_0^2 + u_0^2\right) d\alpha\, \dot{T}^2_{(t_0)}; \tag{13.93}$$

$$T_п = mR\left[\int_0^{\alpha_1} \left(\dot{v}_x^{(2)^2} + \dot{v}_y^{(2)}\right) d\alpha + \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} \left(\dot{v}_x^{(1)^2} + \dot{v}_y^{(1)^2}\right) d\alpha = m\dot{\varphi}_0^2 R^3 \Pi_и. \tag{13.94}$$

Из равенства $T_у = T_п$ находим:

$$\dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(w_0^2 + u_0^2\right) d\alpha}{2\Pi_и}} \cdot \frac{\dot{T}(t_0)}{R}. \tag{13.95}$$

Интегрируя (13.92), получим:

$$mR^3\Pi_и \dot{\varphi} = \frac{\Pi_p R^2}{\alpha_0}\int_{t_0}^{t} p_{(t)}\, dt - M_0^{(1)} \Pi_в \left(t - t_0\right) + mR^3 \Pi_и \dot{\varphi}_0; \tag{13.96}$$

$$mR^3\Pi_и \varphi = \frac{\Pi_p R^3}{\alpha_0}\int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} p(t)\, dt - M_0^{(1)} \Pi_в \frac{(t - t_0)^2}{2} +$$

$$+ mR^3\Pi_и \dot{\varphi}_0 (t - t_0). \tag{13.97}$$

Найдя из условия $\dot{\varphi}(t)=0$ время t_m максимального перемещения арки, из (13.97) можно определить максимальную величину угла раскрытия в опорном шарнире пластичности $\varphi(t_m)$. Из выражений (13.90) определяются величины углов раскрытия в остальных шарнирах пластичности: $\varphi_1(t_m)$, $\varphi_2(t_m)$.

Условиями прочности арки являются:

$$\varphi(t_m) \leqslant \frac{1}{2}\varphi_{\text{оп}}^{\text{пр}};\quad \varphi_1(t_m) \leqslant \varphi_1^{\text{пр}};\quad \varphi_2(t_m) \leqslant \varphi_2^{\text{пр}},$$

где $\varphi_{\text{оп}}^{\text{пр}}$, $\varphi_1^{\text{пр}}$, $\varphi_2^{\text{пр}}$ — предельные величины углов раскрытия в шарнирах пластичности.

Для арки из жестко-пластического материала при действии нагрузки вида $p(t)=p\left(1-\frac{t}{\theta}\right)$

$$\left.\begin{aligned} t_m &= 2\theta(1-\gamma);\\ \varphi_{\text{макс}} &= \frac{2p\Pi_p\,\theta^2(1-\gamma)^3}{3\Pi_и\, mR\alpha_0}; \end{aligned}\right\} \qquad (13.98)$$

где

$$\gamma = \frac{M_0^{(1)}\,\alpha_0\,\Pi_в}{pR^2\Pi_p}.$$

13.10. Расчет железобетонных оболочек [12]

Пологие оболочки двоякой кривизны. Рассмотрим прямоугольную в плане пологую оболочку двоякой кривизны, опертую по всему контуру (рис. 13.24). Оболочка жестко заделана в бортовые элементы. Упругой стадией работы оболочки пренебрегаем.

Характер разрушения железобетонных оболочек определяется армированием бортовых элементов и может быть как хрупким, так и пластическим. В тех случаях когда напряжения в растянутой арматуре бортового ребра достигают предела текучести раньше, чем напряжение сжатия в бетоне оболочки достигает предела прочности, в оболочке могут развиться пластические деформации и она начнет деформироваться по схеме, приведенной на рис. 13.25.

Величины a_0 и b_0, определяющие схему разрушения, устанавливаются на основании экспериментов или экстремальных принципов и могут быть приняты при расчетах равными: $0{,}25\,b \leqslant b_0 = {}^1/_3 b$; $a_0 = b_0\,(b \leqslant a)$.

Уравнение движения оболочки при действии равномерно распределенной нагрузки $p(t)$ имеет вид:

$$m\frac{\Pi_и}{\sqrt{2}\,f_0}\ddot{\Delta} = p(t)\,\Pi_p - \Pi_a, \qquad (13.99)$$

где

$$\Pi_и = a_0^2(a-2a_0)(b-2a_0) + \frac{2}{3}\sqrt{f_0^2+a_0^2}\,(a_0^2+f_0^2)(a+b-4a_0) + $$
$$+ 2a_0\sqrt{f_0^2+a_0^2}\left(\frac{a_0^2}{3}+f_0^2\right);$$

$$\Pi_p = \left(ab - a_0 b - a_0 a - \frac{4}{3}a_0^2\right)a_0;\quad \Pi_a = 4\sqrt{2}\,F_a R_a f_0;$$

F_a — площадь поперечного сечения арматуры бортового элемента.

Начальные условия: $\Delta|_{t=t_0}=0$; $\dot{\Delta}|_{t=t_0}=0$. При нагрузке $p(t)=p(1-t/\theta)$ получим:

$$\Delta_{\text{макс}}=\frac{2\sqrt{2}\,p\theta^2\Pi_p f_0}{m\Pi_{\text{и}}}\left(1-\frac{\Pi_a}{p\Pi_p}\right)^3. \qquad (13.100)$$

Нормирование предельного состояния оболочки может производиться по величине удлинения арматуры бортового элемента, т. е. условием $\Delta_{\text{макс}}\leqslant\Delta_{\text{пр}}$. Величина $\Delta_{\text{пр}}$ определяется по предельным деформациям арматуры.

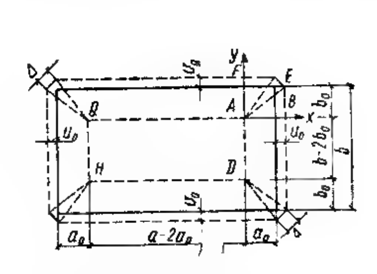


Рис. 13.25 Схема движения пологой оболочки в пластической стадии

Рис. 13.26. Расчетная схема сферического купола при работе за пределом упругости

Сферический купол. Предполагается, что разрушение сферического купола начинается вследствие достижения растянутой арматурой опорного кольца текучести и происходит по схеме рис. 13.26. Упругой стадией работы купола пренебрегается. Максимальное удлинение арматуры опорного кольца при равномерно распределенной нагрузке $p(t)=p(1-t/\theta)$ определяется по формуле

$$\Delta_{\text{макс}}=\frac{4\pi R p\Pi_p\theta^2 R}{3m\Pi_u}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0)\left(1-\frac{\Pi_a}{p\Pi_p}\right)^3,$$

где

$$\Pi_p=R^3\left\{\sin^3\alpha_0-\sin^3\alpha_1-\left[\alpha_0-\alpha_1-\frac{1}{2}(\sin 2\alpha_0-\sin 2\alpha_1)\right]\cos\alpha_1\right\};$$

$$\Pi_a=RR_aF_a(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0);$$

$$\Pi_u=R^4\Big\{(1+\sin^2\alpha_0)(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0)-$$

$$-[\alpha_0-\alpha_1-(\sin 2\alpha_0-\sin 2\alpha_1]\sin\alpha_0+\frac{1}{3}(\cos^3\alpha_0-\cos^3\alpha_1)+$$

$$+(1-\cos\alpha_1)(\sin\alpha_0-\sin\alpha_1)^2+\frac{1}{3}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0)^3\Big\}.$$

Условие прочности купола имеет вид: $\Delta_{\text{макс}}\leqslant\Delta_{\text{пр}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волошенко-Климовицкий Ю. Я. Динамический предел текучести, «Наука», 1965.

2. Гвоздев А. А. К расчету конструкций на действие взрывной волны. «Строительная промышленность», 1943, № 1, 2.

3. Гольденблат И. И., Николаенко Н. А. Расчет конструкций на действие сейсмических и импульсивных сил. Госстройиздат, 1961.

4. Динович И. П. Динамика упруго-пластических балок. Судпромгиз, 1962.

5. Кейл А. Проблема пластичности корабельных конструкций при взрывном и ударном нагружении. В сб.: «Механика», № 2 (66). ИЛ, 1961.

6. Котляревский В. А. Механические характеристики малоуглеродистой стали при импульсивном нагружении с учетом запаздывающей текучести и вязко-пластических свойств. «Прикладная механика и техническая физика», 1961, № 6.

7. Котляревский В. А. Упруго-вязко-пластические волны в материале с запаздывающей текучестью. «Прикладная механика и техническая физика», 1962, № 3.

8. Корчинский И. Л., Беченева Г. В. Прочность строительных материалов при динамических нагружениях. Стройиздат, 1965.

9. Конрой М. Пластический жесткий анализ особого класса задач о балках, подвергнутых действию поперечной динамической нагрузки. В сб.: «Механика», № 1 (35). ИЛ, 1956.

10. Овечкин А. М. Расчет статически неопределимых арок по методу предельного равновесия. Труды МИИТ, № 78. Трансжелдориздат, 1953.

11. Овечкин А. М. Расчет железобетонных осесимметричных конструкций. Госстройиздат, 1960.

12. Попов Н. Н., Расторгуев Б. С. Расчет железобетонных конструкций на действие кратковременных динамических нагрузок. Стройиздат, 1964.

13. Попов Н. Н., Расторгуев Б. С. Динамический расчет висячих конструкций. Стройиздат, 1966.

14. Рабинович И. М. К динамическому расчету сооружений за пределом упругости. В сб.: «Исследования по динамике сооружений», Стройиздат, 1947.

15. Рабинович И. М., Синицын А. П., Лужин О. В., Теренин Б. М. Расчет сооружений на импульсивные воздействия. Стройиздат, 1970.

16. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. Физматгиз, 1961.

17. Ржаницын А. Р. Экстремальное свойство формы движения жестко-пластической системы. Известия АН СССР. «Механика и машиностроение», № 2, 1959.

18. Саймондс П. Большие пластические деформации стержней под действием нагрузки взрывного типа. В сб.: «Механика», № 4 (33). ИЛ, 1956.

РАЗДЕЛ 14

ВИБРОИЗОЛЯЦИЯ

(В. С. Мартышкин)

Виброизоляцией называется способ уменьшения колебаний какой-либо механической системы, основанный на значительном ослаблении ее связей с другими системами. Если источник возбуждения колебаний находится внутри системы, то виброизоляция, используемая с целью уменьшения его воздействия на основание, называется *активной*. Виброизоляция называется *пассивной*, если

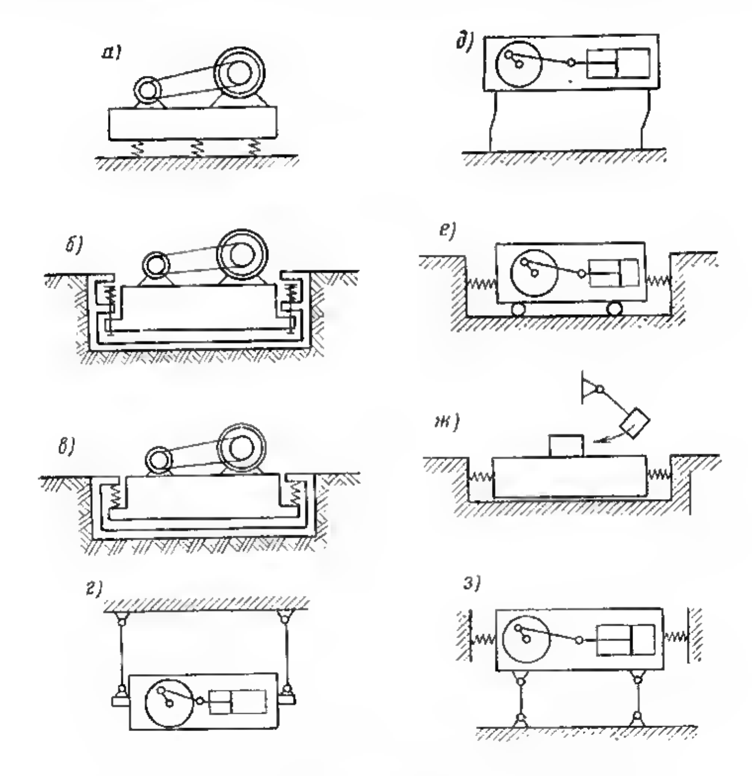


Рис. 14.1. Конструктивные схемы виброизоляции

а — опорный вариант; *б* — подвесной вариант с пружинами, работающими на сжатие; *в* — то же, на растяжение; *г* — подвесной вариант с шарнирными стержнями; *д* — опорный вариант со стержнями, работающими на изгиб; *е* — вариант с применением катков; *ж* — вариант с использованием слоя смазки; *з* — схема астатического маятника

виброизолируемый объект требуется защнтнть от иолебаний поддерживающих его коиструкцнй.

На рис. 14.1 показаиы некоторые конструитивиые схемы виброизоляции.

Виброизоляция — весьма эффеитивный способ борьбы с вибрациями. Необходимым условием, обеспечивающим эффективиость ее работы, является правильный расчет и конструирование, строгое выполиенне проектных требований.

Наиболее просто рассмотрение виброизолированиого объеита как системы с одной степеиью свободы при гармонических колебаннях самого объекта или его основаиия. Эффективность виброизоляции в этом случае можио оценивать иоэффнциентом передачи μ, который при активной виброизоляции равен отношению амплитуды снлы, передающейся через податливые пружииы (виброизоляторы) иа основаиие, и амплитуде силы, действующей на виброизолированный объект, а при пассивной виброизоляции — отиошению амплитуды перемещений виброизолироваиного объекта и амплнтуде перемещений основания. В обоих случаях его величина равна:

$$\mu = \frac{1}{\alpha^2 - 1}, \qquad (14.1)$$

где $\alpha = f_0/f$ есть отношеиие частоты f_0 вынужденных колебаний к частоте f собственных иолебаиий виброизолироваиного объеита. Очевидио, при достаточно большом зиачении α коэффициент μ очеиь мал.

Наиболее широкое практичесиое применение имеет рассматриваемая здесь линейиая теория виброизоляции при возмущеииях детерминироваиного хараитера. Возмущения считаются либо гармоническими, либо ивазигармоническими (с медленно меняющимися амплитудой и частотой), либо импульсивными. В основу изложеиной ниже теории виброизоляции положен так называемый метод динамических жесткостей.

14.1. Основные параметры виброизолируемого объекта

Виброизолнруемый объект рассматривается как абсолютно твердое тело. В иачестве основной системы иоордиият приинмаются глввные центральные оси инерции x_0, y_0, z_0. Координаты цеитра инерции C (центра тяжести) объекта, мыслеино расчлеиенного нв n простых элементов, определяются в системе координат с произвольиым иачалом и осями x, y, z (параллельными осям x_0, y_0, z_0, если их направления известны) по формулам:

$$x_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i x_i; \quad y_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i y_i; \quad z_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i z_i, \qquad (14.2)$$

где m_i — масса i-го элемента; m — общая масса объекта; x_i, y_i, z_i — иоординаты центра тяжести i-го элемента.

Для определения вращательных колебаний объекта надо знать моменты инерции относительио осей x_0, y_0, z_0:

$$\left.\begin{array}{c} J_{0x} = \Sigma\left[J_{xi} + m_i\left(y_{0i}^2 + z_{0i}^2\right)\right]; \quad J_{0y} = \Sigma\left[J_{yi} + m_i\left(z_{0i}^2 + x_{0i}^2\right)\right]; \\ J_{0z} = \Sigma\left[J_{zi} + m_i\left(x_{0i}^2 + y_{0i}^2\right)\right], \end{array}\right\} \qquad (14.3)$$

где J_{xi}, J_{yi}, J_{zi} — моменты инерции i-го элемента относительно осей, проходящих через его центр тяжести параллельно осям x_0, y_0, z_0, а x_{0i}, y_{0i}, z_{0i} — координаты центра тяжести i-го элемента. Если i-й элемент имеет форму прямоугольного параллелепипеда с размерами a, b, h в направлениях осей x_0, y_0, z_0 соответственно, то:

$$J_{xi} = m_i\frac{b^2 + h^2}{12}; \quad J_{yi} = m_i\frac{a^2 + h^2}{12}; \quad J_{zi} = m_i\frac{a^2 + b^2}{12}. \qquad (14.4)$$

Введем также радиусы инерции

$$R_{0x} = \sqrt{\frac{J_{0x}}{m}}; \quad R_{0y} = \sqrt{\frac{J_{0y}}{m}}; \quad R_{0z} = \sqrt{\frac{J_{0z}}{m}}. \qquad (14.5)$$

Упругие свойства виброизоляторов характеризуются коэффициентами жесткости (или просто жесткостями) K_{xi}, K_{yi}, K_{zi} (здесь i — номер виброизолятора) по трем осям симметрии, ориентируемым при проектировании параллельно осям x_0, y_0, z_0. Жесткость виброизолятора равна силе, вызывающей единичую деформацию виброизолятора в даном направлеиии. Система виброизоляторов характеризуется суммариыми жесткостями:

$$K_x = \sum_i K_{xi}; \quad K_y = \sum_i K_{yi}; \quad K_z = \sum_i K_{zi}. \qquad (14.6)$$

Центром жесткости системы виброизоляторов вдоль даииой оси иазывается точка приложеиия равнодействующей их реакций, параллельных этой оси, возникающих при поступательном перемещении объекта вдоль этой оси. В общем случае имеются три цептра жесткостн, координаты которых определяются по формулам, аналогичным (14.2). Так, центр жесткости вдоль оси z (вертикальной) определяется коордииатами:

$$x_z = \frac{1}{K_z} \sum K_{zi} x_i; \quad y_z = \frac{1}{K_z} \sum K_{zi} y_i; \quad z_z = \frac{1}{K_z} \sum K_{zi} z_i, \qquad (14.7)$$

где x_i, y_i, z_i — координаты точек приложения реакций виброизоляторов. Заменой иидекса z на x и y получаются формулы для коордииат центров жесткости в иаправлениях x и y. Часто достаточно зиать положение вертикальной оси жесткости, определяемое двумя первыми формулами в (14.7), и высоты центров (осей) жесткости в направлениях x и y:

$$z_x = \frac{1}{K_x} \sum K_{xi} z_i; \quad z_y = \frac{1}{K_y} \sum K_{yi} z_i. \qquad (14.8)$$

Если выполняется условие $K_{zi} = \alpha K_{xi} = \beta K_{yi}$ (обычиое для виброизоляторов), то все три центра жесткости лежат в одной точке, иазываемой в этом случае главиым цеитром жесткости. Система виброизоляторов характеризуется также суммарными угловыми жесткостями:

$$\left. \begin{aligned} K_{\varphi x} = \Sigma \left(K_{zi}\, y_{xi}^2 + K_{yi}\, z_{xi}^2\right); \quad K_{\varphi y} = \Sigma \left(K_{xi}\, z_{yi}^2 + K_{zi}\, x_{yi}^2\right); \\ K_{\varphi z} = \Sigma \left(K_{yi}\, x_{zi}^2 + K_{xi}\, y_{zi}^2\right), \end{aligned} \right\} \qquad (14.9)$$

где x_{yi}, x_{zi}, y_{xi}, ... — координаты точек приложения реакций виброизоляторов в системе коордииат с началом в соответствующем центре жесткости и осями, параллельными осям жесткости. Угловая жесткость относительно данной оси жесткости равна моменту относительно этой осн, поворачивающему объект вокруг оси на угол, равный 1 *рад*. Введем также понятие приведенных плечей жесткости, определяемых по формулам:

$$L_{xy}^2 = \frac{K_{\varphi x}}{K_y}; \quad L_{yx}^2 = \frac{K_{\varphi y}}{K_x}. \qquad (14.10)$$

Важное значеняе в теории виброизоляции имеют силы неупругого сопротивления, возникающие при колебаниях в упругих элементах (силы внутреннего трения) или в гидравлических демпферах (силы вязкого трения).

Виутреннее трение ие зависит от скорости деформаций виброизоляторов. Уравнение поступательных колебаний виброизолированного объекта вдоль оси

z при действии гармонической силы по оси z с учетом внутреннего трения имеет в комплексной форме вид [1]:

$$m\ddot{z} + (1 + i\gamma_z) K_z z = P_{0z} (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t), \tag{14.11}$$

где z — перемещение; i — мнимая единица; γ_z — коэффициент внутреннего трения; P_{0z} и ω_0 — соответственно амплитуда и круговая частота силы. Величина $C_z = \gamma_z K_z$ может рассматриваться как жесткость неупругого сопротивления. Если a_{0z} — амплитуда перемещения, $P_{0т} = C_z a_{0z}$ и $P_{0y} = K_z a_{0z}$ — амплитуды силы внутреннего трения и упругой силы соответственно, то

$$\gamma_z = \frac{P_{0т}}{P_{0y}} = \frac{C_z}{K_z}. \tag{14.12}$$

С логарифмическим декрементом колебаний δ_z коэффициент γ_z связан зависимостью

$$\delta_z = \pi \gamma_z. \tag{14.13}$$

В демпферах с жидкостью сила вязкого трения пропорциональна скорости. Уравнение поступательных колебаний объекта с присоединенными к нему демпферами имеет вид:

$$m\ddot{z} + h_z \dot{z} + K_z z = P_{0z} \cos \omega_0 t, \tag{14.14}$$

где h_z — коэффициент сопротивления. При условии $h_z^2 \ll 4mK_z$, выполняющемся для демпферов, амплитуда силы вязкого трения, с точностью до малых второго порядка, равна при свободных колебаниях:

$$\overline{P}_{0т} \approx h_z \omega_z a_{0z}, \tag{14.15}$$

где ω_z — круговая частота собственных колебаний системы, а при вынужденных колебаниях

$$\overline{P}_{0т} = h_z \omega_0 a_{0z} = \alpha_z h_z \omega_z a_{0z}, \tag{14.16}$$

где $\alpha_z = \omega_0/\omega_z$. Величину $\overline{C}_z = \alpha_z h_z \omega_z$ назовем жесткостью неупругого сопротивления при вязком трении, которая при собственных колебаниях равна $\overline{C}_z = h_z \omega_z$.

По аналогии с внутренним трением вводится коэффициент неупругого сопротивления $\overline{\gamma}_z$ при вязком трении:

$$\overline{\gamma}_z = \frac{\overline{P}_{0т}}{P_{0y}} = \frac{\overline{C}_z}{K_z} = \alpha_z \gamma_z, \tag{14.17}$$

где γ_z — значение $\overline{\gamma}_z$ при $\alpha_z = 1$. Из (14.17) следует:

$$\overline{C}_z = \overline{\gamma}_z K_z. \tag{14.18}$$

Зависимость между $\overline{\delta}_z$ и $\overline{\gamma}_z$ остается прежней (14.13).

По аналогии с понятием центра жесткости упругих элементов вводится понятие центра жесткости элементов с неупругим сопротивлением, координаты которого определяются по формулам (14.7), если в них заменить k_{zi} на c_{zi} или $\overline{c}_{zi}$. Так, например, для координаты x_z получим соответственно формулы:

$$x_z^c = \frac{1}{C_z} \sum C_{zi} x_i; \qquad x_z^{\overline{c}} = \frac{1}{\overline{C}_z} \sum \overline{C}_{zi} x_i, \tag{14.19}$$

---

[1] Как показано в работах Е. С. Сорокина, величину, стоящую в уравнении в скобках, более точно следует принимать равной $u + iv$, где $u = \frac{4-\gamma^2}{4+\gamma^2}$; $v = \frac{4\gamma}{4+\gamma^2}$. Однако в практических расчетах при $\gamma = 0{,}2$ допустимо принимать $u = 1$, $v = \gamma$.

где $C_z = \Sigma C_{zi}$, $\overline{C}_z = \Sigma \overline{C}_{zi}$. Так же из аналогии с формулами (14.9) определяются угловые жесткости неупругих сопротивлений для элементов с внутренним трением и демпферов вязкого трения относительно соответствующих осей жесткости:

$$C_{\varphi x} = \Sigma \left(C_{zi}\, y_{xi}^2 + C_{yi}\, z_{xi}^2\right); \tag{14.20}$$

$$\overline{C}_{\varphi x} = \Sigma \left(\overline{C}_{zi}\, y_{xi}^2 + \overline{C}_{yi}\, z_{xi}^2\right). \tag{14.21}$$

Круговой заменой x, y и z получаются остальные жесткости. Таким же образом вводятся по аналогии с (14.10) понятия приведенных плеч жесткости при внутреннем и вязком трении:

$$H_{xy}^2 = \frac{C_{\varphi x}}{C_y}; \quad H_{yx}^2 = \frac{C_{\varphi y}}{C_x}; \tag{14.22}$$

$$\overline{H}_{xy}^2 = \frac{\overline{C}_{\varphi x}}{\overline{C}_y}; \qquad \overline{H}_{yx}^2 = \frac{\overline{C}_{\varphi y}}{\overline{C}_x}. \tag{14.23}$$

При совпадении центров жесткости упругих и неупругих сопротивлений коэффициенты неупругого сопротивления при угловых перемещениях определяются при внутреннем и вязком трении соответственно по формулам:

$$\gamma_{\varphi x} = \frac{C_{\varphi x}}{K_{\varphi x}}; \quad \gamma_{\varphi y} = \frac{C_{\varphi y}}{K_{\varphi y}}; \quad \gamma_{\varphi z} = \frac{C_{\varphi z}}{K_{\varphi z}}; \tag{14.24}$$

$$\overline{\gamma}_{\varphi x} = \frac{\overline{C}_{\varphi x}}{K_{\varphi x}}; \qquad \overline{\gamma}_{\varphi y} = \frac{\overline{C}_{\varphi y}}{K_{\varphi y}}; \qquad \overline{\gamma}_{\varphi z} = \frac{\overline{C}_{\varphi z}}{K_{\varphi z}}. \tag{14.25}$$

14.2. Частоты собственных колебаний виброизолированного объекта

В общем случае виброизолированный объект имеет шесть степеней свободы и, следовательно, шесть частот и форм собственных колебаний. При их определении незначительным влиянием неупругих сопротивлений можно пренебречь.

Расстановка виброизоляторов в плане всегда должна быть такой, чтобы центр их жесткости лежал на одной вертикали с центром тяжести объекта. При совпадении этих центров круговые частоты собственных поступательных и вращательных колебаний определяются соответственно по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x^2 = \frac{K_x}{m}; \quad \omega_y^2 = \frac{K_y}{m}; \quad \omega_z^2 = \frac{K_z}{m}; \\ \omega_{\varphi x}^2 = \frac{K_{\varphi x}}{J_{ox}}; \quad \omega_{\varphi y}^2 = \frac{K_{\varphi y}}{J_{oy}}; \quad \omega_{\varphi z}^2 = \frac{K_{\varphi z}}{J_{oz}}. \end{aligned}\right\} \tag{14.26}$$

При раздельном их расположении независимыми будут лишь вертикальные колебания и вращательные колебания вокруг вертикальной оси с круговыми частотами:

$$\omega_z^2 = \frac{K_z}{m}; \tag{14.27}$$

$$\omega_{\varphi z}^2 = \frac{K_{\varphi z}}{J_{oz}}. \tag{14.28}$$

Круговые частоты связанных колебаний в плоскости x_0Oz_0 определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{\varphi y1}^2 &= \left(A - \sqrt{A^2 - b_y^2}\right)\omega_x^2; \\ \omega_{\varphi y2}^2 &= \left(A + \sqrt{A^2 - b_y^2}\right)\omega_x^2, \end{aligned}\right\} \tag{14.29}$$

а в плоскости y_0Oz_0 — по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{\varphi x1}^2 &= \left(B - \sqrt{B^2 - b_x^2}\right)\omega_y^2; \\ \omega_{\varphi x2}^2 &= \left(B + \sqrt{B^2 - b_x^2}\right)\omega_y^2; \end{aligned}\right\} \tag{14.30}$$

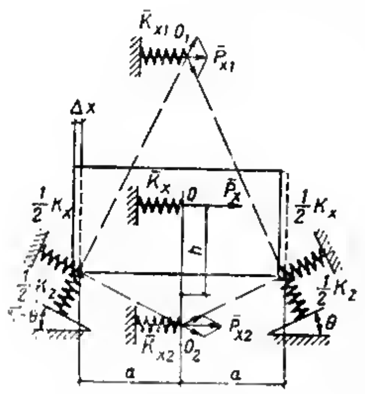


Рис. 14.2. Наклонные упругие опоры

где

$$A = \frac{1 + b_x^2 + d_y^2}{2}; \quad B = \frac{1 + b_x^2 + d_x^2}{2};$$

$$b_x = \frac{L_{xy}}{R_{ox}}; \qquad b_y = \frac{L_{yx}}{R_{oy}};$$

$$d_x = \frac{S_x}{R_{ox}}; \quad d_y = \frac{S_y}{R_{oy}};$$

S_x и S_y — расстояния от центра тяжести до осей жесткости, параллельных осям x и y соответственно. Как видно из формул (14.29) и (14.30), с увеличением S_x и S_y увеличиваются и частоты, поэтому целесообразно сократить эти расстояния. Один из способов их уменьшения состоит в следующем.

Если виброизоляторы, расположенные в плане в два ряда и имеющие общие жесткости K_z и $K_x < K_z$, наклонить к оси x в одном ряду на угол θ, а в другом — на угол $\pi - \theta$, то реакции при поступательном смещении объекта вдоль оси x на величину Δx можно привести к двум силам в точках O_1 и O_2 (рис. 14.2). Жесткость такой системы в направлении оси x равна:

$$K_x = K_{x1} + K_{x2} = \frac{P_{x1}}{\Delta x} + \frac{P_{x2}}{\Delta x}, \tag{14.31}$$

причем уровень условной горизонтальной пружины с жесткостью $\overline{K}_x$ будет выше уровня вершин наклонных виброизоляторов. Жесткости $\overline{K}_z$ и $\overline{K}_x$ наклонных виброизоляторов, высота h поднятия центра жесткости и угловая жесткость $\overline{K}_{\varphi y}$ относительно оси y, проходящей через новый центр жесткости O, определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \overline{K}_z &= K_z \cos^2\theta + K_x \sin^2\theta; \\ \overline{K}_x &= K_z \sin^2\theta + K_x \cos^2\theta; \\ \overline{K}_{\varphi y} &= (a^2 + h^2)\left[K_z \sin^2(\eta - \theta) + K_x \cos^2(\eta - \theta)\right]; \\ h &= \frac{a(K_z - K_x)\sin 2\theta}{2(K_z \sin^2\theta + K_x \cos^2\theta)}, \end{aligned}\right\} \tag{14.32}$$

где $\eta = \operatorname{arctg} a/h$, a — см. рис. 14.2. Если S — расстояние от центра тяжести объекта до центра жесткости виброизоляторов, установленных без наклона,

то их наклоном можно добиться совмещения этих центров, если удовлетворить условию

$$(1-\xi)^2 \nu^2 \geqslant 4\xi, \qquad (14.33)$$

где $\xi = K_x/K_z$, $\nu = S/a$. При этом угол наклона θ равен наименьшему из двух значений, определяемых по формуле

$$\cos 2\theta = \frac{1+\xi}{(1-\xi)(1-\nu^2)}\left[1 \pm \frac{\nu}{1+\xi}\sqrt{(1-\xi)^2\nu^2 - 4\xi}\right]. \qquad (14.34)$$

Если условие (14.33) не выполняется, можно определить наибольшую величину $h_{\text{макс}}$ и соответствующий угол θ по формулам:

$$h_{\text{макс}} = \frac{a(1-\xi)}{2\sqrt{\xi}}; \qquad (14.35)$$

$$\cos 2\theta = \frac{1+\xi}{(1-\xi)(1+\nu^2)}. \qquad (14.36)$$

14.3. Перемещения виброизолированного объекта под действием динамических нагрузок

Перемещения под действием гармонических нагрузок

Основным видом динамического воздействия, встречающегося на практике, является нагрузка, создаваемая центробежной силой и эквивалентная двум взаимно перпендикулярным гармоническим силам с одинаковой частотой, изменяющимся во времени одна по закону синуса, другая по закону косинуса. Ниже предлагается методика определения амплитуд перемещений объекта под действием таких сил.

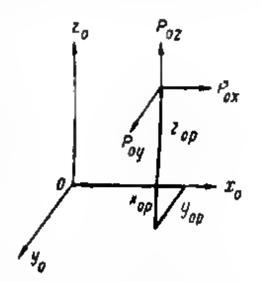


Рис. 14.3. Координаты точки приложения возмущающих сил P_x, P_y и P_z с амплитудами P_{0x}, P_{0y} и P_{0z}

Гармонические нагрузки, действующие на объект, приводятся к трем силам P_x, P_y, P_z, приложенным в центре тяжести в направлении осей x_0, y_0, z_0, и к трем моментам M_x, M_y, M_z относительно этих осей. Эти гармонические нагрузки, имеющие одну и ту же частоту, но разные начальные фазы, заменяются гармоническими нагрузками двух видов, одни из которых действуют по закону синуса (отмечаются одним штрихом сверху), другие — по закону косинуса (отмечаются двумя штрихами сверху). Амплитуды линейных и угловых колебаний объекта, происходящих по закону синуса, обозначаются буквами a_{0x}, a_{0y}, a_{0z}, φ_{0x}, φ_{0y}, φ_{0z}, а колебаний, происходящих по закону косинуса, — буквами b_{0x}, b_{0y}, b_{0z}, ψ_{0x}, ψ_{0y}, ψ_{0z}. При этом амплитуды колебаний, вызываемых действием синусоидальных и косинусоидальных нагрузок, отмечаются соответственно одним и двумя штрихами сверху. Амплитуды суммарных колебаний точек объекта обозначаются буквой A с соответствующими индексами x, y, z, указывающими направление перемещения. Силы и линейные перемещения считаются положительными, если их направления совпадают с положительным направлением осей. Моменты и угловые перемещения считаются положительными, если при взгляде в положительном направлении осей поворот происходит по ходу часовой стрелки (рис. 14.3).

1. Центр тяжести и центры жесткости упругого и неупругого сопротивлений совмещены. В обозначении $\alpha_j = \omega_0/\omega_j$ под ω_j ($j = 1, 2, ..., 6$) понимаются круговые частоты собственных колебаний $\omega_x, \omega_y, ..., \omega_{\varphi z}$, определяемые по формулам (14.26) и расположенные в порядке их возрастания.

Если при рабочем режиме виброизолированной машины $\alpha_j > 2{,}5$, то можно применять приближенные формулы:

$$
\left.
\begin{aligned}
a'_{0x} &= \frac{P'_{0x}}{-m\omega_0^2}; \quad a'_{0y} = \frac{P'_{0y}}{-m\omega_0^2}; \quad a'_{0z} = \frac{P'_{0z}}{-m\omega_0^2};\\
\varphi'_{0x} &= \frac{M'_{0x}}{-J_{0x}\,\omega_0^2}; \quad \varphi'_{0y} = \frac{M'_{0y}}{-J_{0y}\,\omega_0^2}; \quad \varphi'_{0z} = \frac{M'_{0z}}{-J_{0z}\,\omega_0^2};
\end{aligned}
\right\} \qquad (14.37)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
b''_{0x} &= \frac{P''_{0x}}{-m\omega_0^2}; \quad b''_{0y} = \frac{P''_{0y}}{-m\omega_0^2}; \quad b''_{0z} = \frac{P''_{0z}}{-m\omega_0^2};\\
\psi''_{0x} &= \frac{M''_{0x}}{-J_{0x}\,\omega_0^2}; \quad \psi''_{0y} = \frac{M''_{0y}}{-J_{0y}\,\omega_0^2}; \quad \psi''_{0z} = \frac{M''_{0z}}{-J_{0z}\,\omega_0^2}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (14.38)
$$

Амплитуды a''_{0x}, φ''_{0x}, b'_{0x}, ψ'_{0x} и т. д. здесь и в дальнейшем принимаются равными нулю, если их значения не указываются. Если вычисленные по формулам (14.37) и (14.38) амплитуды близки к допускаемым, их следует уточнить по формулам (14.39) и (14.40), в которых учитываются жесткости упругих сопротивлений. Эти формулы применимы при значениях $\alpha_j > 1{,}25$ и $\alpha_j < 0{,}75$:

$$
\left.
\begin{aligned}
a'_{0x} &= \frac{P'_{0x}}{K_x\left(1-\alpha_x^2\right)}; \quad a'_{0y} = \frac{P'_{0y}}{K_y\left(1-\alpha_y^2\right)}; \quad a'_{0z} = \frac{P'_{0z}}{K_z\left(1-\alpha_z^2\right)};\\
\varphi'_{0x} &= \frac{M'_{0x}}{K_{\varphi x}\left(1-\alpha_{\varphi x}^2\right)}; \quad \varphi'_{0y} = \frac{M'_{0y}}{K_{\varphi y}\left(1-\alpha_{\varphi y}^2\right)}; \quad \varphi'_{0z} = \frac{M'_{0z}}{K_{\varphi z}\left(1-\alpha_{\varphi z}^2\right)};
\end{aligned}
\right\} \qquad (14.39)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
b''_{0x} &= \frac{P''_{0x}}{K_x\left(1-\alpha_x^2\right)}; \quad b''_{0y} = \frac{P''_{0y}}{K_y\left(1-\alpha_y^2\right)}; \quad b''_{0z} = \frac{P''_{0z}}{K_z\left(1-\alpha_z^2\right)};\\
\psi''_{0x} &= \frac{M''_{0x}}{K_{\varphi x}\left(1-\alpha_{\varphi x}^2\right)}; \quad \psi''_{0y} = \frac{M''_{0y}}{K_{\varphi y}\left(1-\alpha_{\varphi y}^2\right)}; \quad \psi''_{0z} = \frac{M''_{0z}}{K_{\varphi z}\left(1-\alpha_{\varphi z}^2\right)}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (14.40)
$$

С учетом сил внутреннего трения формулы (14.39) и (14.40) принимают вид:

$$
a'_{0x} = \frac{\pm P'_{0x}}{K_x\sqrt{\left(1-\alpha_x^2\right)^2+\gamma_x^2}}; \quad \varphi'_{0x} = \frac{\pm M'_{0x}}{K_{\varphi x}\sqrt{\left(1-\alpha_{\varphi x}^2\right)^2+\gamma_{\varphi x}^2}}; \qquad (14.41)
$$

$$
b''_{0x} = \frac{\pm P''_{0x}}{K_x\sqrt{\left(1-\alpha_x^2\right)^2+\gamma_x^2}}; \quad \psi''_{0x} = \frac{\pm M''_{0x}}{K_{\varphi x}\sqrt{\left(1-\alpha_{\varphi x}^2\right)^2+\gamma_{\varphi x}^2}} \qquad (14.42)
$$

и т. д.

С учетом сил вязкого трения:

$$
a'_{0x} = \frac{\pm P'_{0x}}{K_x\sqrt{\left(1-\alpha_x^2\right)^2+\alpha_x^2\,\gamma_x^2}}; \quad \varphi'_{0x} = \frac{\pm M'_{0x}}{K_{\varphi x}\sqrt{\left(1-\alpha_{\varphi x}^2\right)^2+\alpha_{\varphi x}^2\,\gamma_{\varphi x}^2}}; \qquad (14.43)
$$

$$b''_{0x}=\frac{\pm P''_{0x}}{K_x\sqrt{\left(1-\alpha_x^2\right)^2+\alpha_x^2\,\gamma_x^2}};\quad \psi''_{0x}=\frac{\pm M''_{0x}}{K_{\varphi x}\sqrt{\left(1-\alpha_{\varphi x}^2\right)^2+\alpha_{\varphi x}^2\,\gamma_{\varphi x}^2}}. \tag{14.44}$$

Знаки в формулах (14.41)—(14.44) соответствуют знаку разности $1-\alpha_j^2$. Если $0{,}75\leqslant\alpha_j\leqslant1{,}25$ (зона резонанса), то при внутреннем трении амплитуды следует определять по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
a'_{0x}&=\frac{P'_{0x}\left(1-\alpha_x^2\right)}{K_x\left[\left(1-\alpha_x^2\right)^2+\gamma_x^2\right]};\quad b'_{0x}=\frac{-P'_{0x}\,\gamma_x}{K_x\left[\left(1-\alpha_x^2\right)^2+\gamma_x^2\right]};\\
\varphi'_{0x}&=\frac{M'_{0x}\left(1-\alpha_{\varphi x}^2\right)}{K_{\varphi x}\left[\left(1-\alpha_{\varphi x}^2\right)^2+\gamma_{\varphi x}^2\right]};\quad \psi'_{0x}=\frac{-M'_{0x}\,\gamma_{\varphi x}}{K_{\varphi x}\left[\left(1-\alpha_{\varphi x}^2\right)^2+\gamma_{\varphi x}^2\right]};
\end{aligned}\right\} \tag{14.45}$$

$$\left.\begin{aligned}
a''_{0x}&=\frac{P''_{0x}\,\gamma_x}{K_x\left[\left(1-\alpha_x^2\right)^2+\gamma_x^2\right]};\quad b''_{0x}=\frac{P''_{0x}\left(1-\alpha_x^2\right)}{K_x\left[\left(1-\alpha_x^2\right)^2+\gamma_x^2\right]};\\
\varphi''_{0x}&=\frac{M''_{0x}\,\gamma_{\varphi x}}{K_{\varphi x}\left[\left(1-\alpha_{\varphi x}^2\right)^2+\gamma_{\varphi x}^2\right]};\quad \psi''_{0x}=\frac{M''_{0x}\left(1-\alpha_{\varphi x}^2\right)}{K_{\varphi x}\left[\left(1-\alpha_{\varphi x}^2\right)^2+\gamma_{\varphi x}^2\right]};
\end{aligned}\right\} \tag{14.46}$$

при вязком трении:

$$\left.\begin{aligned}
a'_{0x}&=\frac{P'_{0x}\left(1-\alpha_x^2\right)}{K_x\left[\left(1-\alpha_x^2\right)^2+\alpha_x^2\,\gamma_x^2\right)]};\quad b'_{0x}=\frac{-P'_{0x}\alpha_x\,\gamma_x}{K_x\left[\left(1-\alpha_x^2\right)^2+\alpha_x^2\,\gamma_x^2\right]};\\
\varphi'_{0x}&=\frac{M'_{0x}\left(1-\alpha_x^2\right)}{K_{\varphi x}\left[\left(1-\alpha_{\varphi x}^2\right)^2+\alpha_{\varphi x}^2\,\gamma_{\varphi x}^2\right]};\\
\psi'_{0x}&=\frac{-M'_{0x}\alpha_{\varphi x}\,\gamma_{\varphi x}}{K_{\varphi x}\left[\left(1-\alpha_{\varphi x}^2\right)^2+\alpha_{\varphi x}^2\,\gamma_{\varphi x}^2\right]};
\end{aligned}\right\} \tag{14.47}$$

$$\left.\begin{aligned}
a''_{0x}&=\frac{P''_{0x}\alpha_x\,\gamma_x}{K_x\left[\left(1-\alpha_x^2\right)^2+\alpha_x^2\,\gamma_x^2\right]};\quad b''_{0x}=\frac{P''_{0x}\left(1-\alpha_x^2\right)}{K_x\left[\left(1-\alpha_x^2\right)^2+\alpha_x^2\,\gamma_x^2\right]};\\
\varphi''_{0x}&=\frac{M''_{0x}\alpha_{\varphi x}\,\gamma_{\varphi x}}{K_{\varphi x}\left[\left(1-\alpha_{\varphi x}^2\right)^2+\alpha_{\varphi x}^2\,\gamma_{\varphi x}^2\right]};\\
\psi''_{0x}&=\frac{M''_{0x}\left[\left(1-\alpha_{\varphi x}^2\right)\right.}{K_{\varphi x}\left[\left(1-\alpha_{\varphi x}^2\right)^2+\alpha_{\varphi x}^2\,\gamma_{\varphi x}^2\right]}.
\end{aligned}\right\} \tag{14.48}$$

Заменой в этих формулах индекса x на y и z получаются остальные перемещения. В стационарном резонансном режиме или при очень медленном изменении частоты возмущения при переходном режиме амплитуды резонансных колебаний ($\alpha_j=1$) при внутреннем и вязком трении определяются по формулам:

$$a''_{0x} = \frac{P''_{0x}}{K_x \gamma_x}; \; b'_{0x} = \frac{-P'_{0x}}{K_x \gamma_x}; \; \varphi''_{0x} = \frac{M''_{0x}}{K_{\varphi x} \gamma_{\varphi x}};$$

и т. д.

$$\psi'_{0x} = \frac{-M'_{0x}}{K_{\varphi x} \gamma_{\varphi x}}; \; a'_{0x} = b''_{0x} = \varphi'_{0x} = \psi'_{0x} = 0 \qquad (14.49)$$

Найденные по формулам (14.37) — (14.49) амплитуды складываются алгебраически:

$$a_{0x} = a'_{0x} + a''_{0x}; \; \varphi_{0x} = \varphi'_{0x} + \varphi''_{0x}; \qquad (14.50)$$

$$b_{0x} = b'_{0x} + b''_{0x}; \; \psi_{0x} = \psi'_{0x} + \psi''_{0x}. \qquad (14.51)$$

Заменой в них индекса x на y и z получаются выражения для остальных восьми амплитуд.

Амплитуды перемещений какой-либо i-й точки объекта с координатами x_{0i}, y_{0i} и z_{0i} при движении по закону синуса определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} a_{xi} &= a_{0x} + \varphi_{0y} z_{0i} - \varphi_{0z} y_{0i}; \\ a_{yi} &= a_{0y} + \varphi_{0z} x_{0i} - \varphi_{0x} z_{0i}; \\ a_{zi} &= a_{0z} + \varphi_{0x} y_{0i} - \varphi_{0y} x_{0i}, \end{aligned}\right\} \qquad (14.52)$$

а при движении по закону косинуса — по формулам:

$$\left.\begin{aligned} b_{xi} &= b_{0x} + \psi_{0y} z_{0i} - \psi_{0z} y_{0i}; \\ b_{yi} &= b_{0y} + \psi_{0z} x_{0i} - \psi_{0x} z_{0i}; \\ b_{zi} &= b_{0z} + \psi_{0x} y_{0i} - \psi_{0y} x_{0i}. \end{aligned}\right\} \qquad (14.53)$$

Модульные значения амплитуд колебаний i-й точки в направлениях осей координат определяются по формулам:

$$A_{xi} = \sqrt{a_{xi}^2 + b_{xi}^2}; \; A_{yi} = \sqrt{a_{yi}^2 + b_{yi}^2}; \; A_{zi} = \sqrt{a_{zi}^2 + b_{zi}^2}. \qquad (14.54)$$

Резонансные амплитуды колебаний в переходных режимах при быстром нарастании или убывании числа оборотов меньше значений, определяемых по формулам (14.49). Графики на рис. 14.4 позволяют определить отношение максимальной амплитуды колебаний виброизолированной установки в переходном режиме $a_{\text{макс}}$ к амплитуде колебаний этой установки в рабочем режиме a_{0j}. По оси абсцисс отложены отношения скорости нарастания или убывания числа оборотов ε в *гц/сек²* к квадрату частоты собственных колебаний f_j виброизолированной установки по направлению соответствующей координаты. По оси ординат отложены значения коэффициентов неупругого сопротивления γ_j (или $\overline{\gamma_i}$). Каждая кривая семейства, представленного на графике, соответствует определенному значению $a_{\text{макс}}/a_{0j}$. Поскольку колебании виброизолированного объекта в переходном режиме являются квазигармоническими, амплитуды колебаний его точек в этом режиме уже нельзя определять по формулам (14.52)—(14.54). В этом случае рекомендуется по формулам (14.55) оценивать верхнюю границу возможной величины перемещения i-й точки объекта в направлениях осей координат. Звездочкой обозначены максимальные значения соответствующих величин ($A^* \equiv A_{\text{макс}}$ и т. д.):

$$\left.\begin{aligned} A^*_{xi} &= |a^*_x| + |\varphi^*_y z_{0i}| + |\varphi^*_z y_{0i}|; \\ A^*_{yi} &= |a^*_y| + |\varphi^*_z x_{0i}| + |\varphi^*_x z_{0i}|; \\ A^*_{zi} &= |a^*_z| + |\varphi^*_x y_{0i}| + |\varphi^*_y x_{0i}|. \end{aligned}\right\} \qquad (14.55)$$

2. **Центр тяжести и центры жесткости упругого и неупругого сопротивлений находятся в разных точках.** В этом случае ω_j ($j=1, 2, ..., 6$) означает круговые частоты собственных колебаний виброизолированного объекта $\omega_{\varphi x1}$, $\omega_{\varphi x2}$, $\omega_{\varphi y1}$, $\omega_{\varphi y2}$, ω_z, $\omega_{\varphi z}$, определяемые по формулам (14.27)—(14.30).

Амплитуды колебаний в рабочем режиме машин, входящих в виброизолируемый объект, при $\alpha_j > 2{,}5$ определяются по приближенным формулам (14.37) и (14.38) и лишь в случае, когда их значения получаются близкими к допускаемым, их нужно уточнить по формулам (14.56), которые всегда следует применять при $\alpha_j < 0{,}75$ и $\alpha_j > 1{,}25$;

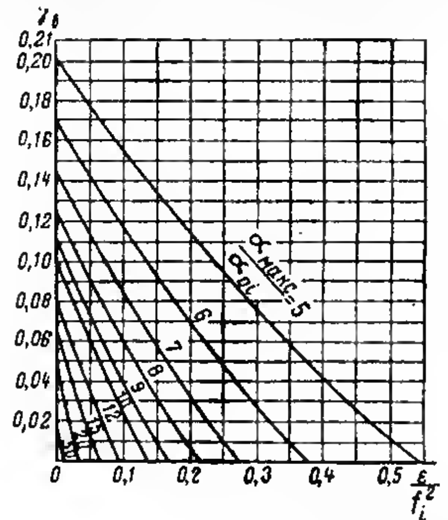


Рис. 14.4. График для определения требуемой величины коэффициента неупругого сопротивления $\gamma_в$, характеризующего неупругое сопротивление в виброизоляторах (ε — скорость нарастания или убывания частоты возмущающей силы в *гц/сек²*; f_i — частота собственных колебаний виброизолированного объекта в *гц*; $a_{мак}$ — максимальная амплитуда колебаний виброизолированного объекта в переходном режиме; a_{0i} — амплитуда колебаний виброизолированного объекта в рабочем режиме)

$$a'_{0x} = \frac{P'_{0x} B_{\varphi y} + M'_{0x} K_x S_y}{\Delta_{\varphi y}};$$

$$a'_{0y} = \frac{P'_{0y} B_{\varphi x} + M'_{0y} K_y S_x}{\Delta_{\varphi x}}; \quad a'_{0z} = \frac{P'_{0z}}{K_z\left(1-\alpha_z^2\right)};$$

$$b''_{0x} = \frac{P''_{0x} B_{\varphi y} + M''_{0y} K_x S_y}{\Delta_{\varphi y}}; \quad b''_{0y} = \frac{P''_{0y} B_{\varphi x} + M''_{0x} K_y S_x}{\Delta_{\varphi x}};$$

$$b''_{0z} = \frac{P''_{0z}}{K_z\left(1-\alpha_z^2\right)}; \quad \varphi'_{0x} = \frac{M'_{0x} B_y + P'_{0y} K_y S_x}{\Delta_{\varphi x}};$$

$$\varphi'_{0y} = \frac{M'_{0y} B_x + P'_{0x} K_x S_y}{\Delta_{\varphi y}}; \quad \varphi'_{0z} = \frac{M'_{0z}}{K_{\varphi z}\left(1-\alpha_{\varphi z}^2\right)}; \qquad (14.56)$$

$$\psi''_{0x} = \frac{M''_{0x} B_y + P''_{0y} K_y S_x}{\Delta_{\varphi x}};$$

$$\psi''_{0y} = \frac{M''_{0y} B_x + P''_{0x} K_x S_y}{\Delta_{\varphi y}}; \quad \psi''_{0z} = \frac{M''_{0z}}{K_{\varphi z}\left(1-\alpha_{\varphi z}^2\right)},$$

где обозначено:

$$\Delta_{\varphi x} = mJ_{0x}\left(\omega^2_{\varphi x1} - \omega_0^2\right)\left(\omega^2_{\varphi x2} - \omega_0^2\right);$$

$$\Delta_{\varphi y} = mJ_{0y}\left(\omega^2_{\varphi y1} - \omega_0^2\right)\left(\omega^2_{\varphi y2} - \omega_0^2\right);$$

$$B_{\varphi x} = K_{\varphi x} + K_y S_x^2 - J_{0x}\omega_0^2; \quad B_{\varphi y} = K_{\varphi y} + K_x S_y^2 - J_{0y}\omega_0^2;$$

$$B_x = K_x - m\omega_0^2; \quad B_y = K_y - m\omega_0^2.$$

Если частота возмущающей силы близка к частоте собственных колебаний или совпадает с ней ($0{,}75 < \alpha < 1{,}25$), то формулы (14.56) неприменимы. В этих случаях перемещения виброизолированного объекта следует рассматривать в системе главных координат.

3. **Колебания виброизолированного объекта при наличии неупругих сопротивлений, рассматриваемые в главных координатах.** В системе главных координат перемещение виброизолированного объекта по каждой координате при отсутствии неупругих сопротивлений не зависит от перемещений по другим координатам. В этом случае исходная система с шестью степенями свободы эквивалентна шести независимым системам с одной степенью свободы. Однако при наличии в системе элементов с внутренним трением или вязким сопротивлением полное разделение на независимые системы в общем случае невозможно. Однако если предъявить к расположению элементов, обусловливающих затухание колебаний, определенные конструктивные требования, то полное разделение становится возможным.

Если центр тяжести и центры жесткости упругого и неупругого сопротивлений находятся на одной вертикали, но в разных точках, то можно выделить прежде всего две независимые системы с одной степенью свободы, первая из которых состоит из массы m, пружины с жесткостью K_z и демпфера с жесткостью неупругого сопротивления C_z; другая система состоит из тела с моментом инерции J_{0z}, пружины с угловой жесткостью $K_{\varphi z}$ и демпфера с жесткостью углового неупругого сопротивления $C_{\varphi z}$.

Две следующие системы (припишем им номера 3 и 4), колеблющиеся в плоскости x_0Oz_0, с условными массами m_3 и m_4, соединенными абсолютно жестким стержнем, условными пружинами с жесткостями K_{x3} и K_{x4} и условными демпферами с жесткостями неупругого сопротивления C_{x3} и C_{x4}, будут независимыми, если их параметры удовлетворяют требованиям:

$$\left.\begin{aligned}
&m_3 + m_4 = m; \quad m_3\rho = m_4\rho_4; \quad m_3\rho_3^2 + m_4\rho_4^2 = J_{0y};\\
&K_{x3} + K_{x4} = K_x; \quad K_{x3}l_3 = K_{x4}l_4;\\
&K_{x3}l_3^2 + K_{x4}l_4^2 = K_{\varphi y};\\
&C_{x3} + C_{x4} = C_x; \; C_{x3}r_3 = C_{x4}r_4;\\
&C_{x3}r_3^2 + C_{x4}r_4^2 = C_{\varphi y};\\
&\rho_3 + \rho_4 = l_3 + l_4 = r_3 + r_4;\\
&l_3 = \rho_3 + S_{y1}; \quad r_3 = \rho_3 + S_{y2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (14.57)$$

Здесь ρ_3, ρ_4, l_3, l_4, r_3, r_4 — расстояния от точек приложения реакций условных элементов соответственно до центра тяжести, центра жесткости упругого сопротивления и центра жесткости неупругого сопротивления; S_{y1}, S_{y2} — расстояния между центром тяжести и центром жесткости соответственно упругого и неупругого сопротивления в исходной системе.

При отсутствии затухания ($C_x = C_{\varphi y} = 0$) две указанные условные системы, параметры которых удовлетворяют требованиям (14.57), всегда будут независимыми. Их параметры определяются по формулам:

$$\rho_3 = \sqrt{D_y^2 + R_{0y}^2} + D_y; \quad \rho_4 = \sqrt{D_y^2 + R_{0y}^2} - D_y; \qquad (14.58)$$

$$D = \frac{R_{0y}^2 - L_y^2 - S_{y1}^2}{2S_{y1}};\qquad (14.59)$$

$$m_3 = m\frac{\rho_4}{\rho_3+\rho_4};\quad m_4 = m\frac{\rho_3}{\rho_3+\rho_4} = m - m_3;$$

$$K_{x3} = K_x\frac{l_4}{l_3+l_4};$$

$$K_{x4} = K_x\frac{l_3}{l_3+l_4} = K_x - K_{x3}.$$

Величины ρ_3 и ρ_4 (l_3 и l_4) легко определяются выполненным в масштабе геометрическим построением, изображенным в правой части рис. 14.5, где от центра тяжести O по горизонтали отложен радиус инерции R_{0y}, а от центра

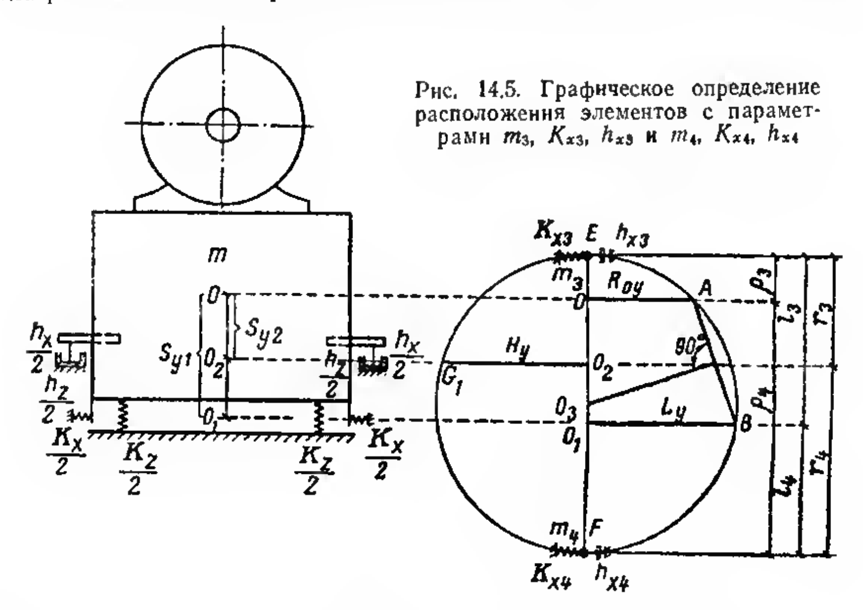


Рис. 14.5. Графическое определение расположения элементов с параметрами m_3, K_{x3}, h_{x3} и m_4, K_{x4}, h_{x4}

жесткости O_1 — приведенное плечо жесткости L_y. Точка пересечения перпендикуляра, восставленного из середины отрезка AB, с прямой OO_1 является центром окружности с радиусом, равным $O_3A = O_3B$. В точке E пересечения этой окружности с прямой OO_1 должны находиться элементы с параметрами m_3, K_{x3}, а в точке F — элементы с параметрами m_4, K_{x4}. Условные демпферы с жесткостями C_{x3} и C_{x4} будут находиться в тех же точках E и F лишь в случае, когда конец отрезка O_2G_1, равный приведенному плечу жесткости неупругого сопротивления H_y, окажется на той же окружности. Для этого должно выполняться условие

$$\frac{R_{0y}^2 - L_y^2 - S_{y1}^2}{S_{y1}} = \frac{R_{0y}^2 - H_y^2 - S_{y2}^2}{S_{y2}}.\qquad (14.60)$$

При его выполнении величины C_{x3} и C_{x4} определяются по формулам:

$$C_{x3} = C_x\frac{r_4}{r_3+r_4};\quad C_{x4} = C_x\frac{r_3}{r_3+r_4}.\qquad (14.61)$$

Для резиновых виброизоляторов при $\gamma_x = \gamma_y = \gamma_z$ условие (14.60) всегда выполняется.

Таким же образом определяются две независимые системы (припишем им номера 5 и 6), совершающие колебания в плоскости y_0Oz_0.

Заменив виброизолированный объект пятью точечными массами m, m_3, m_4, m_5, m_6 и твердым телом с моментом инерции J_{0z}, а виброизоляторы и демпферы — соответствующими элементами с упругим и неупругим сопротивлениями, следует принять в качестве координат, характеризующих движение исходной системы, перемещения точечных масс в соответствующих направлениях и поворот твердого тела относительно оси z_0.

Систему гармонических нагрузок, приложенных к виброизолируемому объекту, следует заменить эквивалентной системой из пяти сил P_z, P_{x3}, P_{x4}, P_{y5}, P_{y6}, приложенных к точечным массам, и одним моментом M_z, приложенным к твердому телу.

Круговые частоты собственных колебаний виброизолированного объекта определяются как собственные частоты каждой независимой системы:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^2 = \omega_z^2 = \frac{K_z}{m}; \quad \omega_2^2 = \omega_{\varphi z}^2 = \frac{K_{\varphi z}}{J_{0z}}; \quad \omega_3^2 = \frac{K_{x3}}{m_3}; \\ \omega_4^2 = \frac{K_{x4}}{m_4}; \quad \omega_5^2 = \frac{K_{y5}}{m_5}; \quad \omega_6^2 = \frac{K_{y6}}{m_6}. \end{aligned}\right\} \tag{14.62}$$

При гармонических возмущающих воздействиях с одинаковой частотой ω_0 амплитуды вынужденных колебаний по каждой из главных координат определяются по формулам, аналогичным (14.37) — (14.49), в которых возмущающие воздействия P'_{0x}, P'_{0y}, P'_{0z}, M'_{0x}, M'_{0y}, M'_{0z} и P''_{0x}, P''_{0y}, P''_{0z}, M''_{0x}, M''_{0y}, M''_{0z}, заменяются воздействиями P'_{x3}, P'_{x4}, P'_{y5}, P'_{y6}, P'_{z1}, M'_{z2} и P''_{x3}, P''_{x4}, P''_{y5}, P''_{y6}, P''_{0z}, M''_{z2}; массы m и моменты инерции J_{0x}, J_{0y}, J_{0z} заменяются массами m, m_3, m_4, m_6 и моментом инерции J_{0z}; жесткости K_x, K_y, K_z, $K_{\varphi z}$, $K_{\varphi y}$, $K_{\varphi z}$ заменяются жесткостями K_{x3}, K_{x4}, K_{y5}, K_{y6}, K_z, $K_{\varphi z}$; отношения α_x, α_y, α_z, $\alpha_{\varphi x}$, $\alpha_{\varphi y}$, $\alpha_{\varphi z}$ заменяются отношениями α_3, α_4, α_5, α_6, α_z, $\alpha_{\varphi z}$; обозначения амплитуд вынужденных колебаний a'_{0x}, a'_{0y}, a'_{0z}, φ'_{0x}, φ'_{0y}, φ'_{0z} и т. д. заменяются обозначениями a'_{x3}, a'_{x4}, a'_{y5}, a'_{y6}, φ_{0z} и т. д.

Найденные по формулам, аналогичным (14.37) — (14.49), амплитуды колебаний складываются по правилам:

$$a_{z1} = a'_{z1} + a''_{z1}; \quad b_{z1} = b'_{z1} + b''_{z1}; \tag{14.63}$$

$$\varphi_{0z} = \varphi'_{0z} + \varphi''_{0z}; \quad \psi_{0z} = \psi'_{0z} + \psi''_{0z} \tag{14.64}$$

и т. д.

Амплитуды колебаний центра тяжести виброизолированного объекта и угловых колебаний относительно осей x_0, y_0, z_0 определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} a_{0x} = \frac{a_{x4}\rho_3 + a_{x3}\rho_4}{\rho_3 + \rho_4}; \quad a_{0y} = \frac{a_{y6}\rho_5 + a_{y5}\rho_6}{\rho_5 + \rho_6}; \quad a_{0z} = a_{z1}; \\ \varphi_{0x} = \frac{a_{y5} - a_{y6}}{\rho_5 + \rho_6}; \quad \varphi_{0y} = \frac{a_{x3} - a_{x4}}{\rho_3 + \rho_4}; \quad \varphi_{0z} = \varphi_{0z}; \end{aligned}\right\} \tag{14.65}$$

$$\left.\begin{aligned} b_{0x} = \frac{b_{x4}\rho_3 + b_{x3}\rho_4}{\rho_3 + \rho_4}; \quad b_{0y} = \frac{b_{y6}\rho_5 + b_{y5}\rho_6}{\rho_5 + \rho_6}; \quad b_{0z} = b_{z1}; \\ \psi_{0x} = \frac{b_{y5} - b_{y6}}{\rho_5 + \rho_6}; \quad \psi_{0y} = \frac{b_{x3} - b_{x4}}{\rho_3 + \rho_4}; \quad \psi_{0z} = \psi_{0z}. \end{aligned}\right\} \tag{14.66}$$

Амплитуды колебаний i-й точки объекта определяются, как и раньше, по формулам (14.52) — (14.54).

Для определения верхних границ амплитуд резонансных колебаний объекта в переходных режимах следует по графикам рис. 14.4 определить максимальные амплитуды в переходном режиме для каждой независимой системы a_z^*, a_{x3}^*, a_{x4}^*, a_{y5}^*, a_{y6}^*, φ_z^*, b_{x3}^*, b_{x4}^*, b_{y5}^*, b_{y6}^*, b_z^*, ψ_z^* и затем воспользоваться формулами:

$$\left.\begin{aligned} a_x^* &\leqslant \frac{\left(|a_{x4}^*| + |b_{x4}^*|\right) p_3 + \left(|a_{x3}^*| + |b_{x3}^*|\right) p_4}{p_3 + p_4}; \\ \varphi_x^* &\leqslant \frac{|a_{y5}^*| + |a_{y6}^*| + |b_{y5}^*| + |b_{y6}^*|}{p_5 + p_6}; \end{aligned}\right\} \quad (14.67)$$

$$\left.\begin{aligned} a_y^* &\leqslant \frac{\left(|a_{y6}^*| + |b_{y6}^*|\right) \rho_5 + \left(|a_{y5}^*| + |b_{y5}^*|\right) \rho_6}{\rho_5 + p_6}; \\ \varphi_y^* &\leqslant \frac{|a_{x3}^*| + |a_{x4}^*| + |b_{x3}^*| + |b_{x4}^*|}{\rho_3 + p_4}; \end{aligned}\right\} \quad (14.68)$$

$$a_z^* \leqslant |a_{z1}^*| + |b_{z1}^*|; \quad \varphi_z^* \leqslant |\varphi_{z2}^*| + |\psi_{z2}^*|. \quad (14.69)$$

Перемещения под действием внезапно приложенного момента

В практических расчетах виброизоляции машин с электродвигателями встречается необходимость определять перемещения виброизолированного объекта, возникающие при внезапном включении тока. Пусть вал электродвигателя параллелен горизонтальной оси x_0. Пусковой момент $M_{x\text{п}}$ для короткозамкнутых электродвигателей можно принять ориентировочно равным вращающему моменту в рабочем режиме. Тогда величина пускового момента определяется по формуле

$$M_{x\text{п}} = \frac{97\,500 \cdot W}{N} \text{ кгс} \cdot \text{см}, \quad (14.70)$$

где W — мощность электродвигателя в квт; N — его номинальное число оборотов в минуту в рабочем режиме.

Если центр тяжести и центр жесткости виброизолированного объекта совмещены в одной точке, амплитуда его собственных угловых колебаний, вызванных внезапным включением тока, будет равна:

$$\varphi_{0x} = \frac{2M_{x\text{п}}}{K_{\varphi x}}. \quad (14.71)$$

При раздельном расположении центров тяжести и жесткости амплитуды угловых колебаний с частотами ω_5 и ω_6 будут равны:

$$\varphi_{x5} = \frac{M_{x\text{п}}}{K_{x5}(p_5 + p_6)^2}; \quad \varphi_{x6} = \frac{-M_{x\text{п}}}{K_{x6}(p_5 + p_6)^2}. \quad (14.72)$$

Максимальное угловое перемещение объекта

$$\varphi_{0x}^* \leqslant |\varphi_{x5}| + |\varphi_{x6}|. \quad (14.73)$$

Верхние границы перемещений точек объекта в переходных режимах определяются по формулам (14.55).

14.4. Динамические нагрузки, передаваемые через виброизоляторы на основание

В тех случаях когда основание виброизоляторов можно считать абсолютно жестким (подфундаментный короб, жесткая плита), суммарные гармонические нагрузки, передающиеся через виброизоляторы и демпферы на основание, удобно определять с помощью коэффициентов передачи. Поскольку амплитуды перемещений виброизолированного объекта обычно значительно больше амплитуд перемещений основания, для определения коэффициентов передачи можно использовать формулы, выведенные для случая неподвижного основания.

Если центр тяжести и центры жесткости упругих и неупругих сопротивлений совмещены, то динамические нагрузки на основание приводятся к трем силам P_{kx}, P_{ky}, P_{kz} в направлении осей координат x_0, y_0, z_0 и к трем моментам M_{kx}, M_{ky}, M_{kz}.

Обозначим через μ и $\varkappa$ коэффициенты передачи нагрузок (сил и моментов), действующих на основание по законам синуса и косинуса соответственно. При $\alpha<0{,}75$ и $\alpha>1{,}25$ эти коэффициенты определяются без учета неупругих сопротивлений по формулам (14.74), а с их учетом по формулам (14.75):

$$\mu_z' \approx \frac{P_{kz}'}{P_{0z}'} \approx \varkappa_z'' \approx \frac{P_{kz}''}{P_{0z}''} \approx \frac{1}{1-\alpha_z^2}; \quad \mu_z'' \approx \varkappa_z' \approx 0; \qquad (14.74)$$

$$\mu_z' \approx \frac{P_{kz}'}{P_{0z}'} \approx \varkappa_z'' \approx \frac{P_{kz}''}{P_{0z}''} \approx \pm\sqrt{\frac{1+\gamma_z^2}{(1-\alpha_z^2)^2+\gamma_z^2}}; \quad \mu_z'' \approx \varkappa_z' \approx 0. \qquad (14.75)$$

Значение штрихов здесь то же, что и в п. 14.3. Амплитуды сил и моментов, действующих на основание по законам синуса и косинуса, определяются соответственно по формулам вида:

$$P_{kz}' = \mu_z' P_{0z}'; \quad P_{kz}'' = \varkappa_z'' P_{0z}''. \qquad (14.76)$$

Суммарные нагрузки, передающиеся на основание, имеют амплитуды

$$P_{kz} = \sqrt{P_{kz}'^2 + P_{kz}''^2} \qquad (14.77)$$

и считаются приложенными к основанию в центре жесткости системы.

Если центр тяжести и центры жесткости упругих и неупругих сопротивлений находятся в различных точках, но условие (14.60) выполнено, то гармонические силы и момент, передающиеся на основание, приводятся к пяти силам с амплитудами P_{k3}, P_{k4}, P_{k5}, P_{k6}, P_{kz} и одному моменту с амплитудой M_{kz}. Силы с амплитудами P_{k3} и P_{k4} параллельны оси x_0 и приложены к точкам с координатами $z_{03}=\rho_3$ и $z_{04}=-\rho_4$; силы с амплитудами P_{k5} и P_{k6} параллельны оси y_0 и приложены к точкам с координатами $z_{05}=\rho_5$ и $z_{06}=-\rho_6$; сила с амплитудой P_{kz} направлена по оси z_0, а момент с амплитудой M_{kz} стремится вращать основание вокруг оси z_0.

Коэффициенты передачи и динамические воздействия на основание определяются по формулам, аналогичным формулам (14.74) — (14.77).

Если условие (14.60) не выполняется, следует предварительно определить по формулам (14.52) и (14.53) амплитуды вынужденных колебаний центра жесткости упругих сопротивлений a_{xk}', a_{yk}', a_{zk}', b_{xk}'', b_{yk}'', b_{zk}'', и амплитуды колебаний центра жесткости неупругих сопротивлений a_{xc}', a_{yc}', a_{zc}', b_{xc}'', b_{yc}'', b_{zc}'' и динамические воздействия на основание, приведенные к центру жесткости, определять по формулам:

$$P'_{xk} = a'_{xk} K_x; \quad P''_{xk} = b''_{xk} K_x; \quad M'_x = \varphi'_{0x} K_{\varphi x}; \quad M''_x = \psi'_{0x} K_{\varphi x} \qquad (14.78)$$

и т. д.

Динамическими воздействиями на основание, обусловленными внутренним трением в виброизоляторах, пренебрегается ввиду их незначительности. Динамические нагрузки, передаваемые через демпферы вязкого трения и приведенные к центру жесткости неупругого сопротивления, определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} P''_{xc} = a'_{xc}\alpha_x \bar{\gamma}_x K_x; \quad P'_{xc} = b''_{xc}\alpha_x \bar{\gamma}_x K_x; \quad M''_x = \varphi'_{0x}\alpha_{\varphi x}\bar{\gamma}_{\varphi x} K_{\varphi x}; \\ M'_x = \psi''_{0x}\alpha_{\varphi x}\bar{\gamma}_{\varphi x} K_{\varphi x} \end{aligned}\right\} \qquad (14.79)$$

и т. д.

В формулах (14.78) и (14.79), как и выше, одним штрихом отмечены силы и моменты, изменяющиеся по синусоидальному закону, а двумя штрихами — по косинусоидальному. Для определения амплитуд всех нагрузок x в этих формулах следует заменить на y и z.

14.5. Пассивная виброизоляция

Расчет пассивной виброизоляции в большинстве случаев представляет собой более сложную задачу, чем расчет активной виброизоляции. Если при активной виброизоляции типичны одночастотные возмущения, то при пассивной виброизоляции во многих случаях приходится иметь дело с многочастотными колебаниями основания. В этих случаях наряду с большой эффективностью пассивной виброизоляции для высокочастотных колебаний будет резонансное увеличение низкочастотных колебаний, передающихся от основания на виброизолированный объект с частотами, близкими к частотам его собственных колебаний. Поэтому при проектировании в таких условиях пассивной виброизоляции необходимо обеспечить соответствующее затухание колебаний объекта и расчетом проверить степень эффективности виброизоляции при низких частотах в предположении резонанса.

Перемещения виброизолированного объекта в дальнейшем рассматриваются в системе главных координат. Колебания основания предполагаются гармоническими. Если центр тяжести и центры жесткости упругого и неупругого сопротивлений совпадают, то главными координатами будут перемещения центра тяжести виброизолированного объекта в направлении осей x_0, y_0, z_0 и углы поворотов его относительно этих же осей. Если такого совпадения нет, но условие (14.60) выполняется, главными координатами будут вертикальные перемещения z центра тяжести объекта, горизонтальные перемещения x_3 и x_4 точечных масс m_3 и m_4, горизонтальные перемещения y_5 и y_6 точечных масс m_5 и m_6 и угол поворота объекта φ_z относительно оси z_0. Соответственно и перемещения основания должны определяться в этих же главных координатах. Поэтому в первом случае перемещения основания должны быть отнесены к центру жесткости, а во втором — к точкам приложения реакций условных пружин с жесткостями K_z, K_{x3}, K_{x4}, K_{y5}, K_{y6}, $K_{\varphi z}$. Основание виброизоляторов при этом считается абсолютно жестким.

В соответствии с принятой методикой расчета перемещения основания характеризуются 12 амплитудами: a_x; a_y; a_z; φ_x; φ_y; φ_z; b_x; b_y; b_z; ψ_x; ψ_y; ψ_z, из которых первые шесть соответствуют перемещениям по закону синуса, остальные — по закону косинуса. Амплитуды колебаний виброизолированного объекта при гармонических колебаниях основания обычно принято определять с помощью коэффициентов передачи, равных отношениям амплитуд колебаний объекта к амплитудам колебаний основания. Каждое из колебаний основания будет вызывать два колебания объекта, одно из которых будет происходить в фазе (или противофазе) с колебаниями основания, а другое будет сдвинуто по фазе на 90° относительно колебаний основания. Следовательно, в общем случае для определения колебаний виброизолированного объекта потребуется 24 коэффициента передачи. Обозначим через η'_x, η'_y, η'_z, $\eta'_{\varphi x}$, $\eta'_{\varphi y}$, $\eta'_{\varphi z}$, η''_x,

$\eta''_y, \eta''_z, \eta''_{\varphi x}, \eta''_{\varphi y}, \eta''_{\varphi z}$ коэффициенты передачи для колебаний объекта, происходящих по закону синуса, и через $\zeta'_x, \zeta'_y, \zeta'_z, \zeta'_{\varphi x}, \zeta'_{\varphi y}, \zeta'_{\varphi z}, \zeta''_x, \zeta''_y, \zeta''_z, \zeta''_{\varphi x}, \zeta''_{\varphi y}, \zeta''_{\varphi z}$ коэффициенты передачи для колебаний, происходящих по закону косинуса.

При проектировании и расчете пассивной виброизоляции возможны три различных случая оценки допускаемых колебаний. В первом случае решающее значение имеют абсолютные перемещения виброизолированного объекта, во втором случае — перемещения его относительно колеблющегося основания и в третьем случае — относительные перемещения отдельных деталей объекта. В связи с этим далее приводятся формулы для определения абсолютных и относительных перемещений виброизолированного объекта. Определение перемещений для третьего случая здесь не рассматривается.

1. Коэффициенты передачи для абсолютных колебаний виброизолированного объекта. Ниже приводятся формулы для определения коэффициентов передачи колебаний только по одной координате x; формулы для коэффициентов передачи колебаний по другим координатам получаются соответствующей заменой в формулах индексов и обозначений. При использовании демпферов вязкого трения в эти формулы вместо γ_j следует подставить $\overline{\gamma_j}$.

Если $\alpha_j < 0{,}75$ или $\alpha_j > 1{,}25$, то η и ζ определяются при $\gamma_j = 0$ и $\gamma_j \neq 0$ соответственно по формулам (14.80) и (14.81). При этом амплитуды объекта и основания (обычно им служит перекрытие) снабжаются вторым индексом «о» и «п» соответственно:

$$\eta'_x = \frac{a'_{0x}}{a_{\text{п}x}} \approx \zeta''_x \approx \frac{b''_{0x}}{b_{\text{п}x}} \approx \frac{1}{1 - \alpha_x^2}; \quad \eta''_x \approx \zeta'_x \approx 0; \tag{14.80}$$

$$\eta_x = \frac{a'_{0x}}{a_{\text{п}x}} \approx \zeta''_x \approx \frac{b''_{0x}}{b_{\text{п}x}} \approx \pm \sqrt{\frac{1 + \gamma_x^2}{(1 - \alpha_x^2)^2 + \gamma_x^2}}; \; \eta''_x \approx \zeta'_x \approx 0. \tag{14.81}$$

Знак в формуле (14.81) определяется знаком разности $1 - \alpha_x^2$.

Если $0{,}75 < \alpha_j < 1{,}2$, то коэффициенты передачи определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \eta'_x &= \frac{a'_{0x}}{a_{\text{п}x}} = \frac{(1 - \alpha_x^2) + \gamma_x^2}{(1 - \alpha_x^2)^2 + \gamma_x^2}; \\ \zeta'_x &= \frac{b'_{0x}}{a_{\text{п}x}} = \frac{-\alpha_x^2 \gamma_x}{(1 - \alpha_x^2)^2 + \gamma_x^2}; \\ \eta''_x &= \frac{a''_{0x}}{b_{\text{п}x}} = \frac{\alpha_x^2 \gamma_x}{(1 - \alpha_x^2)^2 + \gamma_x^2}; \\ \zeta''_x &= \frac{b''_{0x}}{b_{\text{п}x}} = \frac{(1 - \alpha_x^2) + \gamma_x^2}{(1 - \alpha_x^2)^2 + \gamma_x^2}. \end{aligned}\right\} \tag{14.82}$$

Частные амплитуды колебаний:

$$a'_{0x} = \eta'_x a_{\text{п}x}; \quad a''_{0x} = \eta''_x b_{\text{п}x}; \quad b'_{0x} = \zeta'_x a_{\text{п}x}; \quad b''_{0x} = \zeta''_x b_{\text{п}x} \tag{14.83}$$

используются для определения амплитуд колебаний виброизолированного объекта a_{0x}, ..., b_{0x}, ... по формулам (14.50) и (14.51). Амплитуды колебаний i-й точки виброизолированного объекта определяются по формулам (14.52) и (14.53).

2. Коэффициенты передачи для определения относительных колебаний виброизолированного объекта. Обозначим через $\varkappa'$ и $\varkappa''$ с соответствующими индексами (см. п. 1) 12 коэффициентов передачи относительных колебаний по закону синуса и через ν' и ν'' — 12 коэффициентов передачи колебаний, происходящих по закону косинуса.

Коэффициенты передачи определяются по следующим формулам:
при $\alpha_j < 0{,}75$ или $\alpha_j > 1{,}25$

$$\left.\begin{aligned} \varkappa'_x = \frac{\bar{a}'_{0x}}{a_x} = \nu''_x \approx \frac{\bar{b}''_{0x}}{b_x} \approx \frac{\pm\alpha_x^2}{\sqrt{\left(1-\alpha_x^2\right)^2+\gamma_x^2}}; \\ \varkappa''_x \approx \nu'_x \approx 0; \end{aligned}\right\} \qquad (14.84)$$

при $0{,}75 \leqslant \alpha_j \leqslant 1{,}25$

$$\left.\begin{aligned} \varkappa'_x &= \frac{\bar{a}'_{0x}}{a_x} = \frac{\alpha_x^2\left(1-\alpha_x^2\right)}{\left(1-\alpha_x^2\right)^2+\gamma_x^2}; \\ \nu'_x &= \frac{\bar{b}'_{0x}}{a_x} = \frac{-\alpha_x^2\gamma_x^2}{\left(1-\alpha_x^2\right)^2+\gamma_x^2}; \\ \varkappa''_x &= \frac{\bar{a}''_{0x}}{b_x} = \frac{\alpha_x^2\gamma_x^2}{\left(1-\alpha_x^2\right)^2+\gamma_x^2}; \\ \nu''_x &= \frac{\bar{b}''_{0x}}{b_x} = \frac{\alpha_x^2\left(1-\alpha_x^2\right)}{\left(1-\alpha_x^2\right)^2+\gamma_x^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (14.85)$$

Амплитуды относительных колебаний виброизолированного объекта будут равны:

$$\bar{a}'_{0x} = \varkappa'_x a_x; \quad \bar{a}''_{0x} = \varkappa''_x b_x; \quad \bar{b}'_{0x} = \nu'_x a_x; \quad \bar{b}''_{0x} = \nu''_x b_x. \qquad (14.86)$$

14.6. Расчет пружинных, резиновых и комбинированных виброизоляторов

Пружинные виброизоляторы. Чаще всего в качестве виброизоляторов применяются стальные витые пружины, изготовляемые для использования в различных отраслях промышленности. Если нет паспортных данных, характеризующих свойства пружин, то жесткость одной пружины в продольном (вертикальном) направлении определяется по формуле

$$K_z = \frac{Gd}{8c^3 i}, \qquad (14.87)$$

где G — модуль упругости на сдвиг, принимаемый для всех пружинных сталей равным: $G = 8 \cdot 10^5$ *кгс/см²*; i — число рабочих витков; $c = D/d$ — индекс пружины; D — средний диаметр пружины в *см*; d — диаметр прутка в *см*.

Расчетная нагрузка на одну пружину принимается равной:

$$P = P_{ст} + \beta P_{д}, \tag{14.88}$$

где $P_{ст}$ — статическая нагрузка в *кгс*; $P_{д}=a_{0z}K_z$ — динамическая нагрузка; β — коэффициент, учитывающий усталостные явления и принимаемый равным 1,5 при $P_д/P_{ст} \leqslant 0,1$ и равным 3 при $P_д/P_{ст} > 0,1$.

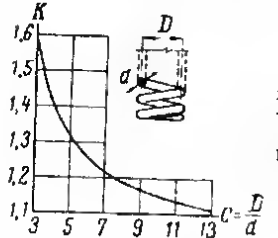


Рис. 14.6. График для определения коэффициента k

Допускаемая статическая нагрузка на одну пружину определяется по формуле

$$[P_{ст}] = \frac{\pi d^3 [\tau]}{8kD}, \tag{14.89}$$

где $[\tau]$ — допускаемое для пружинной стали напряжение при кручении в *кгс/см²*; если нет сведений о сорте стали, можно принимать $[\tau] = 4000$ *кгс/см²*; k — коэффициент, учитывающий повышение напряжений в средних точках сечения прутка вследствие деформаций сдвига, определяемый по графику рис. 14.6.

Отношение высоты H_0 ненагруженной пружины, работающей на сжатие, к ее диаметру D должно удовлетворять условию $H_0/D \leqslant 2$. Поперечная жесткость $K'_x = K'_y$ пружины с неповорачивающимися торцами определяется по графику рис. 14.7.

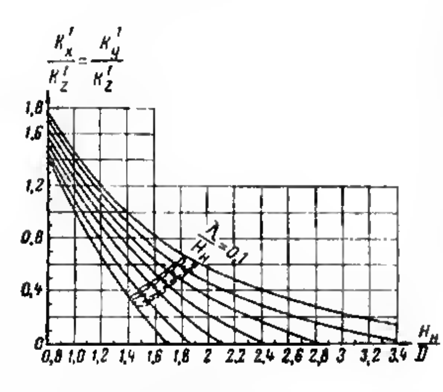


Рис. 14.7. График для определения горизонтальной жесткости пружины

$H_н$ — высота пружины под нагрузкой $P_{ст}$; λ — осадка пружины от вертикальной нагрузки $P_{ст}$; K'_z — вертикальная жесткость пружины

При больших статических осадках применяют пружины, работающие на растяжение. Поперечная жесткость пружины, работающей на растяжение при шарнирном креплении на торцах, определяется приближенно как квазиупругий коэффициент математического маятника длиной l с массой m:

$$K'_x = K'_y = \frac{mg}{l} = \frac{Q}{l}; \tag{14.90}$$

где Q — вес груза, приходящийся на одну пружину, в *кгс*; l — общая длина растянутой пружины, равная расстоянию между шарнирами на ее концах.

Резиновые виброизоляторы. В отличие от пружинных резиновые виброизоляторы имеют большой коэффициент неупругого сопротивления ($\gamma_р = 0,03 \div 0,25$). Отдавать предпочтение резиновым виброизоляторам следует лишь в тех случаях, когда необходимо увеличить затухание собственных колебаний или уменьшить амплитуды резонансных колебаний в переходных режимах.

Резина как конструкционный материал имеет некоторые специфические особенности. Ее коэффициент Пуассона $\mu = 0,5$. Поэтому продольная нагрузка вызывает большие поперечные деформации резинового виброизолятора, которым препятствует трение на опорных поверхностях. Вследствие этого при сжатии резиновых элементов, у которых высота сравнима с поперечным размером или меньше его, приведенный модуль упругости на сжатие увеличивается по сравнению с модулем упругости на растяжение образцов резины с большим отношением длины к поперечному размеру. В приведенной ниже

упрощенной методике расчета вводится условный модуль упругости резины на сжатие E', который для элементов с указанными выше высотами при сухих неприклеенных опорных поверхностях, по экспериментальным данным, равен пятикратной величине модуля сдвига G. Кроме того, с увеличением отношения поперечного размера резинового виброизолятора к высоте его рабочая высота резко уменьшается и соответственно увеличивается его жесткость. Поэтому применение резиновых виброизоляторов, у которых общая высота меньше четверти поперечного размера, не рекомендуется. Широкие резиновые прокладки небольшой высоты должны иметь перфорацию или ребристую поверхность. В приводимых далее формулах учитывается не вся высота, а только рабочая высота резинового элемента.

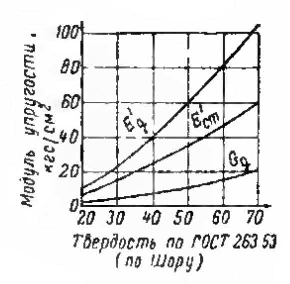


Рис. 14.8. Зависимость модулей упругости $E'_д$ и $E'_{ст}$ резины при сжатии и динамического модуля сдвига $G_д$ от числа твердости резины

Другая особенность резиновых виброизоляторов состоит в том, что их жесткость при статической и динамической нагрузках различна; в расчеты вводится динамический модуль упругости резины на сжатие $E_д$, который больше статического $E_{ст}$.

В паспортах и каталогах обычно не указываются значения $E_д$ и $E_{ст}$ для резины, поэтому для их ориентировочной оценки следует использовать зависимость модулей от твердости резины, указываемой обычно в паспорте. На рис. 14.8 приведен график зависимости $E'_д$ и $E'_{ст}$ при сжатии и динамического модуля сдвига $G_д$ от числа твердости, определенного в соответствии с ГОСТ 263—53 твердомером ТМ-2 (твердость по Шору).

Ниже даются формулы для определения жесткости резиновых виброизоляторов с квадратным или круглым поперечным сечением. Жесткость резинового виброизолятора при продольном сжатии определяется по формуле

$$K_z = \frac{FE_д}{H - \frac{A}{8}}, \qquad (14.91)$$

где F — площадь поперечного сечения в $см^2$; $E_д$ — динамический модуль упругости резины на сжатие в $кгс/см^2$; A — поперечный размер виброизолятора (диаметр или сторона квадрата) в $см$. При этом должно выполняться условие:

$$\frac{H}{A} \leqslant 1,1. \qquad (14.92)$$

Жесткость резинового виброизолятора в поперечном направлении определяется по формуле

$$K_x = K_y = \frac{FG}{H}. \qquad (14.93)$$

Статическая нагрузка на один виброизолятор равна:

$$P_{ст} = F\sigma, \qquad (14.94)$$

где σ — расчетное статическое напряжение в резине в $кгс/см^2$, отнесенное к площади поперечного сечения недеформированного элемента. Значения σ рекомендуется принимать в пределах 3—4 $кгс/см^2$ для мягких и средних по твердости сортов резины и 5 $кгс/см^2$ для твердых сортов.

Коэффициент неупругого сопротивления резины зависит от ее сорта. Так, например, резины сорта № 3311 и 4049, изготовляемые по рецептуре завода «Каучук», имеют соответственно $\gamma = 0{,}03$ и $\gamma = 0{,}23$.

При заданных значениях веса виброизолируемого объекта Q, динамического модуля упругости $E_д$, напряжения в резине σ и наименьшем возможном

числе виброизоляторов, равном 4, нижняя граница частот собственных вертикальных колебаний (в герцах) объекта при использовании резиновых виброизоляторов определяется по формуле

$$f_z = 7{,}1 \sqrt[4]{\frac{E_д^2}{Q\sigma}} . \qquad (14.95)$$

Комбинированные (пружинно-резиновые) виброизоляторы. Комбинированные виброизоляторы применяются в тех случаях, когда необходимо увеличить коэффициент неупругого сопротивления виброизолируемой системы. Чаще всего применяют параллельное соединение пружинных и резиновых виброизоляторов.

Общая жесткость комбинированных виброизоляторов при параллельном соединении пружин и резиновых элементов равна:

$$K_z = K_{zп} + K_{zр}. \qquad (14.96)$$

Общий коэффициент неупругого сопротивления равен:

$$\gamma = \frac{K_{zп}\,\gamma_п + K_{zр}\,\gamma_р}{K_{zп} + K_{zр}}, \qquad (14.97)$$

где $K_{zп}$, $K_{zр}$, $\gamma_п$ и $\gamma_р$ — жесткости и коэффициенты неупругого сопротивления пружинных и резиновых виброизоляторов соответственно. Для стальных пружин можно принимать ориентировочно $\gamma_п = 0{,}01$.

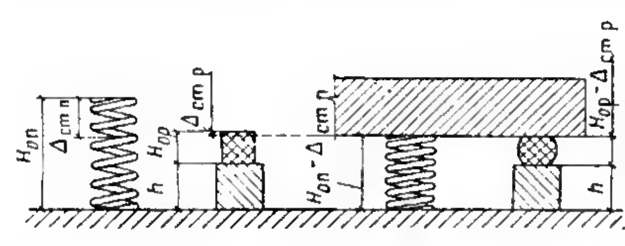


Рис. 14.9. Схема определения высоты подставки при параллельной работе пружинных и резиновых виброизоляторов

При ударных нагрузках на виброизолированный объект и при резонансах резиновые виброизоляторы не должны выключаться из работы, что обеспечивается необходимой величиной статической осадки резинового виброизолятора, превышающей максимальное отклонение $a_{макс}$ виброизолированного объекта при колебаниях. Для этого необходимо, чтобы часть общей статической нагрузки, передаваемая на резиновые виброизоляторы, отвечала условию

$$Q_р \geqslant a_{макс} K_{zр}. \qquad (14.98)$$

Для того чтобы выполнялось условие (14.98), необходимо согласовать высоты нагруженных пружинных и резиновых виброизоляторов, что достигается применением подставок под резиновые виброизоляторы, высота которых определяется по формуле

$$h = H_{0п} - H_{0р} - \Delta_{ст.п} + \Delta_{ст.р}, \qquad (14.99)$$

где h — высота подставки; $\Delta_{ст.п}$ и $\Delta_{ст.р}$ — деформации пружинных и резиновых виброизоляторов от фактических статических нагрузок; $H_{0п}$ и $H_{0р}$ — высоты пружинных и резиновых виброизоляторов в свободном состоянии (рис. 14.9).

Общая жесткость и коэффициент неупругого сопротивления последовательно соединенных пружинных и резиновых виброизоляторов определяются по формулам

$$K_z = \frac{K_{zп} K_{zр}}{K_{zп} + K_{zр}}; \qquad (14.100)$$

$$\gamma = \frac{K_{z\text{п}}\,\gamma_\text{р} + K_{z\text{р}}\,\gamma_\text{п}}{K_{z\text{п}} + K_{z\text{р}}}. \qquad (14.101)$$

Демпферы вязкого трения. Демпфер с вязкой жидкостью представляет собой цилиндрический сосуд (статор), внутри которого находится другой закрытый снизу подвижной цилиндр (вибратор) (рис. 14.10). Между боковыми стенками статора и вибратора находится вязкая жидкость. Статор крепится

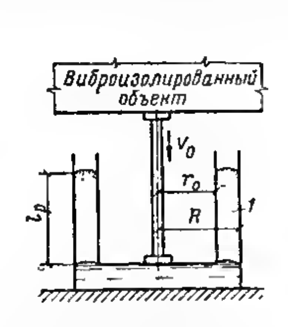


Рис. 14.10. Демпфер вязкого трения с закрытым снизу вибратором

1 — вязкая жидкость

Рис. 14.11. Графики натуральных логарифмов функций $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$, $\eta(\alpha)$, $\sqrt{\varphi(\alpha)\,\psi(\alpha)}$

к основанию, а вибратор к виброизолируемому объекту. При движении вибратора внутри вязкой жидкости возникает динамическое давление, величина которого не должна превышать атмосферного давления, так как в противном случае при движении вибратора вверх под его днищем будет образовываться вакуум и произойдет разрыв жидкости.

Сила вязкого трения $P_{\text{т}z}$, возникающая при вертикальном движении вибратора со скоростью v_z, определяется по формуле

$$P_{\text{т}z} = h_z\,v_z; \quad h_z = \mu l_\text{р}\,\psi(\alpha). \qquad (14.102)$$

Разность давлений Δp между верхним и нижним уровнями вязкой жидкости определяется по формуле

$$\Delta p = \frac{4 v_z\,\mu l_\text{р}\,\varphi(\alpha)}{r_0^2}. \qquad (14.103)$$

Здесь μ — динамическая вязкость жидкости в *кгс·сек/см²**; $l_\text{р}$ — рабочая высота слоя вязкой жидкости в *см*; r_0 — наружный радиус вибратора в *см*; R — внутренний радиус статора в *см*; $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ — функции, определяемые по графику (рис. 14.11); h_z — коэффициент сопротивления в *кгс·сек/см*, связанный с величиной $\overline{C}_z$ формулой $\overline{C}_z = h_z\,\omega$ (см. стр. 384).

Сила, возникающая при движении вибратора в горизонтальном направлении со скоростью v_x, определяется по приближенной формуле

$$P_{\text{т}x} = h_x\,v_x; \; h_x = \frac{12\,\pi\mu l_\text{р}^3\,r_0^3}{\left(12 r_0^2 + l_\text{р}^2\right)\delta^3}, \qquad (14.104)$$

где $\delta = R - r_0$ — боковой зазор между вибратором и статором в *см*.

* В системе СГС динамическая вязкость измеряется в пуазах (*пз*); 1 *пз* $= 1{,}02 \times 10^{-6}$ *кгс·сек/см²*.

В тех случаях когда демпферы вязкого трения требуется размещать с соблюдением условия (14.60), полезно выбирать их конструктивную форму с заранее заданным отношением вертикальной жесткости неупругого сопротивления к горизонтальной. Это отношение определяется по приближенной формуле

$$\frac{\overline{C}_z}{\overline{C}_x}=\frac{h_z}{h_x}=\left(\frac{r_0^2}{l_p^2}+\frac{1}{12}\right)\left(6+9\frac{\delta}{r_0}+\frac{\delta^2}{r_0^2}\right). \qquad (14.105)$$

Вязкость жидкости в демпфере зависит от температуры, поэтому важно заранее определить расчетом, насколько поднимется внутри жидкости температура при длительной его работе. При длительных вертикальных колебаниях вибратора по гармоническому закону с амплитудой скорости v_{0z}, установившийся перепад температуры внутри жидкости определяется по формуле

$$\Delta T_1=\frac{\mu v_{0z}^2}{2A\lambda}\eta(\alpha), \qquad (14.106)$$

где $A=42{,}7$ *кгс·см/кал* — механический эквивалент теплоты; λ — коэффициент теплопроводности вязкой жидкости в *кал/град·см·сек*.

Если демпфер работает с короткими перерывами, перепад температуры внутри вязкой жидкости можно определять по формуле

$$\Delta T_1=\frac{W_{\text{ср}}}{A\lambda l_p}\cdot\frac{\eta(\alpha)}{\psi(\alpha)}, \qquad (14.107)$$

где $W_{\text{ср}}$ — среднее количество энергии, поглощаемой демпфером за 1 *сек* в *кгс·см/сек*; $\eta(\alpha)$ — функция, определяемая по графику на рис. 14. 11.

Перепад температуры между охлаждающимися поверхностями демпфера и окружающим воздухом определяется по формуле

$$\Delta T_2=\frac{W_{\text{ср}}}{AF\alpha_0}, \qquad (14.108)$$

где α_0 — коэффициент теплопередачи в *кал/см²·сек* (при отсутствии данных о величине α_0 можно принимать $\alpha_0=1{,}3\cdot10^{-4}$ *кал/см²·сек*); F — площадь охлаждающихся поверхностей демпфера в *см²*.

Если заранее задать величину отношения $l_p/r_0=\beta$, можно определить значение α, при котором разность давлений Δp будет равна максимально допустимой величине $\Delta p=0{,}95$ *кгс/см²*, а сила вязкого трения будет равна заданной величине $P_{\tau z}$:

$$\frac{\sqrt{P_{\tau z}\Delta p}}{2v_{0z}\mu\beta}=\sqrt{\varphi(\alpha)\psi(\alpha)}. \qquad (14.109)$$

Определив по рис. 14.11 величину α, следует по формулам (14.102) и (14.103) определить величины r_0 и l_p.

Максимальная величина вертикальной силы вязкого трения и лучшие условия теплоотдачи будут в том случае, когда в демпфере объем между днищами статора и вибратора заполнен жидкостью с очень малой вязкостью и бо́льшим по отношению к рабочей жидкости удельным весом, например водой.

В качестве рабочей вязкой жидкости можно использовать кремнийорганические, в частности полиметилсилоксановые, жидкости. Промышленностью выпускается 20 марок этих жидкостей, из которых для предлагаемых демпферов пригодны лишь семь марок с вязкостью свыше 10 000 *спз*, а именно: ПМС-10000, ПМС-15000, ПМС-20000, ПМС-50000, ПМС-100000 и ПМС-1000000 (числа в обозначениях марок указывают вязкость в сантипуазах).

Удельная теплоемкость полиметилсилоксановых жидкостей 0,3—0,38 *кал/г·град*, коэффициент теплопроводности возрастает с увеличением вязкости в пределах от $2{,}3\cdot10^{-4}$ до $3{,}8\cdot10^{-4}$ *кал/см·град·сек.* Зависимость вязкости от температуры приведена на рис. 14.12. Недостатком этих жидкостей является большая их стоимость.

Если по расчетам ожидается небольшое повышение температуры вязкой жидкости при длительной работе, то можно рекомендовать дешевые вязкие

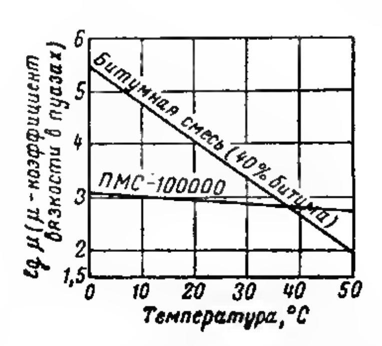


Рис. 14.12. Зависимость коэффициента вязкости от температуры

lg μ (μ - коэффициент вязкости в пуазах)

Содержание битума в %

Рис. 14.13. Зависимость коэффициента вязкости битумных смесей от процентного по весу содержания битума при температуре 20° С

жидкости, полученные Е. М. Мироновым (ЦНИИСК), представляющие собой смеси битума № 5 с нигролом. На рис. 14.12 и 14.13 приведены зависимости вязкости этих жидкостей от процентного по весу состава их ингредиентов и от температуры.

14.7. Практические расчеты виброизоляции

Активная виброизоляция

Для проектирования и расчета активной виброизоляции машин с гармоническими возмущающими силами необходимо иметь и знать следующие данные:

1) чертежи или эскизы виброизолируемого объекта с указанием расположения отверстий для анкерных болтов;

2) вес объекта;

3) положение центра тяжести виброизолируемого объекта;

4) характеристики подводок и места присоединения их к машине;

5) чертежи поддерживающей конструкции и ее характеристику (в случае установки виброизоляторов на монолитную конструкцию, располагаемую непосредственно на грунте, необходимы данные, характеризующие грунт: допускаемое статическое давление, коэффициенты упругого сжатия, уровень грунтовых вод и т. п.);

6) сведения о возможности воздействия на виброизоляторы различных агрессивных сред (масел, кислот, щелочей и т. п.), а также о минимальной и максимальной температурах в местах установки виброизоляторов;

7) мощность электродвигателя;

8) число оборотов в минуту электродвигателя и машин с вращающимися частями или число ходов в минуту машин с возвратно-поступательно движущимися частями;

9) скорость нарастания числа оборотов в начале ее пуска или в конце остановки, а при отсутствии этих данных время от начала пуска до достижения рабочего числа оборотов и продолжительность выбега;

10) величины возмущающих сил и моментов, их направления и точки приложения; при отсутствии этих данных необходима кинематическая схема движения деталей машины с указанием их веса и геометрических размеров;

11) требования, предъявляемые к виброизоляции: допускаемые величины динамических нагрузок, передаваемых на несущую конструкцию, допускаемые амплитуды колебаний самой машины в рабочем и переходных режимах.

Определение параметров виброизоляции. При активной виброизоляции машины с гармонической возмущающей силой амплитуды ее вынужденных колебаний зависят в основном от величин ее массы и моментов инерции, поэтому прежде всего следует выяснить достаточность этих величин при данных возмущающих воздействиях и возможность их увеличения, например, путем установки машины на жесткий железобетонный постамент, опирающийся на виброизоляторы.

Требуемые величины добавочных масс и моментов инерции определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} &m_д \geqslant \frac{P_{0x}}{[a_{0x}]\,\omega_0^2} - m; \quad m_д \geqslant \frac{P_{0y}}{[a_{0y}]\,\omega_0^2} - m; \quad m_д \geqslant \frac{P_{0z}}{[a_{0z}]\,\omega_0^2} - m; \\ &J_{0xд} \geqslant \frac{M_{0x}}{[\varphi_{0x}]\,\omega_0^2} - J_{0x}; \quad J_{0yд} \geqslant \frac{M_{0y}}{[\varphi_{0y}]\,\omega_0^2} - J_{0y}; \\ &J_{0zд} \geqslant \frac{M_{0z}}{[\varphi_{0z}]\,\omega_0^2} - J_{0z}, \end{aligned}\right\} \qquad (14.110)$$

где величины в квадратных скобках обозначают соответствующие значения допускаемых амплитуд колебаний для виброизолированной машины.

Общая жесткость виброизоляторов выбирается с таким расчетом, чтобы обеспечить требуемые частоты собственных колебаний виброизолированного объекта. Определяющей величиной обычно является жесткость виброизоляторов в вертикальном направлении.

Если в задании на проектирование указана допускаемая величина коэффициента передачи $[\mu_z]$ или допускаемая величина силы $[P_{z1}]$, передающейся на несущую конструкцию, то величину отношения α_z следует принимать не меньше значения, определяемого по формуле

$$\alpha_z \geqslant \alpha_{z\,мин} = \sqrt{1 + \frac{1}{[\mu_z]}} = \sqrt{\frac{P_{0z} + [P_{z1}]}{[P_{z1}]}}, \qquad (14.111)$$

где P_{0z} — амплитуда вертикальной возмущающей силы, действующей на виброизолированный объект.

Эффективность виброизоляции тем выше, чем сильнее неравенства:

$$\alpha_z > 4; \quad \alpha_f > 2{,}5, \qquad (14.112)$$

где α_f — отношение частоты возмущающей силы к одной из других пяти частот собственных колебаний виброизолированного объекта.

Задавшись значением α_z, удовлетворяющим условиям (14.111) и (14.112), по формулам (14.113) и (14.114) определяют частоту собственных вертикальных колебаний f_z и общую вертикальную жесткость виброизоляторов K_z:

$$f_z = \frac{f_0}{\alpha_z}; \qquad (14.113)$$

$$K_z = m\omega_z^2 = m(2\pi f_z)^2, \qquad (14.114)$$

где f_0 — частота возмущающей силы в *гц*; m — масса виброизолируемого объекта в $кг \cdot см^{-1} \cdot сек^2$.

Величины неупругих сопротивлений в виброизоляционном устройстве выбирают с помощью графика на рис. 14.4.

Полученные значения общей жесткости виброизоляторов и коэффициентов неупругого сопротивления служат исходными данными для выбора типа виброизоляторов (пружинных, резиновых, пружинно-резиновых или пружинных в сочетании с демпферами вязкого трения).

При выборе средств для увеличения сил неупругого сопротивления необходимо учитывать, что демпферы вязкого трения увеличивают коэффициент передачи, но зато не увеличивают частот собственных колебаний системы, тогда как добавление к пружинам элементов с внутренним трением, например резиновых, существенно увеличивает общую жесткость виброизоляторов и соответственно частоты собственных колебаний системы.

Уменьшения максимальных амплитуд колебаний виброизолированного объекта в переходных режимах можно добиться не только снижением частоты его собственных колебаний, но также эффективным торможением вращающихся деталей при остановке виброизолированной машины. В частности, значительный эффект дает торможение противотоком, т. е. такое переключение проводов на время остановки электродвигателя, при котором создается вращающий момент, противоположный по знаку моменту в рабочем режиме. Уменьшения максимальных амплитуд в переходных режимах можно также достигнуть применением ударных гасителей колебаний.

Расстановка виброизоляторов должна удовлетворять условию, чтобы центр их жесткости лежал на одной вертикали с центром тяжести. Расстановку элементов с неупругим сопротивлением следует подчинить, если позволяет конструктивная схема, условию (14.60).

После установления расчетной схемы определяются частоты собственных колебаний виброизолированного объекта и проверяется соответствие их условиям (14.112). Далее определяются амплитуды вынужденных колебаний виброизолированного объекта в рабочем и переходных режимах, амплитуды колебаний его отдельных точек, а также амплитуды собственных колебаний, возникающих при включении электродвигателей. Наконец, определяются динамические воздействия, передающиеся на несущую конструкцию через виброизоляторы.

Пассивная виброизоляция

Для проектирования и расчета пассивной виброизоляции, кроме данных, указанных для случая активной виброизоляции, необходимы еще следующие:

1) амплитудно-частотная характеристика колебаний основания с обязательным указанием о наличии низкочастотных колебаний в области 0,5—10 *гц*; при отсутствии этих данных должны быть указаны характеристики основных источников возбуждения колебаний основания;

2) данные о наличии в самом виброизолируемом объекте движущихся деталей с оценкой возникающих при этом динамических воздействий;

3) сведения о возможных случайных динамических воздействиях непосредственно на виброизолированный объект (толчки, ручное выключение рубильников, повороты штурвалов, нажатия кнопок, завинчивание гаек и т. п.);

4) характеристики отдельных деталей виброизолируемого объекта, колебания которых следует ограничить;

5) требования, предъявляемые к виброизоляции, с кратким их обоснованием.

В принципе амплитуда колебаний объекта с пассивной виброизоляцией не зависит от его массы, тем не менее иногда полезно увеличить эту массу путем присоединения постамента с целью уменьшения колебаний объекта при

непосредственном воздействии на него случайных толчков и других силовых воздействий.

Виброизолированные объекты, весьма чувствительные к вибрациям, не должны нигде соприкасаться с ограждающими конструкциями.

14.8. Пример расчета виброизоляции

Объектом, подлежащим антивиной виброизоляции, является экспериментальная центрифуга весом 1920 *кгс*, с числом оборотов $N=1440$ *об/мин* и габаритными размерами 170×90×100 *см*. Центр тяжести центрифуги расположен над серединой ее опорной площади на высоте 35 *см*. Мощность электродвигателя 20 *квт*. За 10 *сек* с момента включения тока центрифуга развивает скорость вращения, равную 480 *об/мин*.

В центрифуге имеется тормозное устройство, обеспечивающее продолжительность выбега, меньшую продолжительности разгона. Расчетная величина центробежной силы равна 1000 *кгс*. Центробежная сила приложена в точке, расположенной на середине осевого размера барабана центрифуги. Вал центрифуги находится на высоте 50 *см* от основания. На одном постаменте с центрифугой должен быть размещен пульт управления весом 200 *кгс*. Центр тяжести пульта находится на высоте 75 *см* от основания. К постаменту подводятся патрубки, через которые подается рабочая смесь.

Требования к виброизоляции сводятся к уменьшению возмущающих сил, передающихся на основание, до величины $[P_{kz}]=20$ *кгс*, амплитуда вертикальных колебаний центра тяжести виброизолированного объекта в рабочем режиме не должна превышать $[a_{0z}]=0{,}05$ *мм*, амплитуды колебаний точки крепления подводок на постаменте не должны превышать 0,05 *мм* в рабочем режиме и 1 *мм* в переходных режимах. Температура помещения 18—20° С; агрессивных факторов, воздействующих на виброизоляторы, нет.

Минимальную величину общей массы виброизолированного объекта определяем по формуле (14.110):

$$m_{\text{мин}}=\frac{P_{0z}}{\left[a_{0z}\right]\omega_0^2}=\frac{1000}{0{,}005\,(6{,}28\cdot 24)^2}=8{,}7\ \frac{\text{кгс}\cdot\text{сек}^2}{\text{см}};$$

$$Q_{\text{мин}}=m_{\text{мин}}\,g=87\cdot 981=8500\ \text{кгс}.$$

По формулам (14.111) и (14.113) находим:

$$\alpha_{z\,\text{мин}}=\sqrt{\frac{P_{0z}+[P_{kz}]}{[P_{kz}]}}=\sqrt{\frac{1000+20}{20}}=\sqrt{51}=7{,}15;$$

$$f_{z\,\text{макс}}=\frac{f_*}{\alpha_{z\text{мин}}}=\frac{24}{7{,}15}=3{,}35\ \text{гц}.$$

Задаемся величиной отношения $a_{z\text{макс}}/a_{0z}=5$, и по величине отношения $\varepsilon/f_z^2=0{,}8/3{,}35^2=0{,}071$, используя график рис. 14.4, определяем $\gamma_{z\text{мин}}=0{,}165$.

Применим комбинированные (пружинно-резиновые) виброизоляторы. Форму постамента выберем такой, чтобы можно было совместить в одной точке центр тяжести, центр жесткости и центр неупругого сопротивления (рис. 14.14).

Используем в качестве виброизоляторов пружины, имеющие $d=1{,}6$ *см*, $D=13{,}2$ *см*, $i=5{,}5$ витков, $H_0=26{,}4$ *см*, $K_z'=52$ *кгс/см*, $[P_{\text{ст}}']=487$ *кгс*; $\lambda=9{,}4$ *см*, $H_{\text{р.мин}}=26{,}4-9{,}4=17$ *см*.

Считая толщину опорной пластинки пружинного виброизолятора равной 0,5 *см*, получим общую высоту нагруженного виброизолятора равной: $H_{\text{р.мин}}+2\cdot 0{,}5=18$ *см*. Центр жесткости пружинного виброизолятора будет на середине этой высоты, т. е. на высоте 9 *см*. Центр жесткости резинового виброизолятора находится на уровне его верхней опорной поверхности, поэтому высота нагруженного резинового виброизолятора должна быть равной ~9 *см*. Примем резиновый виброизолятор в форме кубика со стороной 10 *см*, изготовленный из резины сорта 4049 ($E_y'=110$ *кгс/см²*, $\gamma_{\text{р}}=0{,}23$). Жесткость одного резинового виброизолятора в вертикальном направлении определяем по формуле (14.91):

$$K_{z\text{р}}'=\frac{F'E_y'}{H-\dfrac{A}{8}}=\frac{100\cdot 110}{10-\dfrac{10}{8}}=1257\ \text{кгс/см}.$$

Горизонтальную жесткость определяем по формуле (14.93) (принимаем $G_y=E_y'/5$):

$$K_x'=K_y'=\frac{FG_y}{H}=\frac{100\cdot 22}{10}=220\ \text{кгс/см}.$$

Нагрузка на один резиновый виброизолятор при $\sigma=4$ *кгс/см²* будет равна:

$$Q'_{рез}=F'\,\sigma=100\cdot 4=400 \text{ кгс}.$$

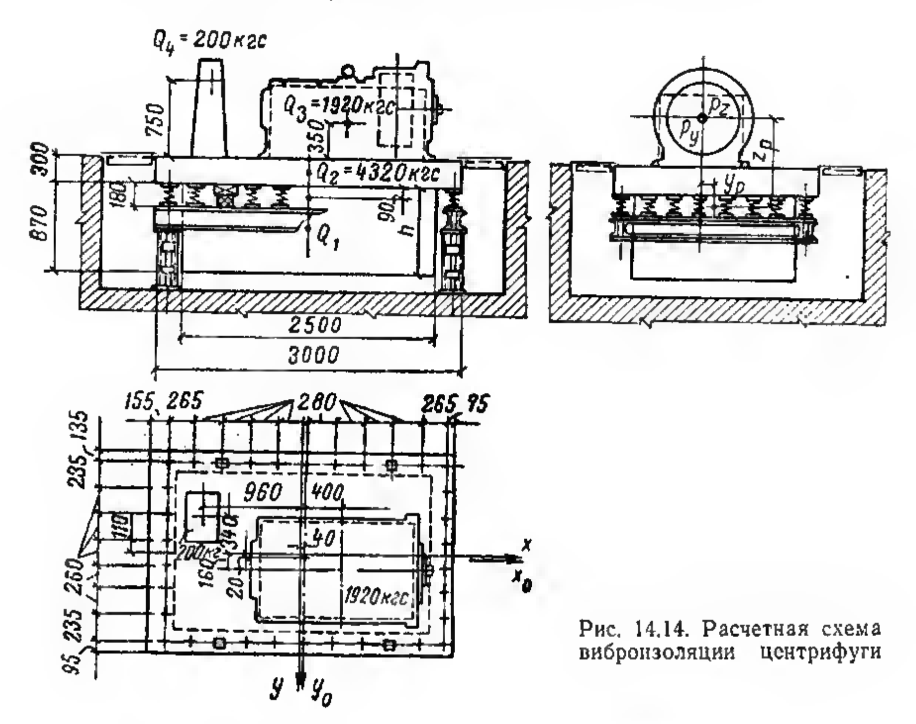


Рис. 14.14. Расчетная схема виброизоляции центрифуги

Часть постамента с искомым весом Q_1 при условии совмещения центра тяжести с центром жесткости, должна иметь высоту h, определяемую из формулы (14.2), если принять начало координат в центре жесткости виброизоляторов и приравнять z_c нулю:

$$z_c=\frac{-250\cdot 150\cdot 2{,}4h\left(\dfrac{h}{2}-9\right)10^{-3}+4320\cdot 24+1920\cdot 74+200\cdot 114}{Q}=0.$$

Решая полученное уравнение относительно h, находим: $h=87$ *см*, $Q_1=25\cdot 15\cdot 8{,}7\cdot 2{,}4=$ $=7800$ *кгс*.

Координаты проекций центра тяжести на плоскость x_0y_0 будут:

$$x_c=\frac{(7800+4320)\,0+1920\cdot 40-200\cdot 96}{7800+4320+1920+200}=\frac{57\,600}{14\,240}=4 \text{ см};$$

$$y_c=\frac{1920\cdot 16-200\cdot 34}{14\,240}=1{,}67\approx 2 \text{ см}.$$

Считая, что в процессе монтажа вся нагрузка может передаваться только на стальные пружины, определим их общее количество по несущей способности:

$$n_п=\frac{Q}{\left[P'_{ст}\right]}=\frac{14\,240}{487}=29{,}2\approx 30 \text{ шт}.$$

Общая жесткость пружинных виброизоляторов будет равна $K_{zп}=30\cdot 52=1560$ *кгс/см*.

Максимальная возможная величина общей жесткости пружинных и резиновых виброизоляторов определяется по формуле (14.114):

$$K_{z\text{макс}} = \frac{Q\,(2\pi f_{z\text{макс}})^2}{g} = \frac{14\,240}{981}\,(6{,}28\cdot 3{,}35)^2 = 6424 \ \text{кгс/см}.$$

Максимальная общая жесткость резиновых виброизоляторов: $K_{zp\cdot\text{макс}} = K_{z\text{макс}} - K_{z\text{п}} = 6424 - 1560 = 4864$ *кгс/см*.

Количество резиновых виброизоляторов

$$n_{\text{р}} = \frac{K_{zp\cdot\text{макс}}}{K'_{zp}} = \frac{4864}{1257} = 3{,}86 \approx 4 \ \text{шт.}$$

Далее определяем: $K_{zp} = 4\cdot 1257 = 5028 \approx 5000$ *кгс/см*; $K_{xp} = K_{yp} = 4\cdot 220 = 880$ *кгс/см*; $K_z = K_{z\text{п}} + K_{zp} = 1560 + 5000 = 6560$ *кгс/см*.

Уточним нагрузку на пружинные виброизоляторы при параллельной их работе с резиновыми виброизоляторами: $Q_{\text{п}} = Q - Q_{\text{р}} = 14\,240 - 1600 = 12\,640$ *кгс*.

Статическая осадка пружин $\Delta_{\text{ст}\cdot\text{п}} = \dfrac{12\,640}{1560} = 8{,}1$ *см*; статическая осадка резиновых виброизоляторов, считая статический модуль упругости $E'_{\text{д}} = 0{,}58\,E'_{\text{Д}}$ (см. рис. 14.8), будет равна:

$$\Delta_{\text{ст}\cdot\text{р}} = \frac{1600}{0{,}58\cdot 5000} = 0{,}55 \ \text{см}.$$

По формуле (14.99) определим высоту подставки под резиновые виброизоляторы: $h = H_{0\text{п}} - H_{0\text{р}} - \Delta_{\text{ст}\cdot\text{п}} + \Delta_{\text{ст}\cdot\text{р}} = 26{,}4 - 10 - 8{,}1 + 0{,}55 = 8{,}85$ *см*.

В нашем случае подставку правильнее назвать надставкой, так как для совмещения центра жесткости и центра неупругого сопротивления она должна находиться выше резинового виброизолятора.

Определив предварительно $\lambda_{\text{ст}}/H_{\text{п}} = 8{,}1/18{,}3 = 0{,}443$ и $H_{\text{п}}/D = 18{,}3/13{,}2 = 1{,}39$, по графику рис. 14.7 найдем горизонтальную жесткость одной пружины и всех пружин: $K'_{x\text{п}} = K'_{y\text{п}} = 0{,}7\,K'_z = 0{,}7\cdot 52 = 36$ *кгс/см*; $K_{x\text{п}} = K_{y\text{п}} = 30\cdot 36 = 1080$ *кгс/см*.

Жесткости неупругих сопротивлений одного резинового виброизолятора и всех четырех будут равны:

$$C'_{zp} = \gamma_{\text{р}}\,K'_z = 0{,}23\cdot 1257 = 290 \ \text{кгс/см};$$

$$C_{zp} = 4\cdot 290 = 1160 \ \text{кгс/см};$$

$$C'_{xp} = C'_{yp} = \gamma_{\text{р}}\,K'_x = 0{,}23\cdot 220 = 51 \ \text{кгс/см};$$

$$C_{xp} = C_{yp} = 4\cdot 51 = 204 \ \text{кгс/см}.$$

Определяем по формулам (14.3) моменты инерции виброизолированного объекта, причем центрифугу аппроксимируем параллелепипедом размером 150×80×70 *см* (на рис. 14.14 показан пунктиром), а массу пульта управления принимаем за точечную:

$$J_{0x} = \frac{1}{981}\left[7800\left(\frac{150^2+87^2}{12} + 34{,}5^2 + 2^2\right) + 4320\left(\frac{200^2+30^2}{12} + 24^2 + 2^2\right) + 1920\left(\frac{80^2+70^2}{12} + 74^2 + 14^2\right) + 200\,(114^2+36^2)\right] = 62{,}8\cdot 10^3 \ \text{кгс}\cdot\text{см}\cdot\text{сек}^2;$$

$$J_{0y} = \frac{1}{981}\left[7800\left(\frac{250^2+87^2}{12} + 34{,}5^2 + 4^2\right) + 4320\left(\frac{300^2+30^2}{12} + 24^2 + 4^2\right) + 1920\left(\frac{150^2+70^2}{12} + 74^2 + 36^2\right) + 200\,(114^2+100^2)\right] = 114\cdot 10^3 \ \text{кгс}\cdot\text{см}\cdot\text{сек}^2;$$

$$J_{0z} = \frac{1}{981}\left[7800\left(\frac{250^2+150^2}{12} + 4^2 + 2^2\right) + 4320\left(\frac{300^2+200^2}{12} + 4^2 + 2^2\right) + 1920\left(\frac{150^2+80^2}{12} + 36^2 + 14^2\right) + 200\,(100^2+36^2)\right] = 113\cdot 10^3 \ \text{кгс}\cdot\text{см}\cdot\text{сек}^2.$$

По формулам (14.5) определяем радиусы инерции:

$$R_{0x} = \sqrt{\frac{62,8\cdot 10^3}{14,52}} = 65,8 \text{ см};$$

$$R_{0y} = \sqrt{\frac{114\cdot 10^3}{14,52}} = 88,6 \text{ см};$$

$$R_{0z} = \sqrt{\frac{113\cdot 10^3}{14,52}} = 88,2 \text{ см}.$$

Расстановка виброизоляторов, произведенная с учетом смещения центра тяжести и соответственно центра жесткости относительно осей постамента, показана на рис. 14.11. Резиновые виброизоляторы в направлении оси x поставлены на расстояниях от центра жесткости, равных примерно радиусу инерции R_{0y}.

По формулам (14.9) определяем угловые жесткости всей совокупности виброизоляторов:

$$K_{\varphi x} = 52\,[4\,(13^2 + 39^2 + 65^2) + 18\cdot 88,5^2] + 4\cdot 1257\cdot 88,5^2 = 460\cdot 10^5 \text{ кгс}\cdot\text{см};$$

$$K_{\varphi y} = 52\,[4\,(28^2 + 56^2 + 112^2) + 16\cdot 138,5^2] + 4\cdot 1257\cdot 84^2 = 469,2\cdot 10^5 \text{ кгс}\cdot\text{см};$$

$$K_{\varphi z} = 36\,[4\,(28^2 + 56^2 + 112^2) + 16\cdot 138,5^2] + 4\cdot 220\cdot 84^2 + 36\,[4\,(13^2 + 39^2 + 65^2) + 18\cdot 88,5^2] + 4\cdot 220\cdot 88,5^2 = 324,5\cdot 10^5 \text{ кгс}\cdot\text{см}.$$

По формуле (14.20) определяем угловые жесткости неупругих сопротивлений, пренебрегая неупругими сопротивлениями пружин:

$$C_{\varphi x} = \sum C_{zi}\, y_{ci}^2 = 4\cdot 290\cdot 88,5^2 = 91\cdot 10^5 \text{ кгс}\cdot\text{см};$$

$$C_{\varphi y} = \sum C_{zi}\, x_{ci}^2 = 4\cdot 290\cdot 84^2 = 82,2\cdot 10^5 \text{ кгс}\cdot\text{см};$$

$$C_{\varphi z} = \sum C_{xi}\, y_{ci}^2 + \sum C_{yi}\, x_{ci}^2 = 4\cdot 51\,(88,5^2 + 84^2) = 30,4\cdot 10^5 \text{ кгс}\cdot\text{см}.$$

Коэффициенты неупругих сопротивлений всей совокупности виброизоляторов на каждой координате определяем по формулам (14.12) и (14.24):

$$\gamma_x = \frac{C_x}{K_{x\text{п}} + K_{x\text{р}}} = \frac{204}{1080 + 880} = 0,104; \quad \gamma_y = \gamma_x = 0,104;$$

$$\gamma_z = \frac{C_z}{K_{z\text{п}} + K_{z\text{р}}} = \frac{1160}{6560} = 0,177;$$

$$\gamma_{\varphi x} = \frac{C_{\varphi x}}{K_{\varphi x}} = \frac{91\cdot 10^5}{460\cdot 10^5} = 0,198;$$

$$\gamma_{\varphi y} = \frac{C_{\varphi y}}{K_{\varphi y}} = \frac{82,2\cdot 10^5}{469,2\cdot 10^5} = 0,175$$

$$\gamma_{\varphi z} = \frac{C_{\varphi z}}{K_{\varphi z}} = \frac{30,4\cdot 10^5}{324,5\cdot 10^5} = 0,0935.$$

Частоты собственных колебаний виброизолированного объекта определяем по формулам (14.26)

$$\omega_x^2 = \omega_y^2 = \frac{K_x}{m} = \frac{1960}{14,52} = 135 \text{ рад/сек}^2;$$

$$f_x = f_y = 1,85 \text{ гц};$$

$$\omega_z^2 = \frac{K_z}{m} = \frac{6560}{14,52} = 452 \text{ рад/сек}^2;$$

$$f_z = 3,4 \text{ гц};$$

$$\omega_{\varphi x}^2 = \frac{K_{\varphi x}}{J_{0x}} = \frac{460\cdot 10^5}{62,8\cdot 10^3} = 732 \text{ рад/сек}^2; \quad f_{\varphi x} = 4,3 \text{ гц};$$

$$\omega_{\varphi y}^2 = \frac{K_{\varphi y}}{J_{0y}} = \frac{469,2 \cdot 10^5}{114 \cdot 10^3} = 412\ рад/сек^2; \quad f_{\varphi y} = 3,24\ гц$$

$$\omega_{\varphi z}^2 = \frac{K_{\varphi z}}{J_{0z}} = \frac{324,5 \cdot 10^5}{113 \cdot 10^3} = 287\ рад/сек^2; \quad f_{\varphi z} = 2,7\ гц.$$

Вычисляем отношения частоты возмущающей силы к частотам собственных колебаний:

$$\alpha_x = \frac{24}{1,85} = 13; \quad \alpha_y = 13; \quad \alpha_z = \frac{24}{3,4} = 7,05;$$

$$\alpha_{\varphi x} = \frac{24}{4,3} = 5,6; \quad \alpha_{\varphi y} = \frac{24}{3,24} = 7,4; \quad \alpha_{\varphi z} = \frac{24}{2,7} = 8,9.$$

Все частоты собственных колебаний удовлетворяют условию (14.112).

Определение возмущающих воздействий на виброизолированный объект по каждой координате и амплитуд вынужденных колебаний. Координаты точки приложения центробежной силы равны: $x_{0p} = 80$ *см*, $y_{0p} = 14$ *см*, $z_{0p} = 89$ *см*.

Заменим центробежную силу вертикальной силой $P_z = P'_{0z} \sin \omega_0 t$ и горизонтальной силой $P_y = P''_{0y} \cos \omega_0 t$. Амплитуды возмущающих воздействий, изменяющихся по закону синуса, будут:

$$P'_{0x} = 0; \quad P'_{0y} = 0; \quad P'_{0z} = 1000\ кгс; \quad M'_{0z} = 0;$$

$$M'_{0x} = P'_{0z}\, y_{0p} = 1000 \cdot 14 = 14 \cdot 10^3\ кгс \cdot см;$$

$$M'_{0y} = -P'_{0z}\, x_{0p} = 1000 \cdot 80 = 80 \cdot 10^3\ кгс \cdot см.$$

Соответствующие им амплитуды вынужденных колебаний при рабочем режиме центрифуги определяем по формулам (14.39):

$$a'_{0x} = 0; \quad a'_{0y} = 0; \quad a'_{0z} = \frac{P'_{0z}}{K_z\left(1 - \alpha_z^2\right)} = \frac{1000}{6560\,(1 - 7,05^2)} = -0,00313\ см;$$

$$\varphi'_{0x} = \frac{M'_{0x}}{K_{\varphi x}\left(1 - \alpha_{\varphi x}^2\right)} = \frac{14 \cdot 10^3}{460 \cdot 10^5\,(1 - 5,6^2)} = -10,1 \cdot 10^{-6}\ рад;$$

$$\varphi'_{0y} = \frac{M'_{0y}}{K_{\varphi y}\left(1 - \alpha_{\varphi y}^2\right)} = \frac{-80 \cdot 10^3}{469,2 \cdot 10^5\,(1 - 7,4^2)} = 31,6 \cdot 10^{-6}\ рад; \quad \varphi'_{0z} = 0;$$

$$a''_{0x} \approx a''_{0y} \approx a''_{0z} \approx \varphi''_{0x} \approx \varphi''_{0y} \approx \varphi''_{0z} \approx 0.$$

Амплитуды возмущающих воздействий, изменяющихся по закону косинуса, будут равны:

$$P''_{0x} = 0; \quad P''_{0y} = 1000\ кгс; \quad P''_{0z} = 0;$$

$$M''_{0x} = -P_{0y}\, z_{0p} = -1000 \cdot 89 = -89 \cdot 10^3\ кгс \cdot см; \quad M''_{0y} = 0;$$

$$M''_{0z} = P''_{0y}\, x_{0p} = 1000 \cdot 80 = 80 \cdot 10^3\ кгс \cdot см.$$

Соответствующие им амплитуды вынужденных колебаний виброизолированного объекта в рабочем режиме определяем по формулам (14.40):

$$b''_{0x} = 0; \quad b''_{0y} = \frac{P''_{0y}}{K_y\left(1 - \alpha_y^2\right)} = \frac{1000}{1960\,(1 - 13^2)} = -0,003\ см; \quad b''_{0z} = 0;$$

$$\psi''_{0x} = \frac{M''_{0x}}{K_{\varphi x}\left(1 - \alpha_{\varphi x}^2\right)} = \frac{-89,10^5}{460 \cdot 10^5\,(1 - 5,6^2)} = 63 \cdot 10^{-6}\ рад;$$

$$\psi''_{0y} = 0; \quad \psi''_{0z} = \frac{M''_{0z}}{K_{\varphi z}\left(1-\alpha^2_{\varphi z}\right)} = \frac{80 \cdot 10^3}{324{,}5 \cdot 10^5\,(1-8{,}9^2)} = -\,30{,}5 \cdot 10^{-6}\ \textit{рад};$$

$$b'_{0x} \approx b'_{0y} \approx b'_{0z} \approx \psi'_{0x} \approx \psi'_{0y} \approx \psi'_{0z} \approx 0.$$

По формулам (14.50) в данном случае имеем $a_{0x} = a'_{0x}$; $a_{0y} = a'_{0y}$; $a_{0z} = a'_{0z}$; $\varphi_{0x} = \varphi'_{0x}$ $\varphi_{0y} = \varphi'_{0y}$; $\varphi_{0z} = \varphi'_{0z}$.

По формулам (14.52) определяем амплитуды синусоидальных колебаний точки № 1 с координатами $x_{01}=140$ *см*, $y_{01}=98$ *см*, $z_{01}=45$ *см*, в которой подводки крепятся к виброизолированному постаменту:

$$a_{x1} = a_{0x} + \varphi_{0y}\, z_{01} - \varphi_{0z}\, y_{01} = 0 + 31{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 45 - 0 = 0{,}00143\ \textit{см};$$

$$a_{y1} = a_{0y} + \varphi_{0z}\, x_{01} - \varphi_{0x}\, z_{01} = 0 + 0 + 10{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 45 = 0{,}00045\ \textit{см};$$

$$a_{z1} = a_{0z} + \varphi_{0x}\, y_{01} - \varphi_{0y}\, x_{01} = -\,0{,}00313 + 0 - 31{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 140 = -\,0{,}00755\ \textit{см}.$$

Аналогично по формулам (14.53) определяем амплитуды косинусоидальных колебаний точки № 1:

$$b_{x1} = b_{0x} + \psi_{0y}\, z_{01} - \psi_{0z}\, y_{01} = 0 + 0 + 30{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 98 = 0{,}00300\ \textit{см};$$

$$b_{y1} = b_{0y} + \psi_{0z}\, x_{01} - \psi_{0x}\, z_{01} = -\,0{,}0030 + 30{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 140 -$$

$$-\,63 \cdot 10^{-6} \cdot 45 = -\,0{,}0101\ \textit{см};$$

$$b_{z1} = b_{0z} + \psi_{0x}\, y_{01} - \psi_{0y}\, x_{01} = 0 + 63 \cdot 10^{-6} \cdot 98 - 0 = 0{,}0062\ \textit{см}.$$

Амплитуды суммарных колебаний точки № 1 определяем по формулам (14.54):

$$A_{x1} = \sqrt{a^2_{x1} + b^2_{x1}} = 10^{-4}\sqrt{14{,}3^2 + 30^2} = 0{,}0033\ \textit{см};$$

$$A_{y1} = \sqrt{a^2_{y1} + b^2_{y1}} = 10^{-4}\sqrt{4{,}5^2 + 101^2} = 0{,}0101\ \textit{см};$$

$$A_{z1} = \sqrt{a^2_{z1} + b^2_{z1}} = 10^{-4}\sqrt{75{,}5^2 + 62^2} = 0{,}0098\ \textit{см}.$$

Они превышают значения, допускаемые проектным заданием. По согласованию с технологами место крепления подводок перенесено в точку № 2 с координатами $x_{02} = -154$ *см*; $y_{02}=0$; $z_{02}=45$ *см*.

Амплитуды суммарных колебаний точки № 2 оказались равными $A_{x2}=0{,}00143$ *см*, $A_{y2}=0{,}0012$ *см*, $A_{z2}=0{,}00175$ *см* и вполне удовлетворяющими требованиям проектного задания.

Для определения максимальных амплитуд колебаний точки № 2 в резонансных режимах при разгоне центрифуги (при остановке резонансные амплитуды будут меньше вследствие искусственно созданного ускоренного торможения) найдем предварительно безразмерные параметры ε/f_i^2, характеризующие скорость нарастания частоты возмущающей силы по каждой координате:

$$\frac{\varepsilon}{f_x^2} = \frac{0{,}8}{1{,}85^2} = 0{,}23; \quad \frac{\varepsilon}{f_y^2} = \frac{0{,}8}{1{,}85^2} = 0{,}23;$$

$$\frac{\varepsilon}{f_z^2} = \frac{0{,}8}{3{,}4^2} = 0{,}069; \quad \frac{\varepsilon}{f_{\varphi x}^2} = \frac{0{,}8}{4{,}3^2} = 0{,}043;$$

$$\frac{\varepsilon}{f_{\varphi y}^2} = \frac{0{,}8}{3{,}24^2} = 0{,}076; \quad \frac{\varepsilon}{f_{\varphi z}^2} = \frac{0{,}8}{2{,}7^2} = 0{,}11.$$

Пользуясь графиком рис. 14.4, по найденным выше значениям γ для каждой координаты и величинам безразмерных параметров ε/f_i^2 определяем отношения максимальных амплитуд в резонансных режимах к амплитудам колебаний в рабочем режиме:

$$\frac{\overset{*}{a}_x}{a_{0x}} = 5\ (9{,}6); \quad \frac{\overset{*}{a}_y}{a_{0y}} = 5\ (9{,}6); \quad \frac{\overset{*}{a}_z}{a_{0z}} = 4{,}8\ (5{,}7);$$

$$\frac{\overset{*}{\varphi}_{0x}}{\varphi_{0x}} = 4{,}8\ (5{,}1); \quad \frac{\overset{*}{\varphi}_{0y}}{\varphi_{0y}} = 4{,}8\ (5{,}7);$$

$$\frac{\overset{*}{\varphi}_{0z}}{\varphi_{0z}} = 6{,}5\ (10{,}7).$$

В скобках указаны резонансные увеличения, соответствующие очень медленному нарастанию частоты возмущающей силы.

Максимальные амплитуды колебаний виброизолированного объекта в резонансных режимах по каждой координате будут следующими:

$$A_{0x} = 0; \; A_{0y} = 5\, b''_{0y} = -\,5 \cdot 0{,}003 = -\,0{,}015 \; см;$$

$$A_{0z\,макс} = 4{,}8 a'_{0z} = -\,4{,}8 \cdot 0{,}00313 = -\,0{,}015 \; см;$$

$$\psi_{0x\,макс} = 4{,}8 \sqrt{\varphi'^2_{0x} + \psi''^2_{0x}} = 4{,}8 \cdot 10^{-6} \sqrt{10{,}1^2 + 63^2} = \pm\, 303 \cdot 10^{-6} \; рад;$$

$$\psi_{0y\,макс} = 4{,}8\, \varphi'_{0y} = 4{,}8 \cdot 31{,}6 \cdot 10^{-6} = 151 \cdot 10^{-6} \; рад;$$

$$\psi_{0z\,макс} = 6{,}5\, \psi''_{0z} = -\,6{,}5 \cdot 30{,}5 \cdot 10^{-6} = -\,200 \cdot 10^{-6} \; рад.$$

Верхние границы максимальных амплитуд колебаний точки № 2 в переходных режимах определяем по формулам (14.55):

$$A_{x2\,макс} = |A_{0x\,макс}| + |\psi_{0y\,макс}\, z_{02}| + |\psi_{0z\,макс}\, y_{02}| =$$
$$= 0 + |151 \cdot 10^{-6} \cdot 45| + 0 = 0{,}0068 \; см;$$
$$A_{y2\,макс} = |A_{0y\,макс}| + |\psi_{0z\,макс}\, x_{02}| + |\psi_{0x\,макс}\, z_{02}| =$$
$$= |-\,0{,}015| + |-\,200 \cdot 10^{-6} \cdot 154| + |\pm\, 300 \cdot 10^{-6} \cdot 45| = 0{,}059 \; см;$$
$$A_{z2\,макс} = |A_{0z\,макс}| + |\psi_{0x\,макс}\, y_{02}| + |\psi_{0y\,макс}\, x_{02}| =$$
$$= |-\,0{,}015| + 0 + |151 \cdot 10^{-6} \cdot 154| = 0{,}0384 \; см.$$

Полученные значения амплитуд колебаний точки крепления подводок в резонансных режимах удовлетворяют требованиям проектного задания.

По формуле (14.70) определяем величину внезапно приложенного вращающего момента при включении электродвигателя:

$$M_{xп} = M_{xн} = \frac{97\,500 \cdot 20}{1440} = 1360 \; кгс \cdot см.$$

Этот момент вызовет максимальное отклонение от положения статического равновесия на угол, определяемый по формуле (14.71):

$$\varphi_x = \frac{2M_{xп}}{K_{\varphi x}} = \frac{2 \cdot 1360}{460 \cdot 10^5} = 59 \cdot 10^{-6} \; рад.$$

Поворот на такой угол вызовет перемещение края виброизолированного постамента в вертикальном направлении, равное $a_z = \varphi_x \cdot 100 = 59 \cdot 10^{-6}\ 100 = 0{,}0059$ *см*, что вполне допустимо.

Определение динамических нагрузок, передаваемых на основание. Коэффициенты передачи определяем по формулам (14.74):

$$\mu'_z = \frac{1}{1 - \alpha_z^2} = \frac{1}{1 - 7{,}05^2} = \frac{1}{48{,}5};$$

$$\mu'_{\varphi x}=\frac{1}{1-\alpha^2_{\varphi x}}=\frac{1}{1-5,6^2}=-\frac{1}{30}$$

$$\mu'_{\varphi y}=\frac{1}{1-\alpha^2_{\varphi y}}=\frac{1}{1-7,4^2}=\frac{1}{54};$$

$$\varkappa''_y=\frac{1}{1-\alpha^2_{\varphi y}}=\frac{1}{1-13^2}=-\frac{1}{168};$$

$$\varkappa''_{\varphi x}=\frac{1}{1-\alpha^2_{\varphi x}}=\frac{1}{1-5,6^2}=\frac{1}{30};$$

$$\varkappa''_{\varphi z}=\frac{1}{1-\alpha^2_{\varphi z}}=\frac{1}{1-8,9^2}=-\frac{1}{78,5}.$$

Силы, приложенные к центру жесткости, условно жестко связанному с основанием, и моменты, передающиеся на основание, определяем по формулам (14.76):

$$P''_{ky}=\varkappa''_y P_{0y}=\frac{1000}{-168}=-6\ кгс;$$

$$P'_{kz}=\mu'_z P'_{0z}=\frac{1000}{-48,5}=-20,6\ кгс.$$

$$M''_{kx}=\mu_{\varphi x} M'_{0x}=\frac{14\cdot 10^3}{-30}=-467\ кгс\cdot см;$$

$$M''_{kx}=\varkappa''_{\varphi x} M''_{0x}=\frac{89\cdot 10^3}{-30}=-2970\ кгс\cdot см;$$

$$M'_{ky}=\mu'_{\varphi y} M'_{0y}=\frac{-80\cdot 10^3}{-54}=1480\ кгс\cdot см;$$

$$M''_{kz}=\varkappa''_{\varphi z} M''_{0z}=\frac{80\cdot 10^3}{-78,3}=-1020\ кгс\cdot см.$$

Амплитуды суммарных динамических воздействий на основание определяем по формулам (14.77):

$$P_{kx}=0;\ P_{ky}=6\ кгс;\ P_{kz}=20,6\ кгс;$$

$$M_{kx}=\sqrt{M'^2_{kx}+M''^2_{kx}}=\sqrt{467^2+2970^2}=3000\ кгс\cdot см;\ M_{ky}=1480\ кгс\cdot см;\ M_{kz}=1020\ кгс\cdot см.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Ю. В. О влиянии виброизоляции кузнечных молотов на к. п. д. удара и нагрузку фундаментного блока. «Кузнечно-штамповочное пориводство», 1962, № 1.
2. Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П. Нестационарные колебания механических систем. Изд. «Наукова думка», Киев, 1966.
3. Григорьев Е. Т. Расчет и конструирование резиновых амортизаторов. Машгиз, 1960.
4. Ильинский В. С. Вопросы изоляции вибраций и ударов. «Советское радио», 1960.
5. Инструкция по проектированию и расчету виброизоляции машин с динамическими нагрузками и оборудования, чувствительного к вибрациям. (И 204-55/МСПМХП). Госстройиздат, 1956.
6. Инструкция по определению динамических нагрузок от машин, устанавливаемых на перекрытиях промышленных зданий. ЦНИИ строительных конструкций им. В. А. Кучеренко. Стройиздат, 1966.
7. Нориш Ю. Н. Защита самолетного оборудования от вибраций. Оборонгиз, 1949.
8. Каминская В. В., Ривин Е. М. Виброизоляция прецизионных станков. ЭНИМС, руководящие материалы, 1964.
9. Кац А. М. Вынужденные колебания при прохождении через резонанс. Инженерный сборник, т. 1, вып. 2. Изд-во АН СССР, 1947.

10. Клатцо М. М. Расчет фундаментов прецизионного оборудования на колебания. «Основания, фундаменты и механика грунтов», 1964, № 3.
11. Коренев Б. Г. О пусковом резонансе. В сб.: «Исследования по динамике сооружений». Стройиздат, 1957.
12. Коренев Б. Г., Пикулев Н. А., Шейнин И. С. О методах уменьшения вибраций при прохождении через резонанс во время пуска и остановки оборудования. В сб.: «Колебания зданий и сооружений». Госстройиздат, 1963.
13. Максимов Л. С. Расчет виброизоляции оборудования, чувствительного к вибрации при случайных воздействиях. «Машиноведение», 1969, № 1.
14. Мартышкин В. С. Пружинно-резиновые виброизоляторы. Техн. упр. МСПМХП. Информационное сообщение, № 6, 1954.
15. Мартышкин В. С. Виброизоляция. Глава в кн.: «Борьба с шумом». Под ред. Е. Я. Юдина. Стройиздат, 1964.
16. Певзнер Я. М., Горелик А. М. Пневматические и гидропневматические подвески. Машгиз, 1963.
17. Пикулев Н. А. О роли упругой вставки между демпфером и колеблющейся массой. «Строительная механика и расчет сооружений», 1959, № 6.
18. Пономарев С. Д. Пружины и рессоры. Энциклопедический справочник. «Машиностроение», т. 2. ОНТИ, 1948.
19. Рауш Э. Фундаменты машин. Стройиздат, 1965.
20. Руководство по проектированию виброизоляции машин и оборудования. Стройиздат, 1972.
21. Савинов О. А. Современные конструкции фундаментов под машины и их расчет. Стройиздат, 1964.
22. Шейнин И. С. О пусковых резонансах в линейных системах. В сб.: «Исследования по динамике сооружений и расчету конструкций на упругом основании». Госстройиздат, 1961.
23. Grube K. Knicksicherheit und Querfederung von Druckfedern. VDJ, 1942, S. 316.
24. Crede C. Vibration Isolation. New Jork, 1953.
25. Kosten G. W. Berechnung von Federungselement aus Gummi. VDJ, 1942, S. 535.
26. Koch H. W., Starke P. Grosse und Beurteilung der Erschütterungen in der Umgebung von Schmiedehämmern. «Werkstadtstechnik und Maschinenbau», 1958, VJ, Bd. 48, № 6.
27. Koch H. W. Erschütterungsuntersuchungen in der Nachbarschaft von Schmieden. «Stahl und Eisen», 1958, Bd. 78.

РАЗДЕЛ 15

ВИБРОИЗОЛИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

(В. А. Ивович)

Линейная теория виброизоляции, ставшая одним из наиболее полно разработанных разделов прикладной теории колебаний, позволяет решить большую часть практически важных задач, связанных с виброзащитой строительных конструкций. Методы линейной теории в настоящее время широко используются при расчете и проектировании различных виброизолированных систем. Гораздо менее разработанной является теория виброизолированных систем с нелинейными характеристиками. Поэтому в разделе рассмотрены лишь отдельные вопросы, далеко не исчерпывающие всего круга сложных проблем, относящихся к нелинейной виброизоляции.

В последние годы внимание ряда исследователей [5, 6, 9, 10, 18] было обращено на влияние нелинейности, приводящей к резкому снижению эффективности виброзащиты. К таким явлениям можно отнести резонансы дробных порядков, автопараметрические колебания и т. п. С увеличением интенсивности вибрационных и ударных возмущений влияние нелинейных эффектов возрастает.

Нелинейные эффекты связаны с целым рядом причин: применением материалов, не подчиняющихся закону Гука, наличием упругих ограничителей хода; применением виброизоляторов, выполненных в виде конических пружин или пружин с переменным шагом, у которых не соблюдается закон прямой пропорциональности между усилием и осадкой, и т. п.

Применение виброизолирующих устройств с нелинейными упругими характеристиками в ряде случаев оказывается весьма полезным. Эти обстоятельства способствовали развитию теории нелинейных систем виброизоляции.

15.1. Гармоническая линеаризация

Для отыскания периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений движения виброизолированных систем применяются различные приближенные методы (гармонической линеаризации [12], малого параметра [11], энергетического баланса [15], Галеркина [8] и т. д.). Все эти методы в случае слабо нелинейных дифференциальных уравнений движения виброизолированных систем дают достаточную для практических целей точность и приводят в первом приближении к идентичным результатам.

Остановимся на методе гармонической линеаризации. Положим, что колебания виброизолированной системы описываются нелинейным дифференциальным уравнением вида:

$$Q(p)\,x + R(p)\,F(x, px) = S(p)\,z, \quad \left(p = \frac{d}{dt}\right), \tag{15.1}$$

где $Q(p)$, $R(p)$, $S(p)$ — полиномы от оператора p; $F(x, px)$ — нелинейная функция; z — заданная функция времени.

Метод гармонической линеаризации можно трактовать как метод наилучшего приближения заданной нелинейной функции от искомого решения

с помощью линейной функции от этого решения. В общем случае несимметричной нелинейной характеристики периодическое решение уравнения (15.1) принимается близким к гармоническому с постоянной составляющей. Положим, например, что

$$S(p)\,z = V \sin \Omega t. \qquad (15.2)$$

Тогда первым приближением будет:

$$x = A_0 + x^*, \text{ где } x^* = A \sin \psi, \quad \psi = \Omega t - \varphi, \qquad (15.3)$$

где A_0 — нереверсивная составляющая; φ — угол сдвига фаз.

Воспользовавшись выражениями (15.3), заменим истинную нелинейную функцию $F(x, px)$ линейной зависимостью

$$F^*(x, px) = F_0 + qx^* + \frac{r}{\Omega} px^*. \qquad (15.4)$$

При такой замене необходимо положить:

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(A_0 + A\sin\psi;\quad A\,\Omega\cos\psi)\,d\psi; \\ q &= \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} F(A_0 + A\sin\psi;\quad A\Omega\cos\psi)\sin\psi\,d\psi; \\ r &= \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} F(A_0 + A\sin\psi;\quad A\,\Omega\cos\psi)\cos\psi\,d\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (15.5)$$

Для определения параметров колебательного процесса следует решить линеаризованное уравнение, образующееся после замены функции $F(x, px)$ на $F^*(x, px)$. В результате решения будут получены соотношения $A_0 = A_0(F_0, q, r)$; $A = A(F_0, q, r)$; $\Omega = \Omega(F_0, q, r)$.

Подставляя сюда F_0, q, r из зависимостей (15.5), приходим к трем уравнениям с тремя неизвестными, решение которых дает искомые значения A_0, A, Ω.

15.2. Коэффициенты гармонической линеаризации для некоторых типов нелинейных функций

При динамическом расчете виброизолированных систем встречаются различные типы нелинейностей.

Если нелинейная функция $F(x, px)$ является симметричной, то $A_0 = F_0 = 0$, а коэффициенты q и r определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} F(A\sin\psi,\quad A\Omega\cos\psi)\sin\psi\,d\psi; \\ r &= \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} F(A\sin\psi,\quad A\Omega\cos\psi)\cos\psi\,d\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (15.6)$$

В случае нелинейной функции $F(x)$, не зависящей от скорости изменения аргумента, коэффициенты гармонической линеаризации принимают вид:

$$q = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} F(A\sin\psi)\sin\psi\,d\psi;$$

$$r = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} F(A\sin\psi)\cos\psi\,d\psi. \tag{15.7}$$

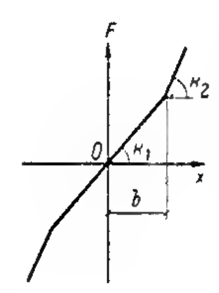
Ниже приводятся выражения коэффициентов гармонической линеаризации для различных типов нелинейных функций.

Гармоническая линеаризация симметричных нелинейностей

а) Кусочно-линейная характеристика с переменным коэффициентом жесткости (рис. 15.1):

$$q = k_2 - \frac{2}{\pi}(k_2 - k_1)\left(\arcsin\frac{b}{A} + \frac{b}{A}\sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}\right), \tag{15.8}$$

$$r = 0 \quad (\text{при } A \geqslant b).$$



← Рис. 15.1. Кусочно-линейная характеристика с переменным коэффициентом жесткости

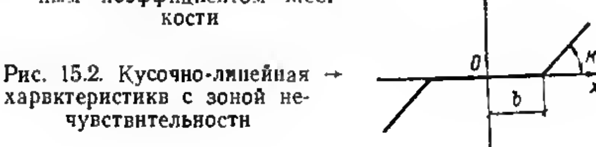


Рис. 15.2. Кусочно-линейная → характеристика с зоной нечувствительности

При $A \leqslant b$ коэффициент $q = k_1$ (линейная характеристика).

б) Кусочно-линейная характеристика с зоной нечувствительности (рис. 15.2):

$$q = k - \frac{2k}{\pi}\left(\arcsin\frac{b}{A} + \frac{b}{A}\sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}\right), \tag{15.9}$$

$$r = 0 \ (\text{при } A \geqslant b).$$

в) Кусочно-линейная характеристика системы с предварительным поджатием (рис. 15.3)

$$q = k_2 + \frac{4c}{\pi A}, \quad r = 0. \tag{15.10}$$

г) Характеристика с гистерезисной петлей (рис. 15.4):

$$q = \frac{k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \frac{2b}{A}\right) + 2\left(1 - \frac{2b}{A}\right)\sqrt{\frac{b}{A}\left(1 - \frac{b}{A}\right)}\right],$$

$$r = -\frac{4kb}{\pi A}\left(1 - \frac{b}{A}\right) \ (\text{при } A \geqslant b). \tag{15.11}$$

д) Степенные нелинейные характеристики. При составлении уравнений движения виброизолированных систем встречаются степенные нелинейные характеристики вида:

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= kx^n \text{ (при } x \text{ целом нечетном);} \\ F(x) &= kx^n \operatorname{sign} x \text{ (при } x \text{ целом четном).} \end{aligned} \right\} \qquad (15.12)$$

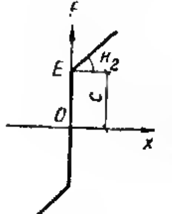


Рис. 15.3. Кусочно-линейная характеристика системы с предварительным поджатием

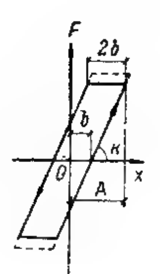


Рис. 15.4. Характеристика с гистерезисной петлей

Для этого случая в силу однозначности характеристик $r=0$. Коэффициент гармонической линеаризации q для любой степенной характеристики вида (15.12) определяется по формулам:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{3\cdot5\cdots n}{4\cdot6\cdots(n+1)}\, kA^{n-1} \text{ (при } n \text{ нечетном);} \\ q &= \frac{4}{\pi}\cdot\frac{2\cdot4\cdots n}{3\cdot5\cdots(n+1)}\, kA^{n-1} \text{ (при } n \text{ четном).} \end{aligned} \right\} \qquad (15.13)$$

В частном случае $F(x)=kx^2 \operatorname{sign} x$ получаем:

$$q = \frac{8kA}{3\pi}. \qquad (15.14)$$

Для характеристики $F(x)=kx^3$ имеем:

$$q = \frac{3kA^2}{4}. \qquad (15.15)$$

При $F(x)=kx^4 \operatorname{sign} x$

$$q = \frac{32kA^3}{15\pi}. \qquad (15.16)$$

При $F(x)=kx^5$ имеем:

$$q = \frac{5kA^4}{8}. \qquad (15.17)$$

е) Графический способ гармонической линеаризации. Графический способ определения коэффициентов гармонической линеаризации удобно применять в тех случаях, когда нелинейную характеристику, полученную экспериментальным путем, затруднительно представить в аналитическом виде. В случае однозначных симметричных характеристик коэффициент r равен нулю, а приближенное вычисление первого интеграла (15.7) дает:

$$q \approx \frac{2}{3A}\left[F(A) + F\left(\frac{A}{2}\right)\right]. \qquad (15.18)$$

Зависимость (15.18) позволяет определять $q(A)$ графическим способом на основе имеющейся зависимости $F(x)$.

ж) Нелинейность типа сухого трения $F(x, px) = c \operatorname{sign} x$ ($c = \text{const}$):

$$r = \frac{4c}{\pi A}, \quad q = 0. \tag{15.19}$$

Гармоническая линеаризация несимметричных нелинейностей

а) Несимметричная кусочно-линейная характеристика типа двусторонней реакции упругого элемента с различной жесткостью (рис. 15.5).

В соответствии с формулами (15.5) для этого случая получаем:

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= \frac{k_1 + k_2}{2} A_0 + \frac{k_1 - k_2}{\pi}\left(A_0 \arcsin\frac{A_0}{A} + A\sqrt{1 - \frac{A_0^2}{A^2}}\right); \\ q &= \frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_1 - k_2}{\pi}\left(\arcsin\frac{A_0}{A} + \frac{A_0}{A}\sqrt{1 - \frac{A_0^2}{A^2}}\right). \\ &(r = 0). \end{aligned}\right\} \tag{15.20}$$

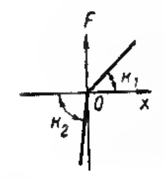


Рис. 15.5. Характеристика типа двусторонней реакции упругого элемента с различной жесткостью

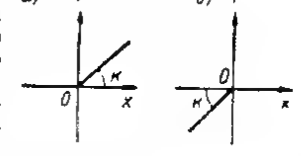


Рис. 15.6. Характеристики типа односторонней реакции упругого элемента

б) Характеристика типа односторонней реакции упругого элемента (рис. 15.6). Для характеристики, представленной на рис. 15.6, *а*, постоянная составляющая F_0 и коэффициент q имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= \frac{kA_0}{2} + \frac{k}{\pi}\left(A_0 \arcsin\frac{A_0}{A} + A\sqrt{1 - \frac{A_0^2}{A^2}}\right); \\ q &= \frac{k}{2} + \frac{k}{\pi}\left(\arcsin\frac{A_0}{A} + \frac{A_0}{A}\sqrt{1 - \frac{A_0^2}{A^2}}\right), \\ &(r = 0). \end{aligned}\right\} \tag{15.21}$$

Для характеристики (рис. 15.6, *б*) из формул (15.5) получаем:

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= \frac{kA_0}{2} - \frac{k}{\pi}\left(A_0 \arcsin\frac{A_0}{A} + A\sqrt{1 - \frac{A_0^2}{A^2}}\right); \\ q &= \frac{k}{2} - \frac{k}{\pi}\left(\arcsin\frac{A_0}{A} + \frac{A_0}{A}\sqrt{1 - \frac{A_0^2}{A^2}}\right), \\ &(r = 0). \end{aligned}\right\} \tag{15.22}$$

в) Степенная несимметричная характеристика $F(x) = kx^2 H(x)$, где $H(x)$ — ступенчатая функция, равная 1 при $x > 0$ и 0 при $x < 0$, представлена на рис. 15.7. В этом случае:

$$
\left.
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{k}{\pi}\left[\left(A_0^2+\frac{A^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{A_0}{A}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{3}{2}A_0 A\sqrt{1-\frac{A_0^2}{A^2}}\,\right];\\
q &= \frac{2k}{\pi}\left[A_0\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{A_0}{A}\right)+\right.\\
&\left.+\left(\frac{2A_0}{3A}+\frac{A_0^2}{3A}\right)\sqrt{1-\frac{A_0^2}{A^2}}\,\right].
\end{aligned}
\right\}
\qquad (15.23)
$$

Рис. 15.7. Степенная несимметричная характеристика $F(x) = kx \cdot 1(x)$

г) Степенная несимметричная характеристика $F(x) = kx^3 H(x)$:

$$
\left.
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{k}{2\pi}\left[\left(2A_0^3+3A_0 A^2\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{A_0}{A}\right)+\right.\\
&\left.+\left(\frac{4}{3}A^2+\frac{11}{3}A_0^2\right)A\sqrt{1-\frac{A_0^2}{A^2}}\,\right];\\
q &= \frac{k}{\pi}\left[\left(3A_0^2+\frac{3}{4}A^2\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{A_0}{A}\right)+\right.\\
&\left.+\left(\frac{13}{4}A_0 A+\frac{A_0^3}{2A}\right)\sqrt{1-\frac{A_0^2}{A^2}}\,\right].
\end{aligned}
\right\}
\qquad (15.24)
$$

Гармоническая линеаризация симметричных нелинейностей при несимметричных колебаниях

Рассмотренные выше типы нелинейностей могут встречаться при динамическом расчете виброизолированных систем в «чистом» виде и, кроме того, могут быть получены в результате аппроксимации аналитическими зависимостями динамических характеристик виброизоляторов, полученных экспериментальным путем. При этом может оказаться, что нелинейная функция $F(x,\ px)$ представляется в виде суммы двух или нескольких нелинейных функций. Если хотя бы одна из этих функций является несимметричной, то результирующие колебания будут содержать постоянную и гармоническую составляющие. Определение коэффициентов гармонической линеаризации симметричных нелинейных функций в этом случае следует производить по приведенным далее формулам.

а) Кусочно-линейная характеристика с переменным коэффициентом жесткости (см. рис. 15.1):

$$
\left.
\begin{aligned}
F_0 = k_2 A_0 + \frac{k_2 - k_1}{\pi} \Bigg[A \Bigg(\sqrt{1 - \frac{(b - A_0)^2}{A^2}} - {} \\
- \sqrt{1 - \frac{(b + A_0)^2}{A^2}} \Bigg) + (b - A_0) \arcsin \frac{b - A_0}{A} - {} \\
- (b + A_0) \arcsin \frac{b + A_0}{A} \Bigg], \quad (\text{при } A \geqslant b + |A_0|); \\
q = k_2 - \frac{k_2 - k_1}{\pi A} \Bigg[(b - A_0) \sqrt{1 - \frac{(b - A_0)^2}{A^2}} + {} \\
+ (b + A_0) \sqrt{1 - \frac{(b + A_0)^2}{A}} + {} \\
+ A \left(\arcsin \frac{b - A_0}{A} + \arcsin \frac{b + A_0}{A} \right) \Bigg], \\
r = 0 \quad (\text{при } A \geqslant b + |A_0|),
\end{aligned}
\right\} \tag{15.25}
$$

б) Кусочно-линейная характеристика с зоной нечувствительности (см. рис. 15.2):

$$
\left.
\begin{aligned}
F_0 = \frac{kA}{\pi} \left(\sqrt{1 - \frac{(b - A_0)^2}{A^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b + A_0)^2}{A^2}} \right) + kA_0 + {} \\
+ \frac{k}{\pi} \Bigg[b \left(\arcsin \frac{b - A_0}{A} - \arcsin \frac{b + A_0}{A} \right) - {} \\
- A_0 \left(\arcsin \frac{b - A_0}{A} + \arcsin \frac{b + A_0}{A} \right) \Bigg] \\
(\text{при } A \geqslant b + |A_0|); \\
q = k - \frac{k}{\pi} \Bigg(\arcsin \frac{b - A_0}{A} + \arcsin \frac{b + A_0}{A} + {} \\
+ \frac{b - A_0}{A} \sqrt{1 - \frac{(b - A_0)^2}{A^2}} + \frac{b + A_0}{A} \sqrt{1 - \frac{(b + A_0)^2}{A^2}} \Bigg), \\
r = 0 \quad (\text{при } A \geqslant b + |A_0|).
\end{aligned}
\right\} \tag{15.26}
$$

в) Характеристика с гистерезисной петлей (см. рис. 15.4):

$$
\left.
\begin{aligned}
F_0 = kA_0; \\
q = \frac{k}{\pi} \Bigg[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{A} \right) + {} \\
+ 2 \left(1 - \frac{2b}{A} \right) \sqrt{\frac{b}{A} \left(1 - \frac{b}{A} \right)} \Bigg], \\
r = - \frac{4kb}{\pi A} \left(1 - \frac{b}{A} \right) \quad (\text{при } A \geqslant b).
\end{aligned}
\right\} \tag{15.27}
$$

г) Степенная симметричная характеристика $F(x)=kx^2 \operatorname{sign} x$:

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= \frac{2k}{\pi}\left[\left(A_0^2+\frac{A^2}{2}\right)\arcsin\frac{A_0}{A}+\frac{3}{2}A_0A\sqrt{1-\frac{A_0^2}{A^2}}\right]; \\ q &= \frac{4k}{\pi}\left[A_0\arcsin\frac{A_0}{A}+\left(\frac{2A}{3}+\frac{A_0^2}{3A}\right)\sqrt{1-\frac{A_0^2}{A^2}}\right], \\ r &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (15.28)$$

д) Степенная симметричная характеристика $F(x)=kx^3$:

$$F_0=k\left(A_0^2+\frac{3}{2}A_0A^2\right);\quad q=3k\left(A_0^2+\frac{A^2}{4}\right),\quad r=0. \quad (15.29)$$

15.3. Основной резонанс нелинейной системы с одной степенью свободы при моногармоническом возбуждении

Применение метода гармонической линеаризации к задаче о вынужденных колебаниях нелинейной виброизолированной системы проиллюстрируем на простейшем примере. Предположим, что дифференциальное уравнение колебаний виброизолированной системы при гармонических колебаниях основания, на которое опирается эта система, имеет вид:

$$\ddot{y}+\varkappa\dot{y}+F(y)=Sb(t) \quad (15.30)$$

где $F(y)=\omega_0^2y+\gamma y^3$; $Sb(t)=\xi_0\Omega^2\sin\Omega t$; $\varkappa$ — коэффициент вязкого сопротивления; ω_0 — круговая частота собственных линейных колебаний; γ — коэффициент нелинейной упругости; ξ_0 — амплитуда колебаний точки закрепления виброизолированной системы на опорной поверхности; Ω — частота возбуждения; $y=x-\xi_0\sin\Omega t$ — относительное перемещение виброизолированного объекта.

В соответствии с формулой (15.15) коэффициент гармонической линеаризации q принимает вид:

$$q=\frac{3\gamma A^2}{4}+\omega_0^2. \quad (15.31)$$

Заменяя нелинейную функцию $F(y)$ в уравнении (15.30) линейным выражением qy и решая линеаризованное уравнение, получим решение в форме

$$y=A\sin(\Omega t-\varphi). \quad (15.32)$$

Внося (15.32) в линеаризованное уравнение и приравнивая коэффициенты при $\sin(\Omega t-\varphi)$ и $\cos(\Omega t-\varphi)$, находим:

$$\left.\begin{aligned} -A\Omega^2+\left(\omega_0^2+\frac{3\gamma A^2}{4}\right)A &= \xi_0\Omega^2\cos\varphi; \\ \varkappa A\Omega^2 &= \xi_0\Omega^2\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (15.33)$$

Исключая фазовый угол φ из уравнений (15.32), приходим к зависимости

$$\Omega=\sqrt{-\frac{A_1}{2}\pm\sqrt{\frac{A_1^2}{2}-B_1}}, \quad (15.34)$$

где

$$A_1 = -\frac{3\gamma A^4 + 2\left(\omega_0^2 - \varkappa^2\right) A^2}{2\left(A^2 - \xi_0^2\right)};$$

$$B_1 = \frac{A^2\left(4\omega_0^2 + 3\gamma A^2\right)}{16\left(A^2 - \xi_0^2\right)}.$$

Соотношение (15.34) позволяет построить амплитудно-частотную зависимость. Фазовый угол φ подсчитывается по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\varkappa\Omega}{-\Omega^2 + \omega_0^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2}. \qquad (15.35)$$

На рис. 15.8 и 15.9 приведены резонансные кривые и угол сдвига фаз, построенные для некоторых численных значений параметров, рассматриваемой системы при различном затухании, характеризуемом величиной коэффициента $\varepsilon = \varkappa/\omega_0$. Пунктирная кривая на рис. 15.8 соответствует собственным колебаниям консервативной системы (при $\varepsilon = 0$) и носит название «скелетной» кривой. Вычисление значений амплитуды и фазы относительного перемещения виброизолированного объекта может представить практический интерес при подсчете необходимого пространства для размещения виброизолированной системы.

Графики на рис. 15.8 по своей конфигурации напоминают соответствующие амплитудно-частотные кривые линейной системы. Для случая нелинейной системы с жесткой характеристикой ($\gamma > 0$) они получаются искривлением вправо соответствующих кривых линейной системы. В случае мягкой нелинейности ($\gamma < 0$) амплитудно-частотные кривые смещаются влево.

В некоторой области частот возбуждения одному и тому же значению возмущающей частоты Ω соответствуют три различных значения амплитуды колебаний. Некоторые из этих кривых являются неустойчивыми. Границы областей неустойчивости [14] амплитудно-частотных кривых определяются уравнениями:

$$\Omega^2 = \frac{9}{4}\gamma A^2 + \omega_0^2; \qquad (15.36)$$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2. \qquad (15.37)$$

Зависимость (15.36) представляет собой геометрическое место точек, в которых кривые, изображенные на рис. 15.8, имеют вертикальные касательные. Уравнение (15.37) представляет собой кривую собственных незатухающих колебаний (скелетную кривую).

Для линейной виброизолированной системы эффективная виброзащита будет всегда, когда

$$\Omega/\omega_0 > \sqrt{2}. \qquad (15.38)$$

Как показывают графики на рис. 15.8, нелинейная система с жесткой нелинейностью и малым затуханием при выполнении условия (15.38) может не обеспечивать виброзащиту изолируемого объекта. Для системы с мягкой нелинейностью выполнение условия (15.38) является достаточной гарантией того, что виброизоляция будет эффективной.

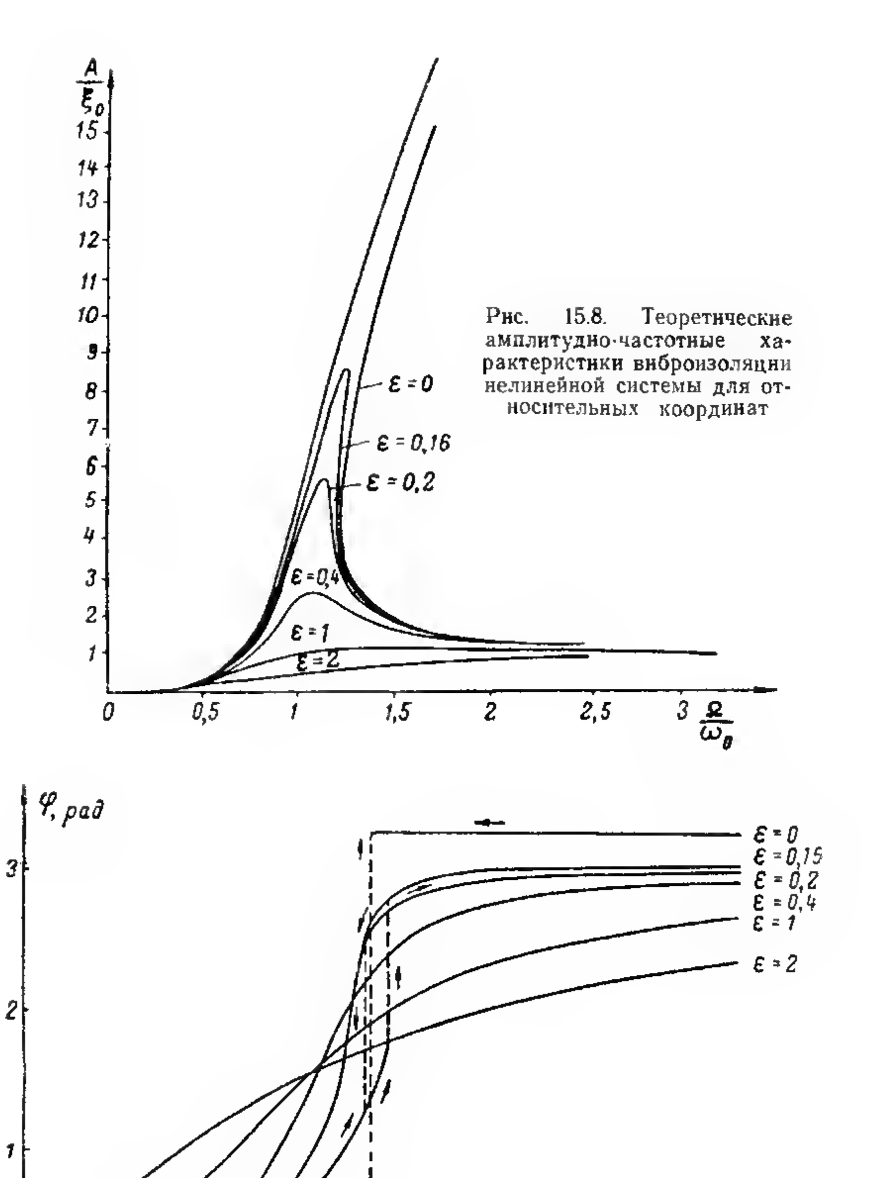


Рис. 15.8. Теоретические амплитудно-частотные характеристики виброизоляции нелинейной системы для относительных координат

Рис. 15.9. Теоретические фазовые характеристики виброизоляции нелинейной системы для относительных координат

15.4. Субгармонические колебания виброизолированной системы

В нелинейной виброизолированной системе при определениых условиях могут возникать субгармонические колебания в дополнение к гармоническому движению, предсказываемому линейной трактовкой задачи. Экспериментальные исследования [5, 6] показывают, что в нелинейной виброизолированной системе кроме общеизвестиых малых колебаний с периодом возмущающей силы могут установиться колебания со значительно большей амплитудой и периодом, кратным периоду внешней силы. Субгармонические колебания возникают в области высоких частот возмущения (выше частоты собственных колебаний виброизолированной системы).

В нелинейной системе могут также поддерживаться ультрагармонические колебания со значительным развитием одной из гармонических компонент перемещения. Ультрагармонические резонансы возникают при низких частотах возмущения и для виброизолированных систем большого практического значения не имеют.

Рассмотрим субгармонические колебания виброизолированной системы при гармоническом возмущении. Положим, что движение виброизолированного объекта описывается уравнением (15.30) при

$$F(y) = \omega_0^2 y + \beta y^2 + \gamma y^3. \tag{15.39}$$

В связи с тем, что в (15.39) есть член βy^2, результирующие колебания становятся несимметричными. Решение рассматриваемого уравнения будет содержать постоянную составляющую, а также гармоническую и субгармоническую компоненты. При субгармонических колебаниях период результирующего движения будет в целое число раз больше периода возмущения. Для рассматриваемого вида нелинейной функции, содержащей члены второй и третьей степени относительного перемещения y, возможны субгармонические колебания порядка $1/2$ и $1/3$ [21].

Решение уравнения (15.30) с учетом выражения для нелинейной функции (15.39) принимаем в форме:

$$y = C + A_{1/n} \sin\left(\frac{\Omega}{n} t + \varphi\right) + A_1 \sin(\Omega t + \psi), \tag{15.40}$$

где n — целое число; C, $A_{1/n}$, A_1, φ, ψ — величины, подлежащие определению.

Используя метод Ритца, возьмем первую вариацию от выражения (15.40):

$$\delta y = \delta c + \delta A_{1/n} \sin\left(\frac{\Omega t}{n} + \varphi\right) + \delta A_1 \sin(\Omega t + \psi) +$$
$$+ A_{1/n} \cos\left(\frac{\Omega t}{n} + \varphi\right)\delta\varphi + A_1 \cos(\Omega t + \psi)\,\delta\psi. \tag{15.41}$$

На основе экстремального вариационного принципа запишем:

$$\int_0^T L(\ddot{y}, \dot{y}, y, t)\,\delta y\,dt = 0, \tag{15.42}$$

где $T = \dfrac{2\pi n}{\Omega}$; L — символ, означающий результат подстановки выражения (15.40) в основное уравнение задачи.

Внося выражение (15.41) под интеграл (15.42) и учитывая произвольность вариаций, стоящих в правой части (15.41), приходим к уравнениям:

$$\int_0^T L dt = 0; \quad \int_0^T L \sin\left(\frac{\Omega t}{n} + \varphi\right) dt = 0;$$

$$\int_0^T L \cos\left(\frac{\Omega t}{n} + \varphi\right) dt = 0; \quad \int_0^T L \sin(\Omega t + \psi)\, dt = 0;$$

$$\int_0^T L \cos(\Omega t + \psi)\, dt = 0. \tag{15.43}$$

Заметим, что уравнения (15.43) с точностью до постоянных множителей представляют собой коэффициенты Фурье в разложении результата подстановки приближенного решения (15.40) в дифференциальное уравнение (15.30). Принимая во внимание это обстоятельство, подставим выражение (15.40) в дифференциальное уравнение (15.30) и учтем вид нелинейной функции (15.39). Группируя после подстановки члены с частотами 0, Ω, Ω/n и приравнивая нулю коэффициенты при синусах и косинусах одинаковых аргументов, приходим к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}
&C\left[\omega_0^2 + \gamma\left(C^2 + \frac{3}{2}A_{1/n}^2 + \frac{3}{2}A_1^2\right) + \beta C\right] + \frac{\beta A_{1/n}^2}{2} + \frac{\beta A_1^2}{2} = 0;\\
&A_{1/n}\left[\omega_0^2 - \frac{\Omega^2}{n^2} + \gamma\left(3C^2 + \frac{3}{4}A_{1/n}^2 + \frac{3}{2}A_1^2\right) + 2\beta C\right] = 0;\\
&A_1\left[\omega_0^2 - \Omega^2 + \gamma\left(3C^2 + \frac{3}{2}A_{1/n}^2 + \frac{3}{4}A_1^2\right) + 2\beta C\right] - \xi_0\Omega^2\cos\psi = 0\\
&\frac{\varkappa\Omega}{n}A_{1/n} = 0; \quad \varkappa A_1\Omega + \xi_0\Omega^2\sin\psi = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{15.44}$$

Система уравнений (15.44) соответствует основному гармоническому решению в том случае, когда среди комбинационных частот отсутствуют такие, которые совпадали бы с базисными. При наличии трения, т. е. при $\varkappa \neq 0$ из уравнений (15.44) имеем $A_{1/n} = 0$.

Если положить $n = 3$, то в разложении результата подстановки (15.40) в (15.30) будем иметь комбинационные частоты, совпадающие с основными частотами выражения (15.40). При этом приходим к разрешающей системе уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned}
&C\left[\omega_0^2 + \gamma\left(C^2 + \frac{3}{2}A_{1/3}^2 + \frac{3}{2}A_1^2\right) + \beta C\right] + \frac{\beta A_{1/3}^2}{2} + \frac{\beta A_1^2}{2} = 0;\\
&A_{1/3}\left[\omega_0^2 - \frac{\Omega^2}{9} + \gamma\left(3C^2 + \frac{3}{4}A_{1/3}^2 + \frac{3}{2}A_1^2\right) + 2\beta C - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{3}{4}\gamma A_{1/3}A_1\cos(3\varphi - \psi)\right] = 0;\\
&A_1\left[\omega_0^2 - \Omega^2 + \gamma\left(3C^2 + \frac{3}{2}A_{1/3}^2 + \frac{3}{4}A_1^2\right) + 2\beta C\right] -\\
&\qquad - \frac{1}{4}\gamma A_{1/3}^3\cos(3\varphi - \psi) = \xi_0\Omega^2\cos\psi;\\
&A_{1/3}\left[\frac{\varkappa\Omega}{3} + \frac{3}{4}\gamma A_{1/3}A_1\sin(3\varphi - \psi)\right] = 0;\\
&\varkappa A_1\Omega - \frac{1}{4}\gamma A_{1/3}^3\sin(3\varphi - \psi) = -\xi_0\Omega^2\sin\psi.
\end{aligned}\right\} \tag{15.45}$$

Система пяти уравнений (15.45) определяет пять неизвестных величин C, A_1, $A_{1/3}$, φ и ψ. Так как ее решение достаточно громоздко, ограничимся случаем отсутствия диссипативных сил.

Для консервативной системы можно положить $\psi=3\varphi-\psi=0$. Будем считать, что величины A_1 и $A_{1/3}$ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Неизвестные C, A_1 и $A_{1/3}$ определятся из уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&C\left[\omega_0^2+\gamma\left(C^2+\frac{3}{2}A_{1/3}^2+\frac{3}{2}A_1^2+\beta C\right]+\frac{\beta A_{1/3}^2}{2}+\frac{\beta A_1^2}{2}=0;\\
&\bar{\omega}_0^2-\frac{\Omega^2}{9}+\gamma\left(3C^2+\frac{3}{4}A_{1/3}^2+\frac{3}{2}A_1^2\right)+2\beta C-\frac{3}{4}\gamma A_{1/3}A_1=0;\\
&A_1\left[\omega_0^2-\Omega^2+\gamma\left(3C^2+\frac{3}{2}A_{1/3}^2+\frac{3}{4}A_1^2\right)+2\beta C\right]-\\
&\qquad-\frac{1}{4}\gamma A_{1/3}^3=\xi_0\Omega^2.
\end{aligned}\right\}\qquad(15.46)$$

Субгармоническое решение порядка $1/3$ имеет общую точку с гармоническим решением. Так, если положить в системе уравнений (15.47) $A_{1/3}=0$, то приходим к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}
&C\left[\omega_0^2+\gamma\left(C^2+\frac{3}{2}A_1^2\right)+\beta C\right]+\frac{\beta A_1^2}{2}=0;\\
&A_1\left[\omega_0^2-\Omega^2+\gamma\left(3C^2+\frac{3}{4}A_1^2\right)+2\beta C\right]=\xi_0\Omega^2;\\
&\omega_0^2-\frac{\Omega^2}{9}+\gamma\left(3C^2+\frac{3}{2}A_1^2\right)+2\beta C=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(15.47)$$

Первые два уравнения определяют амплитудно-частотные зависимости, отвечающие стабилизации системы в режиме основного гармонического резонанса. Все три уравнения позволяют найти точку бифуркации, в которой субгармоническое и гармоническое решения совпадают.

Для установления зависимостей $C(\Omega)$, $A_1(\Omega)$ и $A_{1/3}(\Omega)$ при субгармоническом резонансе можно воспользоваться способом последовательных приближений. Процесс последовательных приближений удобно начинать со значений C, A_1 и $A_{1/3}$, отвечающих случаю $\beta=\gamma=0$. При этом для нулевого приближения будем иметь:

$$C_0=0;\ \Omega_0=3\ \omega_0;\ A_{10}=-\frac{9}{8}\xi_0,\qquad(15.48)$$

после чего находим:

$$\left.\begin{aligned}
&C_1=-\frac{\beta\left(A_{1/3}^2+A_{10}^2\right)}{2\left[\omega_0^2+\gamma\left(\frac{3}{2}A_{1/3}^2+\frac{3}{2}A_{10}^2\right)\right]};\\
&\Omega_1=3\sqrt{\omega_0^2+\gamma\left(3C_1^2+\frac{3}{4}A_{1/3}^2+\frac{3}{2}A_{10}^2\right)+2\beta C_1-\frac{3}{4}\gamma A_{1/3}A_{10}};\\
&A_{11}=\frac{\xi_0\Omega_1^2+\frac{1}{4}\gamma A_{1/3}^3}{\omega_0^2-\Omega_1^2+\gamma\left(3C_1^2+\frac{3}{2}A_{1/3}^2+\frac{3}{4}A_{10}^2\right)+2\beta C_1^2}.
\end{aligned}\right\}\qquad(15.49)$$

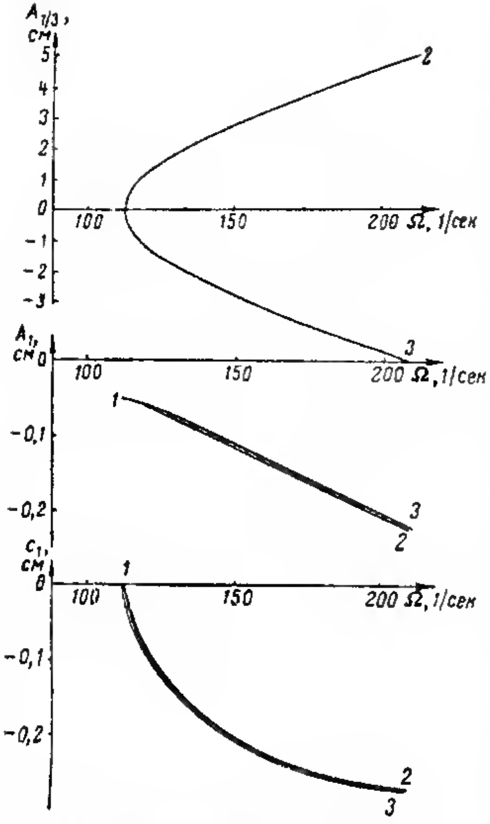


Рис. 15.10. Амплитудные кривые субгармонических колебаний порядка $^1/_3$

Подставляя найденные величины C_1, Ω_1, A_{11} в уравнения (15.47), можно подсчитать значения искомых величин в следующем приближении и т. д. до получения практически совпадающих результатов в двух последовательных приближениях.

На рис. 15.10 приведены графики зависимости величин C, A_1 и $A_{1/3}$ от круговой частоты возмущения Ω. При построении графиков были приняты следующие значения параметров: $\omega_2^0 = 1450$ $1/сек^2$; $\xi_0 = 0{,}047$ *см*, $\gamma = 190$ $1/см^2 \cdot сек^2$, $\beta = 190$ $1/см \cdot сек^2$. Цифрами на рис. 15.10 обозначены соответствующие ветви кривых. При частоте возмущения $\Omega \approx 3\omega_0$ возникают субгармонические колебания порядка $^1/_3$. С ростом частоты возмущения амплитуда субгармоники $A_{1/3}$ резко возрастает. Величины $C(\Omega)$ и $A_1(\Omega)$ при этом остаются значительно меньшими, чем величина субгармоники $A_{1/3}$.

Для рассматриваемого вида нелинейной функции $F(y)$ возможны также субгармонические колебания порядка $^1/_2$. Полагая в выражении (15.40) $n=2$ и поступая аналогично тому, как это было сделано ранее, находим: $\psi=0$, $\varphi=\pm\pi/4$.

Расчетные уравнения в этом случае принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&C\left[\omega_0^2+\gamma\left(C^2+\frac{3}{2}A_{1/2}^2+\frac{3}{2}A_1^2\right)+\beta C\right]+\frac{\beta A_{1/2}^2}{2}+\frac{\beta A_1^2}{2}\pm\\
&\qquad\pm\frac{3}{4}\gamma A_{1/2}^2A_{10}=0;\\
&\omega_0^2-\frac{\Omega^2}{4}+\gamma\left(3C^2+\frac{3}{4}A_{1/2}^2+\frac{3}{2}A_1^2\right)+2\beta C\pm(3\gamma CA_1+\beta A_1)=0;\\
&A_1\left[\omega_0^2-\Omega^2+\gamma\left(3C^2+\frac{3}{2}A_{1/2}^2+\frac{3}{4}A_1^2\right)+2\beta C\right]\pm\\
&\qquad\pm\left(\frac{3}{2}\gamma CA_{1/2}^2+\frac{\beta A_{1/2}^2}{2}\right)-\xi_0\Omega^2=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(15.50)$$

Для построения резонансных кривых будем иметь:

$$C_0 = 0; \quad \Omega_0 = 2\omega_0; \quad A_{10} = -\frac{4}{3}\xi_0;$$

$$\left.\begin{aligned}
C_1 &= \frac{-\frac{\beta}{2}\left(A_{1/2}^2 + A_{10}^2\right) \mp \frac{3}{4}\gamma A_{1/2}^2 A_{10}}{\omega_0^2 + \frac{3}{2}\gamma\left(A_{1/2}^2 + A_{10}^2\right)};\\
\Omega_1 &= 2\sqrt{\omega_0^2 + \gamma\left(3C_1^2 + \frac{3}{4}A_{1/2}^2 + \frac{3}{2}A_{10}^2\right) + 2\beta C_1 \pm (3\gamma C_1 + \beta)A_{10}};\\
A_{11} &= \frac{\xi_0\Omega_1^2 \pm \left(\frac{3}{2}\gamma C_1 + \frac{\beta}{2}\right)A_{1/2}^2}{\omega_0^2 - \Omega_1^2 + \gamma\left(3C_1^2 + \frac{3}{2}A_{1/2}^2 + \frac{3}{4}A_{10}^2\right) + 2\beta C_1}.
\end{aligned}\right\} \quad (15.51)$$

Последующие приближения находятся с помощью соотношений (15.51) из системы уравнений (15.50).

15.5. Расчет нелинейной виброизолированной системы на случайное воздействие

Во многих случаях действующее возмущение нельзя считать заданной функцией времени; его следует рассматривать как случайный процесс, характеристики которого могут быть найдены экспериментальным путем. При случайном характере внешнего воздействия расчет виброизоляции может быть произведен на основе статистических закономерностей [3, 9].

Рассмотрим случай пассивно виброизолированной системы, колебания которой описываются уравнением (15.30) с правой частью

$$Sb(t) = -\ddot{\xi}. \quad (15.52)$$

Положим, что ускорение колеблющегося основания $\ddot{\xi}(t)$ является случайной стационарной функцией времени с нормальным законом распределения и нулевым средним значением. Пользуясь уравнением (15.30) и принимая во внимание равенство (15.52), определим вероятностные характеристики реакции системы при заданных характеристиках воздействия.

Нелинейную функцию $F(y)$ уравнения (15.30) при $\gamma y^3 \ll \omega_0^2 y$ заменим линейным выражением qy, где q — эквивалентный коэффициент линеаризации.

В соответствии со способом статистической линеаризации [10, 16] определим величину q из условия минимума математического ожидания квадрата разности между истинной нелинейной функцией и ее заменяющей. В результате получим:

$$q = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(y)\, y w(y)\, dy}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 w(y)\, dy}, \quad (15.53)$$

где $w(y)$ — плотность вероятности случайного процесса $y(t)$.

Так как математическое ожидание воздействия $\ddot{\xi}(t)$ принято нулевым, а нелинейная функция $F(y)$, определяемая выражением (15.30), симметрична, то математическое ожидание $y(t)$ можно положить равным нулю.

В этом случае

$$w(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}, \qquad (15.54)$$

где σ_y — стандарт случайного процесса $y(t)$.

Подстановка выражений $F(y)$ и $w(y)$ в соотношение (15.53) дает:

$$q=\omega_0^2+3\gamma\sigma_y^2. \qquad (15.55)$$

Теперь вместо уравнения (15.30) запишем линеаризованное уравнение

$$\ddot{y}+\varkappa\dot{y}+\left(\omega_0^2+3\gamma\sigma_y^2\right)y=-\ddot{\xi}_0. \qquad (15.56)$$

Используя известное соотношение [13] между спектральной плотностью входного воздействия $S_{\ddot{\xi}}(\omega)$ и спектральной плотностью реакции системы $S_y(\omega)$, запишем:

$$S_y(\omega)=|\Phi(j\omega)|^2\,S_{\ddot{\xi}}(\omega), \qquad (15.57)$$

где $|\Phi(j\omega)|^2$ — квадрат модуля передаточной функции:

$$|\Phi(j\omega)|^2=\frac{1}{\left(-\omega^2+\omega_0^2+3\gamma\sigma_y^2\right)^2+\varkappa^2\omega^2}; \qquad (15.58)$$

j — мнимая единица.

Зная спектральную плотность $S_y(\omega)$, можно определить корреляционную функцию

$$K_y(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_y(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega, \qquad (15.59)$$

где

$$K_y(\tau)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}y(t)\,y(t+\tau)\,dt;$$

T — продолжительность реализации.

Среднее значение квадрата функции $y(t)$ в соответствии с выражением (15.59) будет:

$$\sigma_y^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_y(\omega)\,d\omega. \qquad (15.60)$$

Подставляя (15.58) в (15.60) и пользуясь таблицами дробно-рациональных функций [13], можно найти выражения для σ_y^2. Полагая, например,

$$S_{\ddot{\xi}}=k_0=\mathrm{const}, \qquad (15.61)$$

находим

$$\sigma_y^2=\frac{k_0}{2\left(\omega_0^2+3\gamma\sigma_y^2\right)\varkappa}. \qquad (15.62)$$

Для линейной системы ($\gamma=0$) имеем:

$$\sigma_{y_*}^2=\frac{k_0}{2\omega_0^2 \varkappa} . \qquad (15.63)$$

Сравнивая (15.62) и (15.63) видим, что среднее значение квадрата функции $y(t)$ в случае жесткой нелинейности ($\gamma>0$) меньше, а в случае мягкой нелинейности ($\gamma<0$) больше значения σ_{y_*} для линейной системы.

Корреляционная функция внешнего воздействия для некоторых случайных процессов может быть представлена в виде:

$$K_{\ddot{\xi}}(\tau)=e^{-\beta|\tau|} , \qquad (15.64)$$

где β — константа. Соответствующая спектральная плотность дается выражением

$$S_{\ddot{\xi}}(\omega)=\frac{2\beta}{\omega^2+\beta^2} . \qquad (15.65)$$

Средним значением квадрата относительного смещения объекта будет:

$$\sigma_y^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\beta d\omega}{(\omega^2+\beta^2)\left[(-\omega^2+\omega_0^2+3\gamma\sigma_y^2)^2+\varkappa^2\omega^2\right]} . \qquad (15.66)$$

Интегрируя (15.66), находим [13]:

$$\sigma_y^2=\frac{\varkappa+\beta}{\varkappa\left(\omega_0^2+3\gamma\sigma_y^2\right)\left(\omega_0^2+3\gamma\sigma_y^2+\beta\varkappa+\beta^2\right)} . \qquad (15.67)$$

Приведя (15.67) к кубическому уравнению относительно σ_y^2, будем иметь:

$$(\sigma_y^2)^3+\sigma_y^2\frac{1}{3\gamma}\left(2\omega_0^2+\beta\varkappa+\beta^2\right)+\frac{\sigma_y^2\omega_0^2}{9\gamma^2}\left(\omega_0^2+\beta\varkappa+\beta^2\right)-\frac{\varkappa+\beta}{9\gamma^2\varkappa}=0. \qquad (15.68)$$

Отсюда может быть найдена величина σ_y^2.

Если известна спектральная плотность величины $\xi(t)$, то для нахождения дисперсии реакции системы можно воспользоваться равенством

$$S_{\ddot{\xi}}(\omega)=\omega^4 S_{\xi}(\omega). \qquad (15.69)$$

Найдем теперь среднее значение квадрата ускорения, передаваемого виброизолированному объекту. Переходя к абсолютному смещению и учитывая (15.55), получим:

$$\ddot{x}+\varkappa\dot{x}+\left(\omega_0^2+3\gamma\sigma_y^2\right)x=\varkappa\dot{\xi}+\left(\omega_0^2+3\gamma\sigma_y^2\right)\xi. \qquad (15.70)$$

Зависимость между спектральными плотностями на входе и выходе системы в соответствии с (15.70) принимает вид:

$$S_{\ddot{x}}=S_{\ddot{\xi}}\left|\frac{\omega_0^2+3\gamma\sigma_y^2+j\varkappa\omega}{-\omega^2+\omega_0^2+3\gamma\sigma_y^2+j\varkappa\omega}\right|^2 . \qquad (15.71)$$

Принимая спектральную плотность воздействия в виде (15.61), получим для среднего квадрата ускорений, передаваемых объекту, следующую зависимость:

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[\left(\omega_0^2 + 3\gamma\sigma_y^2\right) + \varkappa^2\omega^2\right] d\omega}{\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + 3\gamma\sigma_y^2\right)^2 + \varkappa^2\omega^2}. \qquad (15.72)$$

Пользуясь таблицами интегралов [13], находим для рассматриваемого случая

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \frac{k_0\left(\varkappa^2 + \omega_0^2 + 3\gamma\sigma_y^2\right)}{2\varkappa}. \qquad (15.73)$$

Для соответствующей линейной системы ($\gamma=0$) имеем:

$$\sigma^2_{\ddot{x}_0} = \frac{k_0\left(\varkappa^2 + \omega_0^2\right)}{2\varkappa}. \qquad (15.74)$$

Равенства (15.73) и (15.74) показывают, что среднеквадратичное значение ускорений, передаваемых виброизолированному объекту при жесткой нелинейности ($\gamma>0$), больше, а при мягкой нелинейности ($\gamma<0$) меньше величины $\sigma_{\ddot{x}_0}$ для виброизолированной системы с линейными упругими характеристиками.

Для спектральной плотности воздействия (15.65) находим:

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \frac{\beta\varkappa^2 + (\varkappa + \beta)\left(\omega_0^2 + 3\gamma\sigma_y^2\right)}{\varkappa\beta^2 + \varkappa\left(\omega_0^2 + 3\gamma\sigma_y^2 + \varkappa\beta\right)}. \qquad (15.75)$$

Применительно к линейной системе равенство (15.75) дает:

$$\sigma^2_{\ddot{x}_0} = \frac{\beta\varkappa^2 + (\varkappa + \beta)\,\omega_0^2}{\varkappa\beta^2 + \varkappa\left(\omega_0^2 + \varkappa\beta\right)}. \qquad (15.76)$$

Полагая в соответствии с методом статистической линеаризации дифференциальный закон распределения случайного процесса $y(t)$ нормальным, можно найти вероятность превышения этой величиной некоторого уровня. Так, вероятность превышения по модулю относительным смещением объекта заданной величины a_1, будет определяться зависимостью

$$P(|y| > a_1) = 1 - \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \int_{-a_1}^{a_1} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}\, dy. \qquad (15.77)$$

Производя замену переменной.

$$\frac{y}{\sigma_y\sqrt{2}} = t, \qquad (15.78)$$

получим:

$$P(|y| > a_1) = 1 - \Phi(b), \qquad (15.79)$$

где

$b = \dfrac{a_1}{\sigma_y\sqrt{2}}$, $\Phi(b) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^b e^{-t^2} dt$ — интеграл Лапласа;

Полагая, например, $a_1 = 2\sqrt{2}\,\sigma_y$, находим: $P(|y| > a_1) = 0{,}0047$.

Рассмотрим упругую характеристику виброизоляции, описываемую кусочно-линейной зависимостью и соответствующую случаю, когда при увеличении перемещений вступают в действие упругие ограничители хода. Упругая характеристика системы (см. рис. 15.1)

$$F(y)=\begin{cases} k_1 y & \text{при } |y|<b; \\ k_2(y-b)+k_1 b & \text{при } y>b; \\ k_2(y+b)-k_1 b & \text{при } y<-b. \end{cases} \qquad (15.80)$$

Подстановка (13.80) в (16.53) дает:

$$q=k_2-2(k_2-k_1)\overline{\Phi}\left(\frac{b}{\sigma_y}\right), \qquad (15.81)$$

где

$$\overline{\Phi}(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}}dt; \quad u=\frac{b}{\sigma_y}.$$

Линеаризованное уравнение движения системы принимает вид:

$$\ddot{y}+\varkappa\dot{y}+\left[\omega_2^2-2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)\overline{\Phi}\left(\frac{b}{\sigma_y}\right)\right]=-\ddot{\xi}, \qquad (15.82)$$

где

$$\omega_2^2=\frac{k_2}{m}; \quad \omega_1^2=\frac{k_1}{m}.$$

Для спектральных плотностей, выражаемых зависимостями (15.65) и (15.61), находим соответственно:

$$\sigma_y^2=\frac{\varkappa+\beta}{\left[\omega_2^2-2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)\overline{\Phi}\left(\frac{b}{\sigma_y}\right)\right]\left\{(\varkappa+\beta)\left[\omega_2^2-2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)\overline{\Phi}\left(\frac{b}{\sigma_y}\right)\right]-\right.} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\varkappa+\beta}{\left.-\beta\left[\omega_2^2-2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)\right]\overline{\Phi}\left(\frac{b}{\sigma_y}\right)\right\}}; \qquad (15.83)$$

$$\sigma_y^2=\frac{k_0}{2\left[\omega_2^2-2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)\overline{\Phi}\left(\frac{b}{\sigma_y}\right)\right]\varkappa}. \qquad (15.84)$$

Величина σ_y, устанавливаемая уравнениями (15.83) и (15.84), может быть найдена графически.

Можно показать, что виброизолированная система с одной степенью свободы имеет среднюю частоту, близкую к частоте собственных колебаний.

В соответствии с работой [3] эффективная частота колебаний нелинейной системы при случайных воздействиях определяется формулой

$$\nu_e=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma_{\dot{y}}^2}{\sigma_y^2}}. \qquad (15.85)$$

Принимая спектральную плотность воздействия в виде (15.61), определяем для случая нелинейной функции $F(y)$, выражаемой в форме (15.30):

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 k_0}{\left(-\omega^2+\omega_0^2+3\gamma\sigma_y^2\right)^2+\varkappa^2\omega^2} = \frac{k_0}{2\varkappa}. \tag{15.86}$$

Из выражений (15.62), (15.85) и (15.86) находим

$$\nu_e = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_0^2+3\gamma\sigma_y^2}. \tag{15.87}$$

Формула (15.87) показывает, что при малых значениях коэффициента γ эффективная частота колебаний системы близка к частоте собственных линейных колебаний.

15.6. Коэффициенты статистической линеаризации

Метод статистической линеаризации [7] является одним из наиболее распространенных способов приближенного исследования нелинейных виброизолированных систем. Этот метод сводится к замене нелинейной функции $F(y)$ уравнения (15.30) линейным выражением

$$F(y) \approx \overline{F} + qy_c, \tag{15.88}$$

где y_c — центрированная случайная функция; $\overline{F}$ — математическое ожидание функции $F(y)$.

Коэффициенты $\overline{F}$ и q определяются из условия минимума дисперсии разности между истинной нелинейной функции $F(y)$ и заменяющей ее функцией $\overline{F}+qy_c$. Переменную y под знаком нелинейной функции $F(y)$ можно представить в виде $y=\overline{y}+y_c$, где $\overline{y}$ — среднее значение функции. В случае когда регулярная составляющая случайного возмущения равна нулю, а нелинейная характеристика системы симметрична, величина $\overline{y}$ обращается в нуль.

Коэффициенты линеаризации определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{1}{\sigma_y^2}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)(y-\overline{y})\,w(y)\,dy; \\ \overline{F} &= \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\,w(y)\,dy, \end{aligned}\right\} \tag{15.89}$$

где σ_y^2 — дисперсия величины y;

$$w(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-\overline{y})^2}{2\sigma_y^2}\right]. \tag{15.90}$$

Ниже приводятся формулы коэффициентов q и $\overline{F}$ для некоторых типов нелинейностей.

а) Кубическая характеристика $F(y)=ky^3$:

$$\left.\begin{aligned} q &= 3k\sigma_y^2\left[1+\left(\frac{\overline{y}}{\sigma_y}\right)^2\right]; \\ \overline{F} &= k\overline{y}\left[3\sigma_y^2+(\overline{y})^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{15.91}$$

б) Нечетная квадратическая характеристика $F(y)=ky^2 \operatorname{sign} y$:

$$q = 4k\left[\bar{y}\Phi\left(\frac{y}{\sigma_y}\right) + \frac{\sigma_y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{y}}{\sigma_y}\right)^2}\right];$$

$$\bar{F} = 2k\left\{\left[(\bar{y})^2 + \sigma_y^2\right]\Phi\left(\frac{\bar{y}}{\sigma_y}\right) + \frac{\bar{y}\sigma_y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{y}}{\sigma_y}\right)^2}\right\}; \qquad (15.92)$$

$\Phi(y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^y e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функция Крампа, числовые значения которой имеются в работе [7].

в) Кусочно-линейная характеристика с зоной нечувствительности (см. рис. 15.2) при замене x на y:

$$q = k\left[1 - \Phi\left(\frac{1+\bar{y}_1}{\sigma_{y_1}}\right) - \Phi\left(\frac{1-\bar{y}}{\sigma_{y_1}}\right)\right];$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{F} = \bar{y}\Bigg\{k - \frac{k}{\bar{y}_1}\left[(1+\bar{y}_1)\Phi\left(\frac{1+\bar{y}_1}{\sigma_{y_1}}\right) - (1-\bar{y}_1)\Phi\left(\frac{1-\bar{y}_1}{\sigma_{y_1}}\right)\right] + \\ + \frac{\sigma_{y_1}}{\bar{y}_1\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\bar{y}_1}{\sigma_{y_1}}\right)^2} - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\bar{y}_1}{\sigma_{y_1}}\right)^2}\right]\Bigg\}; \\ \bar{y}_1 = \frac{\sigma_y}{b};\ \sigma_{y_1} = \frac{\bar{y}_1}{b}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.93)$$

г) Характеристика типа двусторонней реакции упругого элемента с различной жесткостью (рис. 15.5) при замене x на y:

$$\left.\begin{aligned} q = \frac{k_1+k_2}{2} + \frac{k_2-k_1}{2}\Phi\left(\frac{\bar{y}}{\sigma_y}\right); \\ \bar{F} = \sigma_y\Bigg\{\frac{\bar{y}}{\lambda_y}\left[\frac{1}{2}(k_2+k_1) + (k_1 - \right. \\ \left. - k_2)\Phi\left(\frac{\bar{y}}{\sigma_y}\right)\right] + \frac{k_1-k_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{y}_1)^2}{2\sigma_y^2}}\Bigg\}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.94)$$

д) Степенная несимметричная характеристика $F(y)=ky^2\, 1\,(y)$:

$$\left.\begin{aligned} \bar{F} = k\sigma_y^2\left\{\left[1 + \frac{(\bar{y})^2}{\sigma_y^2}\right]\left[\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\bar{y}}{\sigma_y}\right)\right] + \frac{\bar{y}}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{y})^2}{2\sigma_y^2}}\right\}; \\ q = k\sigma_y\left\{\left[1 + 2\Phi\left(\frac{\bar{y}}{\sigma_y}\right)\right]\frac{\bar{y}}{\sigma_y} + \frac{2e^{-\frac{(\bar{y})^2}{2\sigma_y^2}}}{\sqrt{2\pi}}\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.95)$$

е) Характеристика типа односторонней реакции упругого элемента (рис. 15.6) при замене x на y:

$$\left.\begin{aligned} q &= k\left[\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{\bar{y}}{\sigma_y}\right)\right]; \\ \bar{F} &= k\sigma_y\left\{\frac{\bar{y}}{\sigma_y}\left[\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{\bar{y}}{\sigma_y}\right)\right]+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\bar{y})^2}{2\sigma_y^2}}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{15.96}$$

15.7. Автопараметрические колебания виброизолированных систем

При проектировании виброизолированных систем иногда возникает необходимость устранить определенные формы колебаний, отрицательно влияющие на работу чувствительных к вибрациям приборов и машин. В случае виброизоляции с линейными упругими характеристиками можно удовлетворить условию разделения колебаний на независимые по обобщенным координатам [6]. Если условие рационального монтажа оборудования [6] будет удовлетворено, то колебания линейной виброизолированной установки происходят только в направлении возмущающих воздействий. Условие рационального монтажа является необходимым, но недостаточным для того, чтобы обеспечить независимость колебаний виброизолированной системы с нелинейными упругими характеристиками. Собственные колебания по одной из обобщенных координат нелинейной виброизолированной системы, удовлетворяющие условию [6], могут вызывать при определенном сочетании параметров колебания резонансного характера по другим обобщенным координатам.

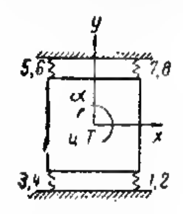


Рис. 15.11. Расчетная схема объекта, закрепленного на нелинейных упругих опорах

Рассмотрим простейший пример. На рис. 15.11 показана схема виброизолированной системы, совершающей плоские колебания. Положим, что виброизолированный объект закреплен на восьми одинаковых нелинейных упругих элементах, расположенных симметрично относительно его центра тяжести. Поместим начало неподвижной системы координат x, y в точке, совпадающей с положением центра тяжести объекта в состоянии статического равновесия. Оси координат направим по главным осям инерции объекта. Обозначим: ξ, η — составляющие перемещения центра тяжести объекта по осям x и y соответственно; α — угол поворота тела относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости x, y, проходящей через центр тяжести тела и связанной с ним.

Составляющие упругой силы i-го амортизатора представим в виде:

$$f_{ix} = k_x \xi_i; \quad f_{iy} = k_y \eta_i + c_y \eta_i^2, \tag{15.97}$$

где ξ_i, η_i — компоненты перемещения объекта в точке крепления его к i-му амортизатору; k_x, k_y — коэффициенты жесткости амортизатора; c_y — коэффициент нелинейной упругости.

Кинетическую и потенциальную энергию представим в форме:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m\dot{\xi}^2 + m\dot{\eta}^2 + J\dot{\alpha}^2); \\ \Pi &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} k_x(\xi-\alpha y_i)^2 + k_y(\eta+\alpha x_i)^2 + \frac{2c_y}{3}(\eta+\alpha x_i)^3, \end{aligned}\right\} \tag{15.98}$$

где x_i, y_i — координаты точек крепления амортизаторов к виброизолированному объекту; m, J — масса и момент инерции тела.

Пользуясь уравнением Лагранжа и соотвошевиями (15.98), получим уравнения колебаний:

$$\ddot{\eta} + \omega_1^2 \eta + \nu \eta^2 + \beta \alpha^2 = 0; \tag{15.99}$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \omega_2^2 \alpha + \varkappa \alpha \eta = 0; \\ \ddot{\xi} + \omega_3^2 \xi = 0, \end{aligned}\right\} \tag{15.100}$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{8k_g}{m}; \quad \omega_2^2 = \frac{8\left(k_x y_7^2 + k_y x_7^2\right)}{J};$$

$$\omega_3^2 = \frac{8k_x}{m}; \quad \nu = \frac{8c_y}{m};$$

$$\beta = \frac{8c_y x_7^2}{m}; \quad \varkappa = \frac{16c_y x_7^2}{J}.$$

Уравнения (15.99) связаны между собой нелинейными членами. Уравнение (15.100) является независимым. Колебаиия по координате ξ определяются только своими начальными условиями и не зависят от других координат. Положим $\xi(0) = \dot{\xi}(0) = 0$.

Если отклонить груз в вертикальном направлении и отпустить его при нулевой начальной скорости, то вертикальные перемещения тела можно приближенно записать в виде:

$$\eta = A \cos \omega_1 t. \tag{15.101}$$

Подставляя (15.101) во второе уравнение (15.99), получим:

$$\ddot{\alpha} + \omega_2^2 \left(1 + \mu_\alpha \cos \omega_1 t\right) \alpha = 0, \tag{15.102}$$

где

$$\mu_\alpha = \varkappa A / \omega_2^2.$$

Известно [2], что уравнение (15.102) обладает рядом зон параметрической неустойчивости. Наибольшее практическое значение имеет первая зона неустойчивости, границы которой определяются соотношением

$$\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\mu_\alpha}{8}. \tag{15.103}$$

При выполнении условия (15.103) вертикальные колебания вызывают колебания параметрического характера по угловой координате.

Очевидно, что такой подход к задаче является приближенным, так как здесь не учитывается влияние возбуждаемых колебаний на возбуждающие. Однако более точный подход к задаче, основанный на приложении теории возмущений, приводит к тем же качественным результатам [4].

15.8. Расчет упругого подвеса с очень низкой частотой собственных колебаний

Уменьшение динамических нагрузок, передающихся от вибрационных машин на опорные строительные конструкции, обычно достигается устройством виброизоляции с достаточно низкой частотой собственных колебаний.

Эффективность виброизоляции определяется отношением частоты возмущения к частоте собственных колебаний виброизолированной системы. С этой точки зрения желательно иметь крайне низкую частоту собственных колебаний. Известно также, что изготовление и эксплуатация линейных виброизоляторов, обеспечивающих частоту собственных колебаний ниже 2 *гц*, сопряжены с большими трудностями, так как в этом случае система получает значительные перемещения при случайных возмущениях.

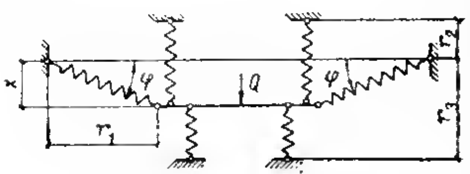


Рис. 15.12. Схема упругого подвеса

Если упругая характеристика виброизоляции нелинейна, то можно подобрать параметры упругих элементов таким образом, чтобы жесткость системы в некотором диапазоне смещений виброизолированного объекта была близка к нулю.

Первая попытка практического использования виброизоляции с такого рода характеристикой описана в [19].

Рассмотрим схему упругого подвеса (рис. 15.12). Он состоит из платформы, опертой на три группы пружин: 1) наклонных, 2) верхних вертикальных и 3) нижних вертикальных.

Беря сумму проекций упругих сил на вертикаль, находим:

$$Q = (r_1 \sec\varphi - l_1)\, n_1 k_1 \sin\varphi + (r_2 + r_1 \operatorname{tg}\varphi - l_2)\, n_2 k_2 + \\ + (l_3 - r_3 + r_1 \operatorname{tg}\varphi)\, n_3 k_3, \qquad (15.104)$$

где n_i — число пружин данной группы (здесь индекс i совпадает с номером рассматриваемой группы); l_i — длина пружины в ненагруженном состоянии; k_i — коэффициент жесткости пружины.

Дифференцируя уравнение (15.104) по x, находим коэффициент жесткости:

$$k = \frac{dQ}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = n_3 k_3 + n_2 k_2 + n_1 k_1 - \frac{l_1 n_1 k_1}{r_1} \cos^3\varphi. \qquad (15.105)$$

Отсюда

$$\frac{dk}{dx} = \frac{3 l_1 n_1 k_1}{r_1^2} \cos^4\varphi \sin\varphi. \qquad (15.106)$$

Минимальное значение коэффициента жесткости при $x=0$ $(\varphi=0)$

$$k = n_3 k_3 + n_2 k_2 + n_1 k_1 - \frac{l_1 n_1 k_1}{r_1}. \qquad (15.107)$$

Выражение (15.107) показывает, что при определенном соотношении между параметрами можно получить виброизоляцию с нулевым значением коэффициента жесткости ($k=0$). В этом случае

$$\frac{n_3 k_3 + n_2 k_2}{n_1 k_1} = \frac{l_1}{r_1} - 1. \qquad (15.108)$$

Величина груза Q составит:

$$Q_{(\varphi=0)} = n_2 k_2 (r_2 - l_2) + n_3 k_3 (l_3 - r_3). \qquad (15.109)$$

Устойчивое положение равновесия, соответствующее $\varphi=0$, может быть достигнуто при условии, что коэффициент жесткости системы $k=0$. Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие (15.108). Обозначая массу груза $Q_{(\varphi=0)}$ вместе с платформой через m и учитывая соотношения (15.104) и (15.109), получим следующее уравнение свободных колебаний:

$$\ddot{x} + ex - g\frac{x}{\sqrt{x^2 + r_1^2}} = 0, \qquad (15.110)$$

где

$$e = \frac{n_3k_3 + n_2k_2 + n_1k_1}{m}; \quad g = \frac{n_1k_1l_1}{m}.$$

Интегрируя уравнение (15.110), находим:

$$\dot{x} = \sqrt{H - ex^2 + 2g\sqrt{x^2 + r_1^2}}, \qquad (15.111)$$

где

$$H = \dot{x}^2(0) + ex^2(0) - 2g\sqrt{x^2(0) + r_1^2}.$$

Период колебаний T при максимальных по модулю смещениях $x(0)$ и $x(T/2)$ определяется формулой

$$T = 2\int\limits_{x(T/2)}^{x(0)} \frac{dx}{\sqrt{H - ex^2 + 2g\sqrt{x^2 + r_1^2}}}. \qquad (15.112)$$

Численные значения T могут быть найдены путем замены интеграла конечной суммой. Этот интеграл может быть также выражен через эллиптические интегралы. После перехода к переменной

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{x^2 + r_1^2}} \qquad (15.113)$$

получим:

$$T = 2\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{d\zeta}{\zeta\sqrt{1 - r_1^2\zeta^2}\sqrt{\left(H + r_1^2\right)\zeta^2 + 2g\zeta - e}},$$

где ζ_0 и ζ_1 соответствуют значениям $t=0$ и $t=T/2$. Преобразование этого интеграла к канонической форме Лежандра можно найти в работе [17]. Если рассматривать малые колебания, то при $|x/r_1| < 1$ уравнение (15.110) с помощью биномиального разложения можно представить в виде:

$$\ddot{x} + \left(e - gr_1^2\right)x + \frac{g}{2}x^3 - \frac{3}{12}g\frac{x^5}{r_1^2} + \frac{5}{16}g\frac{x^7}{r_1^4} + \dots = 0. \qquad (15.114)$$

Решение этого уравнения легко находится на основе приближенных методов исследования квазилинейных систем [1].

Рассматриваемая здесь схема виброизоляции примечательна тем, что в некотором диапазоне смещений коэффициент жесткости системы может принимать близкие к нулю значения, что обеспечивает практически защиту от всего спектра возмущающих частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1958.
2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., ГИТТЛ, 1956.
3. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. Госстройиздат, 1965.

3а. Болотин В. В., Гольденблат И. И., Смирнов А. Ф. Современные проблемы строительной механики. Стройиздат, 1964.

4. Ивович В. А. Автопараметрические колебания виброизолированной системы с нелинейными характеристиками. Прикладная механика, т. 5, вып. 12, 1966.
5. Нориш Ю. И. Субгармонический резонанс в системе с упругими ограничителями хода. ЖТФ, т. 16, № 6, 1946.
6. Нориш Ю. И. Защита самолетного оборудования от вибрации. Оборонгиз, 1949.
7. Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1962.
8. Каудерер Г. Нелинейная механика. Ил, 1961.
9. Коловский М. З. Вынужденные колебания в нелинейных амортизаторах при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости относительного перемещения. Труды Ленинградского политехн. ин-та им. М. И. Калинина, № 210. Машгиз, 1960.
10. Коловский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем. «Наука», 1966.
11. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Киев, 1937.

11а. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. Изд. «Наукова думка», Киев, 1971.

12. Попов Е. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1960.
13. Солодовников В. В. Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. М. — Л., ГИТТЛ, 1952.
14. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. ИЛ, 1953.
15. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. Изд. 3-е. Гостехиздат, 1952.
16. Booton R. C. Nonlinear control systems with random inputs. Trans. IRE. Vol. ET-1, 1954.
17. Byrd P. F. and Friedman M. D. Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Springer, 1954.
18. Fung I. C., Barton M. V. Shock response of a nonlinear system. Trans. ASME, E 29, 3, 1962.
19. Molyneux W. G. Supports for vibration isolation, A. R. C. Current paper, 322, February, 1957.
20. Shock and vibration handbook. vol. I—III. McGraw—Hill, 1961.
21. Trefftz F. Zu den Grundlagen der Schwingungstheorie, Math. Ann., 95, 307, 1926.

РАЗДЕЛ 16

ГАСИТЕЛИ КОЛЕБАНИЙ

(В. И. Сысоев)

Наиболее распространенными типами гасителей, применяемых в строительстве, являются динамические гасители, демпферы (гасители повышенного сопротивления), ударные гасители и ограничители колебаний. Классификация гасителей колебаний приведена в табл. 16.1.

Таблица 16.1

<table>
<tr><td colspan="12">Динамические гасители (без затухания или с затуханием)</td></tr>
<tr><td colspan="4">пружинные</td><td colspan="4">маятниковые</td><td colspan="4">с вращающимися маятниками</td></tr>
<tr><td colspan="12">Демпферы (гасители повышенного сопротивления)</td></tr>
<tr><td colspan="3">пневматические</td><td colspan="3">вязкого трения</td><td colspan="3">сухого трения</td><td colspan="3">электромагнитные</td></tr>
<tr><td colspan="12">Ударные гасители</td></tr>
<tr><td colspan="6">одностороннего действия (одноударные)</td><td colspan="6">двустороннего действия (двухударные)</td></tr>
<tr><td colspan="3">с нулевым зазором</td><td colspan="3">с отрицательным, нулевым или положительным зазором</td><td colspan="3">с положительным зазором</td><td colspan="3">с отрицательным, нулевым или положительным зазором</td></tr>
<tr><td colspan="3">Маятниковые (с математическим, физическим или специальными низкочастотными маятниками)</td><td colspan="3">Пружинные</td><td colspan="3">Плавающие (шариковые, цилиндриковые или кольцевые)</td><td colspan="3">Пружинные</td></tr>
<tr><td colspan="12">Ограничители одностороннего действия (одноударные) или двустороннего действия (двухударные) (без затухания или с затуханием)</td></tr>
<tr><td colspan="6">жесткие</td><td colspan="6">упругие</td></tr>
</table>

Гасители могут применяться для гашения различных видов колебаний: поперечных, продольных, крутильных, возникающих в рабочем или пуско-остановочном режиме работы машины — источника колебаний, а также колебаний, вызванных ветром, и др.

Условимся в дальнейшем элемент сооружения или механической системы, на котором установлен гаситель колебаний, называть системой.

При работе динамического или ударного гасителя энергия колебаний системы передается гасителю, который благодаря этому колеблется с повышенной амплитудой.

Динамический и ударный гасители применяются для уменьшения колебаний сооружений башенного типа (дымовых труб, мачт, башен), элементов сооружений: балок, плит, проводов линий электропередачи и т. п. и виброизолированных машин в рабочем, пуско-остановочном или в том и другом режимах.

Работа гасителей повышенного сопротивления (демпферов) основана на том, что энергия колебаний системы рассеивается в результате сухого трения прижатых друг к другу поверхностей или в результате вязкого трения, возникающего при прохождении жидкости или воздуха по узким щелям и каналам, а также при взаимодействии магнитного поля с полем вихревых токов, возбуждающихся движением системы. Гасители повышенного сопротивления применяются в случаях, когда необходимо уменьшить амплитуды колебаний виброизолированной машины или перевести колебательный процесс в апериодическое движение системы.

Работа ограничителей колебаний основана на изменении упругих или упруго-вязких свойств системы, в результате чего уменьшаются амплитуды колебаний и изменяется частота собственных колебаний системы. Энергия системы частично рассеивается при ударе об ограничитель, но бóльшая часть сил передается через ограничитель. Ограничители колебаний применяются для ограничения амплитуд колебаний виброизолированных машин и приборов.

В последнее время появились новые работы в области теории гасителей колебаний. Рассмотрены задачи о колебаниях башенных сооружений с динамическими гасителями при детерминированных [17] и случайных воздействиях [18], при автоколебаниях [19]. Получила дальнейшее развитие теория ударных гасителей для систем с одной степенью свободы [40] и для систем с бесконечным числом степеней свободы [42].

Ниже рассмотрена работа различных гасителей и ограничителей колебаний, предназначенных для уменьшения поступательных колебаний систем с одной степенью свободы.

16.1. Динамические гасители

Пружинные динамические гасители

Динамический гаситель без затухания

Рассмотрим систему с одной степенью свободы (рис. 16.1), имеющую массу M_1 и жесткость k_1; на системе установлен динамический гаситель колебаний с массой M_2 и жесткостью k_2. Система приводится в колебательное движение возмущающей силой $P = P_0 \sin \omega t$.

Дифференциальные уравнения колебаний системы с гасителем имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} M_1 \frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = P_0 \sin \omega t; \\ M_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + k_2 (x_2 - x_1) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (16.1)$$

Рис. 16.1. Динамический гаситель колебаний без затухания

Решение этой системы, соответствующее установившимся колебаниям, определяется выражениями:

$$x_1 = a_1 \sin \omega t; \quad x_2 = a_2 \sin \omega t, \quad (16.2)$$

где

$$a_1 = \delta_{ст} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)(1-\beta^2) - \mu\alpha^2\beta^2}; \quad a_2 = \delta_{ст} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - \beta^2)(1-\beta^2) - \mu\alpha^2\beta^2}; \tag{16.3}$$

$$\delta_{ст} = \frac{P_0}{k_1}; \quad \alpha = \frac{\theta_2}{\theta_1}; \quad \beta = \frac{\omega}{\theta_1}; \quad \mu = \frac{M_2}{M_1}; \tag{16.4}$$

$\theta_1 = \sqrt{\frac{k_1}{M_1}}$ — круговая частота собственных колебаний системы (при отсутствии гасителя); $\theta_2 = \sqrt{\frac{k_2}{M_2}}$ — круговая частота собственных колебаний гасителя (при неподвижной массе M_1).

Главная масса M_1 не будет колебаться в случае, если круговая собственная частота θ_2 присоединенного гасителя будет равна круговой частоте ω изменения возмущающей силы. В этом случае

$$a_2 = -\frac{P_0}{k_2}, \tag{16.5}$$

т. е. упругая сила гасителя во всякий момент времени будет уравновешивать возмущающую силу. Это справедливо для любого значения отношения β.

Поскольку применение гасителя особенно эффективно в случае, если система находится в состоянии резонанса или, по крайней мере, близка к нему, то полагаем $\theta_2 = \theta_1$, откуда $\frac{k_2}{k_1} = \frac{M_2}{M_1} = \mu$. Величина μ должна быть такой, чтобы амплитуда колебаний массы M_2 гасителя, равная $\frac{P_0}{M_2\omega^2}$, была в пределах, допускаемых прочностью пружины гасителя.

Частотное уравнение системы с гасителем как системы с двумя степенями свободы, при $\alpha = 1$ будет:

$$\beta^4 - (2+\mu)\beta^2 + 1 = 0. \tag{16.6}$$

Корни этого уравнения

$$\beta_{1,2}^2 = 1 + \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\mu\left(1 + \frac{\mu}{4}\right)}. \tag{16.7}$$

При небольших значениях μ частоты собственных колебаний системы с гасителем мало отличаются друг от друга и от расчетного значения $\omega = \theta_1$ — круговой частоты возмущающей силы. Поэтому применение динамического гасителя без затухания связано с требованием строгого постоянства частоты возмущающей силы.

Динамический гаситель с затуханием

Пусть на системе с одной степенью свободы (рис. 16.2), имеющей массу M_1 и жесткость k_1, установлен динамический гаситель колебаний, имеющий массу M_2, жесткость k_2 и коэффициент затухания c. Система приводится в колебательное движение возмущающей силой $P = P_0 \sin \omega t$ [10].

Решение дифференциальных уравнений колебаний системы с гасителем:

$$M_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 + c\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right) = P_0 \sin \omega t; \quad M_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + k_2(x_2 - x_1) + c\left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right) = 0 \tag{16.8}$$

имеет вид (16.2), при этом:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{\delta_{\text{ст}}^2}{d^2}\left[\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2+4c_0^2\beta^2\right];\\ a_2^2 &= \frac{\delta_{\text{ст}}^2}{d^2}\left(\alpha^4+4c_0^2\beta^2\right), \end{aligned}\right\} \tag{16.9}$$

где

$$d^2=\left[\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(1-\beta^2\right)-\mu\alpha^2\beta^2\right]^2+4c_0^2\beta^2\left(1-\beta^2-\mu\beta^2\right)^2; \tag{16.10}$$

$\delta_{\text{ст}}$, α, β и μ определяются по (16.4).

В формулах (16.9) и (16.10) c_0 есть отношение коэффициента затухания c к коэффициенту «критического» затухания c_c, равному $2M_2\theta_1$, т. е.

$$c=2c_0M_2\theta_1. \tag{16.11}$$

При резонансе, т. е. при $\alpha=1$, как в случае очень малого затухания ($c\to 0$), так и в случае очень большого затухания, когда обе массы оказываются жестко связанными между собой ($c\to\infty$), амплитуды колебаний системы неограниченно возрастают. Между этими предельными значениями c имеется такое его значение, при котором резонансная амплитуда минимальна.

Рис. 16.2. Динамический гаситель колебаний с затуханием

Имеются определенные значения β, при которых можно так «настроить» гаситель, что амплитуда колебаний системы не будет зависеть от затухания в гасителе. Такой гаситель называется гасителем с наилучшей настройкой. В этом случае для «настройки» на любую величину массы гасителя должно выполняться условие

$$\alpha=\frac{1}{1+\mu}, \tag{16.12}$$

при этом амплитуда колебаний системы будет:

$$a_1=\delta_{\text{ст}}\sqrt{1+\frac{2}{\mu}}. \tag{16.13}$$

Если гаситель колебаний имеет постоянную настройку $\alpha=1$, то:

$$\beta^2=1-\sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}}; \tag{16.14}$$

$$a_1=\delta_{\text{ст}}\frac{1}{(1+\mu)\sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}}-\mu}. \tag{16.15}$$

В этом случае гаситель называется настроенным на частоту системы.

Затухание, удовлетворяющее условию наилучшего действия гасителя, может быть определено с помощью кривых, приведенных на рис. 16.3.

Амплитуда относительного движения масс M_1 и M_2, определяющая напряжение в пружине гасителя, вычисляется по формуле

$$\left(\frac{|a_2 - a_1|}{\delta_{ст}}\right)^2 = \frac{a_1}{\delta_{ст}} \cdot \frac{1}{2\mu\beta c_0} . \qquad (16.16)$$

Величина амплитуды относительного движения масс M_1 и M_2 может быть определена по графикам на рис. 16.4.

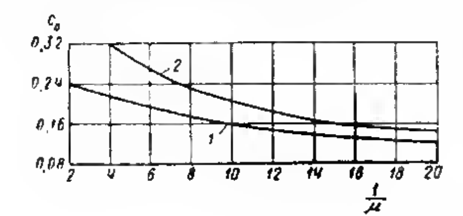


Рис. 16.3. Кривые коэффициентов затухания, удовлетворяющих условию наилучшего действия гасителя

1 — гаситель с наилучшей настройкой; *2* — гаситель, настроенный на частоту главной системы

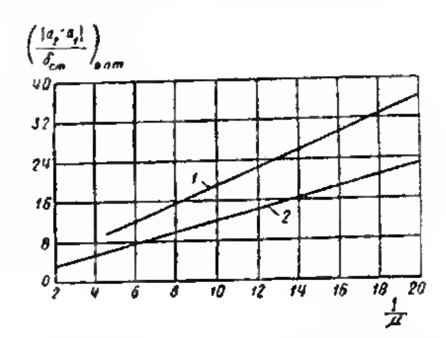


Рис. 16.4. Кривые относительных амплитуд колебаний масс M_1 и M_2

1 — гаситель с наилучшей настройкой и наилучшим затуханием; *2* — гаситель с наилучшим затуханием, настроенный на частоту главной системы

Пример 16.1. Рассчитать динамический гаситель колебаний для системы с одной степенью свободы. Дано $M_1 g = 500$ *кгс*, $M_2 g = 50$ *кгс*, $P_0 = 50$ *кг*, $k_1 = 2000$ *кгс/см*.

1. Гаситель без затухания (при фиксированных частотах $\theta_1 = \theta_2 = \omega$). Имеем: $\mu = 1/10$, $a_1 = 0$. Находим: $k_2 = \mu k_1 = 200$ *кгс/см*. По формуле (16.5) $|a_2| = 0,25$ *см*. По формуле (16.7).

$$\beta^2_{1,2} = \frac{21 \pm 6,4}{20} .$$

Отношения частоты возмущающей силы к собственным частотам $\beta_1 = 1,17$; $\beta_2 = 0,85$.

2. Гаситель с наилучшим затуханием, настроенный на частоту системы. По рис. 16.3 $c_0 = 0,202$. Имеем $\theta_1 = 62,6$ *сек*$^{-1}$. По формуле (16.11) наилучшее значение коэффициента затухания в гасителе $c = 1,29$ *кгс·сек/см*. По формуле (16.15) наибольшая амплитуда главной массы $a_1 = 0,179$ *см*. По рис. 16.4 $|a_2 - a_1| = 0,3$ *см*. Сила, действующая в пружине, $k_2\ |a_2 - a_1| = 60$ *кгс*.

3. Гаситель с наилучшим затуханием и наилучшей настройкой. Наилучшая настройка определяется по формуле (16.12) $\alpha = 10/11$, поэтому $k_2 = 165$ *кгс/см*. По рис. 16.3 $c_0 = 0,16$. По формуле (16.11) наилучшее значение коэффициента затухания в гасителе $c = 1,02$ *кгс·сек/см*. По формуле (16.13) наибольшая амплитуда главной массы $a_1 = 0,16$ *см*. По рис. 16.4 $|a_2 - a_1| = 0,46$ *см*. Сила, действующая в пружине, $k_2\ |a_2 - a_1| = 76$ *кгс*.

Динамический гаситель с вращающимися маятниками

Пусть на системе с одной степенью свободы (рис. 16.5), имеющей массу M_1 и жесткость k, установлен динамический гаситель, имеющий n маятников с массами M_3, вращающихся на валу массы M_2 вокруг оси x с угловой скоростью $\dot{\psi} = \nu\omega$. Вращение осуществляется от вала машины через передачу, определяемую передаточным числом ν и круговой частотой ω тех колебаний, которые нужно погасить. Система совершает вертикальные колебания под действием возмущающей силы $P = P_0 \sin \omega t$.

Дифференциальные уравнения колебаний системы с гасителем имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &M\frac{d^2x}{dt^2}+nM_3 s\left[\frac{d^2\theta}{dt^2}\cos\theta-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin\theta\right]=P_0\sin\omega t-\\ &\qquad -Mg+k(x+x_0-l_0)-c_x\frac{dx}{dt};\\ &nM_3\left\{\frac{d^2x}{dt^2}s\cos\theta+(s^2+a^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}+[s(R+s\cos\theta)+\right.\\ &\left.+(b^2-c^2)\cos\theta]\,\nu^2\omega^2\sin\theta\right\}=-nM_3\,gs\cos\theta-nc_\theta\frac{d\theta}{dt}.\end{aligned}\right\}\qquad(16.17)$$

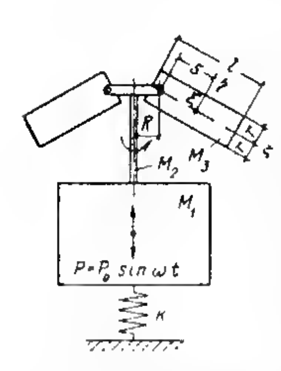


Рис. 16.5. Маятниковый динамический гаситель колебаний

Здесь a, b, c — главные радиусы инерции маятника относительно его центра тяжести (главные оси инерции ξ, η, ζ); k — жесткость пружины; l_0 — длина ненагруженной пружины; x — вертикальная координата фиксированной точки массы M_1; x_0 — постоянная, выбираемая так, чтобы сила пружины характеризовалась выражением $k(x+x_0-l_0)$; g — ускорение силы тяжести; s — расстояние от центра тяжести маятника до оси его качания; θ — координата угла поворота маятника относительно его оси в вертикальной плоскости; R — расстояние от оси вращения вала гасителя до оси качания маятника; c_x — коэффициент затухания системы; c_θ — коэффициент затухания гасителя; $M=M_1+M_2+nM_3$.

Обозначая $\omega t=\tau$ и считая x', x'', θ, θ', θ'' (штрихи обозначают дифференцирование по τ) малыми величинами, на основании чего разлагая уравнения (16.17) в степенные ряды до членов третьего порядка, получим уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &x^{*\prime\prime}+c_x x^{*\prime}+k^*x^*+M^*\left[\theta''\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)-\theta\theta'^2\right]=P_0^*\sin\tau;\\ &\qquad x^{*\prime\prime}\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)+a^*\theta''+c_\theta^*\theta'+\left(R^*+b^*\right)\theta-\\ &\qquad -\frac{1}{6}(R^*+4b^*)\,\theta^3=-g^*\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right),\end{aligned}\right\}\qquad(16.18)$$

где

$$x^*=\frac{x}{s};\quad R^*=\frac{R}{s}\nu^2;\quad a^*=\frac{s^2+a^2}{s^2};\quad b^*=\frac{s^2+b^2-c^2}{s^2}\nu^2;$$

$$P_0^*=\frac{P_0}{Ms\omega^2};\quad m^*=\frac{nM_3}{M};\quad g^*=\frac{g}{s\omega^2};$$

$$k^*=\frac{k}{M\omega^2};\quad c_x^*=\frac{c_x}{M\omega};\quad c_\theta^*=\frac{c_\theta}{M_3s^2\omega}.\qquad(16.19)$$

Функция $x(\tau)$ и $\theta(\tau)$ находятся в виде рядов Фурье в комплексной форме:

$$x^* = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j e^{ij\tau}; \quad \theta^* = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} B_j e^{ij\tau}, \tag{16.20}$$

коэффициенты которых можно определить по методу Галеркина с применением метода итерации. В [29] для коэффициентов A_j и B_j даются формулы нулевого, первого, второго и третьего приближений.

В практических расчетах в случае резонанса могут применяться следующие формулы.

Амплитуда колебаний системы без гасителя

$$x = \frac{P_0}{M_1 \omega^2 c_x^2}. \tag{16.21}$$

Амплитуда колебаний системы при наличии гасителя

$$\tilde{A}_{11} = -\frac{c_\theta^* P_0^*}{2M^*}\left(1 - \frac{c_x^* c_\theta^*}{M^*}\right) - \frac{c_\theta^*}{8}\left(\frac{P_0^*}{M^*}\right)^3\left(1 - 4\frac{c_x^* c_\theta^*}{M^*}\right) - $$
$$- i\,\frac{3b^* + a^*}{16}\left(\frac{P_0^*}{M^*}\right)^3\left(1 - 4\frac{c_x^* c_\theta^*}{M^*}\right) \tag{16.22}$$

Длина маятника определяется из уравнения

$$l^{25} - \frac{c_\theta^{*2}}{9x_{11}^2}\left(\frac{F}{H}\right)^2 l^{16}\left(l^3 - 2\frac{c_x^* c_\theta^*}{H}\right) - \frac{c_\theta^{*2}}{18x_{11}^2}\left(\frac{F}{H}\right)^4 \times$$
$$\times l^8\left(l^3 - 5\frac{c_x^* c_\theta^*}{H}\right) - \frac{(3b^* + a^*)^2 + 4c_\theta^{*2}}{576x_{11}^2}\cdot\left(\frac{F}{H}\right)^6\left(l^3 - 8\frac{c_x^* c_\theta^*}{H}\right) = 0, \tag{16.23}$$

где

$$M^* = Hl^3; \quad P_0^* = \frac{F}{l}; \quad H = \frac{\pi\gamma}{18 M_1 g};$$
$$F = \frac{3P_0}{M_1\omega^2}, \quad x_{11} = 2s\,|\tilde{A}_{11}|; \tag{16.24}$$

γ — удельный вес тела маятника. Здесь предположено, что $s = R = l/3$ и $r = l/6$ (см. рис. 16.5).

Условие настройки гасителя

$$R^* + b^* - a^* = 0. \tag{16.25}$$

Пример 16.2. Рассчитать маятниковый динамический гаситель колебаний для системы с одной степенью свободы. Дано $P_0 = 500$ *кг*, $\omega = 216$ *сек*$^{-1}$, $M_1 g = 10^4$ *кгс*. Колебания резонансные, т. е. $k^* = 1$. Амплитуда колебаний системы без гасителя $x = 1$ *мм*.

Из формулы (16.21) коэффициент гашения колебаний системы $c_x^* = 1{,}05 \cdot 10^{-2}$ *кгс·сек/см*. Так как $s = R = l/3$ и $r = l/6$, то

$$a = b = \frac{\sqrt{13}}{12}\, l; \quad c = \frac{l}{6\sqrt{2}}.$$

По (16.25) и (16.19) находим, что $v^2 = 0{,}674$, и далее находим: $a^* = 1{,}813$, $b^* = 1{,}137$.

Предполагая, что амплитуда свободных колебаний маятника после 120 колебаний, т. е. через $t_0 = \tau_0/\omega$ затухает до $1/e$ первоначальной величины, получаем:

$$c_\theta^* = \frac{a^*}{120\pi} = 0{,}481 \cdot 10^{-2} \text{ кгс·сек/см}.$$

Далее, учитывая, что $x_{H}=10^{-2}$ *см*, $\gamma=7{,}8\cdot10^{-3}$ *кгс/см³*, составляем уравнение для определения длины маятника, из которого находим $l=20{,}3$ *см*. Следовательно, $M^*=1{,}139\cdot10^{-3}$, $P_0^*=1{,}554\cdot10^{-4}$, $g^*=3{,}11\cdot10^{-3}$ и вес тела маятника $M_3g=5{,}7$ *кг*.

16.2. Демпферы (гасители повышенного сопротивления)

Демпфер сухого трения

Рассмотрим демпфер сухого трения, имеющий массу M_2 и коэффициент трения скольжения μ между массой M_2 и прижимающимися к ней с силой Q поверхностями, установленный на системе с одной степенью свободы (рис. 16.6), имеющей массу M_1 и жесткость k. Система приводится в колебательное движение возмущающей силой $P=P_0\sin\omega t$.

Рис. 16.6. Гаситель сухого трения

Модуль максимальной силы трения

$$F_T = 2\mu Q. \tag{16.26}$$

Опытами установлено, что при удельном давлении $p\geqslant2$ *кгс/см²*, даже при обильной смазке, трение можно считать кулоновым (сухим), т. е. что коэффициент трения μ не зависит от скорости. При отсутствии смазки или при малой смазке удельное давление может быть уменьшено. При удельном давлении $p\leqslant0{,}4$ *кгс/см²* трение приближается к вязкому. Этими данными следует пользоватся при конструктивной разработке демпферов.

Сила инерции демпфера

$$R_2 = M_2\ddot{x}_2. \tag{16.27}$$

Движение демпфера зависит от соотношения между силой инерции и максимальной силой трения. Если ускорение $\ddot{x}_1$ таково, что $R_2<F_T$, то демпфер будет двигаться вместе с системой как одно целое. Если $R_2\geqslant F_T$, то демпфер оторвется от системы и будет двигаться с постоянным ускорением, отвечающим условию отрыва $R_2=F_T$. Это ускорение равно:

$$\ddot{x}_2 = \frac{F_T}{M_2}. \tag{16.28}$$

После отрыва демпфера от системы сила трения будет совершать работу, определяемую как ее значением, так и относительным проскальзыванием демпфера по отношению к системе. Под работой трения будем подразумевать работу, которую совершает сила трения за один полный цикл колебаний.

Если $F_T=0$, демпфер будет иметь наибольшее проскальзывание, но работа трения будет равна нулю. С увеличением силы трения проскальзывание уменьшается, а работа силы трения растет. Когда сила трения возрастет до такой величины, что $F_T>M_2\ddot{x}_2$, проскальзывание станет равно нулю, и работа трения также будет равна нулю. Очевидно, наивыгоднейшим будет значение силы трения, при которой работа ее будет наибольшей, так как при этом рассеивание энергии будет наибольшим, а следовательно, амплитуды колебаний системы наименьшими.

Допустим, что движение демпфера происходит без заедания. Работа внешней силы при резонансном режиме

$$W_в = \pi P_0 A, \tag{16.29}$$

где A — амплитуда колебаний системы.

Работа сил трения демпфера

$$W_2 = 4F_T A \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{F_T}{M_2 A \omega^2}\right)^2}. \qquad (16.30)$$

Наивыгоднейшее значение силы трения

$$F_{T_0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} M_2 \omega^2 A \qquad (16.31)$$

и соответствующая ей максимальная работа

$$W_2 = \frac{4}{\pi} M_2 \omega^2 A^2. \qquad (16.32)$$

Недостатками демпфера сухого трения являются износ его трущихся поверхностей, что влечет за собой изменение сил трения и приводит к его расстройке, а также возможные перекосы и заедания, выключающие демпфер из работы.

Демпфер вязкого трения

Параметры демпфера вязкого трения, присоединенного к системе с одной степенью свободы (рис. 16.7) и имеющего коэффициент сопротивления c, подбираются следующим образом.

Площадь сечения перепускного канала определяется по формуле

$$f = \alpha \sqrt{p}\,, \qquad (16.33)$$

где

$$\alpha = \frac{F^2 \sqrt{\gamma}}{c\varepsilon \sqrt{20\,g}}; \qquad (16.34)$$

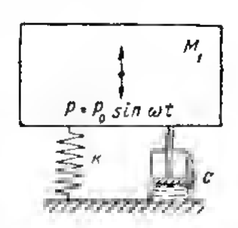


Рис. 16.7. Гаситель вязкого трения

p — давление жидкости под поршнем; F — площадь сечения поршня; ε — коэффициент расхода (для отверстий с округлыми краями и односторонним движением жидкости $\varepsilon = 0{,}8 \div 0{,}95$; для отверстий с открытыми краями и переменным направлением движения жидкости $\varepsilon = 0{,}63$); γ — плотность жидкости.

Из формулы (16.33) следует, что рабочий клапан демпфера должен быть устроен таким образом, чтобы его проходное сечение изменялось пропорционально корню квадратному из давления в цилиндре демпфера. Пример такой конструкции клапана демпфера приведен в работе [11].

Площадь поршня демпфера

$$F = \frac{c v^{\text{п}}_{\text{макс}}}{p_{\text{макс}}}, \qquad (16.35)$$

где $v^{\text{п}}_{\text{макс}}$ — максимальная скорость перемещения поршня; $p_{\text{макс}}$ — максимальное давление жидкости.

Коэффициент сопротивления демпфера в данном случае равен:

$$c = 2M_1 \omega. \qquad (16.36)$$

Максимальное проходное сечение перепускного канала

$$f_{\text{макс}} = \frac{F v^{\text{п}}_{\text{макс}}}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\gamma}{20 g p_{\text{макс}}}}. \qquad (16.37)$$

Коэффициент c можно менять в широких пределах, варьируя величины f и p, что достигается с помощью обычного перепускного вентиля.

Недостатком большинства демпферов вязкого трения является непостоянство вязких свойств масел в связи с изменением температуры, что приводит к расстройке демпфера. Исключение составляют демпферы, в которых в качестве вязкой жидкости применен силикон, вязкие свойства которого не зависят от температуры.

16.3. Ударные гасители

Плавающие ударные гасители по конструкции представляют собой дополнительный груз в виде цилиндра, шара, кольца, ступицы, обода и т. п., встраиваемый с некоторым зазором в подверженную колебаниям систему. Теория расчета таких гасителей рассмотрена в работах [3, 5, 8, 13, 21, 31, 33, 34 и др.].

Маятниковый ударный гаситель колебаний для дымовых труб, радиомачт, башен и т. п. [20] представляет собой систему маятников, подвешенных к сооружению без зазора. В отличие от ударных гасителей с зазором, соударяющихся два раза за период колебаний, маятниковый гаситель соударяется с сооружением один раз за период. В работе [24] дано решение задачи о свободных и вынужденных колебаниях системы с одной степенью свободы, снабженной маятниковым гасителем колебаний.

Пружинный ударный гаситель [22] представляет собой дополнительный груз на пружине. Теория этого виброгасителя рассмотрена в работе [12]. Ударные гасители с пружиной применяются также для уменьшения колебаний виброизолированных машин при прохождении через резонанс во время пуска и остановки.

В работах [4, 6, 7, 14, 15, 26—28 и др.] рассматриваются вопросы устойчивости периодических движений систем с шариковыми и пружинными ударными гасителями.

Плавающие ударные гасители

На системе с одной степенью свободы (рис. 16.8, *а*), имеющей массу M_1 и жесткость k, установлен плавающий ударный гаситель, имеющий массу M_2.

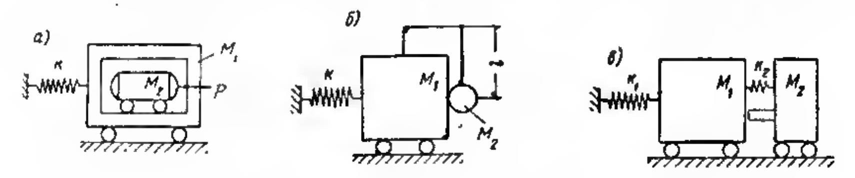


Рис. 16.8. Схемы ударных гасителей колебаний

Система приводится в колебательное движение возмущающей силой $P = P_0 \sin \omega t$.

Рассеиваемая при каждом соударении энергия [30]

$$\Delta E = \frac{2(1 + r^2)(1 + M_2/M_1) M_2}{(1 - r + 2 M_2/M_1)^2} v_{1r}^2, \qquad (16.38)$$

где скорость массы M_1 перед соударением с гасителем

$$v_{1r} = \frac{(1 - r + 2M_2/M_1) P_0}{(1 + r) M_2 \omega} \cdot \frac{\sigma\tau + \sqrt{\dfrac{1 + \sigma^2}{(1 + \xi^2)^2} - \tau^2}}{1 + \sigma^2}. \qquad (16.39)$$

Здесь

$$\sigma = \frac{(1-r)(1+M_2/M_1)}{(1+r)M_2/M_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \pi\xi/2}{\xi};$$

$$\tau = \frac{M_1\omega^2 a}{P_0}; \ \xi = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{k}{M_1}}; \tag{16.40}$$

r — коэффициент восстановления скорости при ударе; P_0 — амплитуда возмущающей силы; ω — круговая частота возмущающей силы; a — сниженная в результате действия гасителя амплитуда колебаний системы.

Величина ΔE будет максимальной при максимальном значении v_{1r}. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} \Delta E_{\text{макс}} &= \frac{2(1-r)(1+M_2/M_1)P_0^2}{(1+r)M_2\omega^2} \cdot \frac{1}{(1-\xi^2)^2}; \\ v_{1r\text{макс}} &= \frac{(1-r+2M_2/M_1)P_0}{(1+r)M_2\omega}\left|\frac{1}{1-\xi^2}\right|; \\ a_{\text{опт}} &= \frac{(1-r)(1-M_2/M_1)P_0}{(1+r)M_2\omega^2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\pi\xi/2}{1-\xi^2}. \end{aligned}\right\} \tag{16.41}$$

Величина необходимого зазора z определяется по формуле

$$z = \frac{\pi(1+r)v_{1r}}{2\left(1-r+2\frac{M_2}{M_1}\right)\omega} + a. \tag{16.42}$$

Маятниковый ударный гаситель

На системе с одной степенью свободы (рис. 16.8, *б*), имеющей массу M_1 и жесткость k, установлен маятниковый ударный гаситель колебаний, имеющий массу M_2 и длину маятника l. Система приводится в колебательное движение возмущающей силой $P = P_0 \sin(\theta t + \psi)$.

Дифференциальные уравнения установившихся колебаний системы и гасителя:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \lambda^2 x &= \frac{P}{M}\sin(\theta t + \psi) - \frac{S}{M}\sum_{R=0}^{\infty}\delta(t-RT); \\ \ddot{\varphi} + \omega^2\varphi &= -\frac{\ddot{x}}{l} + \frac{S}{M_2 l}\sum_{R=0}^{\infty}\delta(t-RT), \end{aligned}\right\} \tag{16.43}$$

где

$$\lambda^2 = \frac{k}{M}; \quad \omega^2 = \frac{g}{l}; \ M = M_1 + M_2; \tag{16.44}$$

$$S = -(1+r)\frac{MM_2}{M+M_2}\, l\dot{\varphi}(T); \tag{16.45}$$

$\delta(t-Rt)$ — дельта-функция; r — коэффициент восстановления скорости при ударе; T — период соударений.

Чисто вынужденные колебания системы и гасителя для интервала времени $(0, T)$ при выполнении условий настройки

$$\theta T = 2\pi; \ 2\omega = \theta \tag{16.46}$$

и условия равенства нулю отклонения гасителя во время соударения:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{x} &= \frac{P}{MA(\lambda^2-\theta^2)}\left\{\left[(M+M_2)(1+r)\sin\theta t-\frac{4M_2(1+r)\theta}{3\lambda}\times\right.\right.\\ &\left.\times\sin\lambda t\right](4\lambda^2-\theta^2)\operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{\theta}+4M_2(1+r)\theta\left(\lambda\cos\theta t-\right.\\ &\left.\left.-\frac{4\lambda^2-\theta^2}{3\lambda^2}\cos\lambda t\right)\right\};\\ \tilde{\varphi} &= \frac{4P}{3MlA(\lambda^2-\theta^2)}\left\{\left[-(M+M_2)(1-r)(4\lambda^2-\theta^2)\sin\theta t+\right.\right.\\ &\left.+4M_2(1+r)\theta\lambda\sin\lambda t\right]\operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{\theta}+4M_2(1+r)\theta\lambda(-\cos\theta t+\\ &\left.+\cos\lambda t)+2(1+r)[-M_2\theta^2+M(4\lambda^2-\theta^2)]\operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{\theta}\sin\frac{\theta t}{2}\right\},\end{aligned}\right\} \quad (16.47)$$

где

$$A^2=(M+M_2)^2(1-r)^2(4\lambda^2-\theta^2)^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi\lambda}{\theta}+16M_2^2(1+r)^2\theta^2\lambda^2. \quad (16.48)$$

При резонансе ($\theta=\lambda$)

$$\left.\begin{aligned}\tilde{x} &= \frac{P}{2M\lambda^2}\left\{\left[\frac{3\pi(M+M_2)(1-r)}{4M_2(1+r)}-\pi+\lambda t\right]\sin\lambda t-\frac{2}{3}\cos\lambda t\right\};\\ \tilde{\varphi} &= \frac{2P}{3Ml\lambda^2}\left\{\frac{\pi(3M-M_2)}{2M_2}\sin\frac{\lambda t}{2}-\right.\\ &\left.-\left[\frac{3\pi(M+M_2)(1-r)}{4M_2(1+r)}-\pi+\lambda t\right]\sin\lambda t\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (16.49)$$

Пружинный ударный гаситель

На системе с одной степенью свободы (рис. 16.8, *в*), имеющей массу M_1 и жесткость k_1, установлен пружинный ударный гаситель, имеющий массу M_2 и жесткость k_2. Система приводится в колебательное движение возмущающей силой

$$P=P_0\sin(\theta t+\psi).$$

Дифференциальные уравнения установившихся колебаний системы и гасителя:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}+\lambda^2x &= \frac{P}{M_1}\sin(\theta t+\psi)-\frac{S}{M_1}\sum_{R=0}^{\infty}\delta(t-Rt);\\ \ddot{y}+\omega^2y &= \frac{S}{M_2}\sum_{R=0}^{\infty}\delta(t-Rt),\end{aligned}\right\} \quad (16.50)$$

где

$$\lambda^2=\frac{k_1}{M_1};\quad \omega^2=\frac{k_2}{M_2}; \quad (16.51)$$

$$S = (1 + r)\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}[\dot{x}(T) - \dot{y}(T)]. \qquad (16.52)$$

Чисто вынужденные колебания системы и гасителя для интервала времени $(0, T)$ при выполнении условий настройки (16.46) и условия равенства отклонения системы отклонению гасителя во время соударения:

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{x} &= \frac{P}{M_1 A(\lambda^2 - \theta^2)}\{[(M_1 + M_2)(1 - r)\lambda \sin\theta t - \\ &- M_2(1 + r)\theta \sin\lambda t]\,\mathrm{tg}\frac{\pi\lambda}{\theta} + M_2(1+r)\theta(\cos\theta t - \cos\lambda t)\}; \\ \widetilde{y} &= \frac{2P(1 + r)\lambda\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi\lambda}{\theta}}{A(\lambda^2 - \theta^2)}\sin\frac{\theta t}{2}, \end{aligned}\right\} \qquad (16.53)$$

где

$$A^2 = (M_1 + M_2)^2(1 - r)^2\lambda^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi\lambda}{\theta} + M_2^2(1 + r)^2\theta^2. \qquad (16.54)$$

При резонансе $(\theta = \lambda)$

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{x} &= \frac{P}{2M_1\lambda^2}\left[\frac{\pi(M_1 + M_2)(1 - r)}{M_2(1 + r)} - \pi + \lambda t\right]\sin\lambda t; \\ \widetilde{y} &= \frac{P\pi}{M_2\lambda^2}\sin\frac{\lambda t}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (16.55)$$

Величина $M_2(1+r)/(M_1+M_2)(1-r)$ является обобщенной характеристикой ударных гасителей колебаний рассмотренного вида.

Пример 16.3. Найти такие значения μ и r, которым соответствовало бы фиктивное значение коэффициента неупругого сопротивления (внутреннего трения) $\delta_ф = n/\lambda = 0{,}1$ при резонансных колебаниях системы с одной степенью свободы, снабженной пружинным ударным гасителем колебаний.

Производя вычисления, найдем $M_2(1+r)$: $(M_1+M_2)(1-r) = 0{,}373$; при этом $\widetilde{x}/x_{ст} = 5$, где $x_{ст} = P/M_1\lambda^2$. Гаситель колебаний с таким эффектом можно осуществить, например, при $\mu = 0{,}14$ и $r = 0{,}5$ или при $\mu = 0{,}02$ и $r = 0{,}9$; эффект гашения будет один и тот же, но амплитуда колебаний самого гасителя будет в первом случае $\widetilde{y}/x_{ст} = 22{,}5$, а во втором $\widetilde{y}/x_{ст} = 157$, т. е. в 7 раз больше.

16.4. Ограничители

Исследование свободных и вынужденных колебаний систем с одной степенью свободы, имеющих ограничители, приводится в работах [10, 25 и др.], в которых рассмотрены колебания нелинейных систем с характеристиками, составленными из нескольких прямолинейных отрезков, находящихся под воздействием синусоидальной возмущающей силы.

Ниже приводится решение задачи о вынужденных колебаниях системы с одной степенью свободы, имеющей ограничители, полученное с помощью асимптотического метода.

Дифференциальное уравнение колебаний системы с одной степенью свободы

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = \varepsilon f_1\left(\frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon E \sin\omega t, \qquad (16.56)$$

где функция F_x, выражающая зависимость нелинейной восстанавливающей силы от смещения, является нечетной функцией x (случай симметричной нелинейной характеристики) (рис. 16.9, *а—г*).

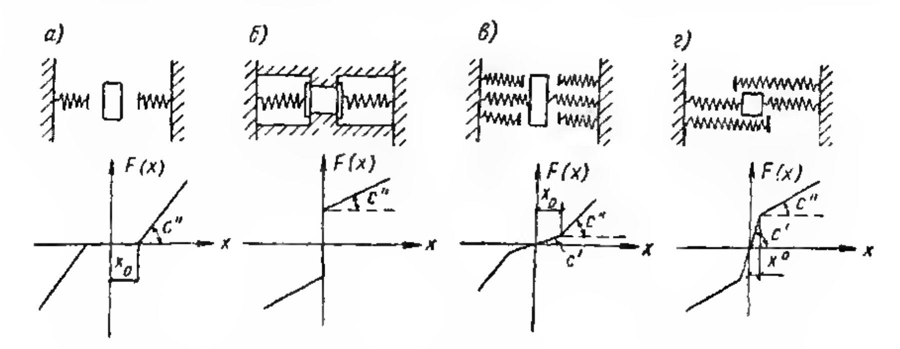


Рис. 16.9. Характеристики нелинейной восстанавливающей силы

Предположим, что

$$F(x) = c'' x + \varepsilon f(x), \tag{16.57}$$

тогда вместо уравнения (16.56) можно рассматривать следующее уравнение:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + c'' x = -\varepsilon f(x) + \varepsilon f_1\left(\frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon E \sin \omega t. \tag{16.58}$$

Предполагается также, что ε — малый положительный параметр.

В первом приближении можно положить

$$x = a \cos(\nu t + \theta), \tag{16.59}$$

где a и θ определяются системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f_1(-a\omega \sin\psi)\sin\psi d\psi - \frac{\varepsilon E}{\omega+\nu}\cos\theta; \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \nu + \frac{\varepsilon}{2\pi\omega a}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi)\cos\psi\, d\psi + \frac{\varepsilon E}{a(\omega+\nu)}\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{16.60}$$

Зависимость между a и ν для стационарного режима

$$a^2\left[\left(\omega_e^2(a) - \nu^2\right)^2 + 4\nu^2\sigma_e^2(a)\right] = \varepsilon^2 E^2, \tag{16.61}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \sigma_e(a) &= \frac{\varepsilon}{2\pi\omega a}\int_0^{2\pi} f_1(-a\omega\sin\psi)\sin\psi d\psi; \\ \omega_e^2(a) &= \frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} F(a\cos\psi)\cos\psi d\psi. \end{aligned}\right\} \tag{16.62}$$

Если пренебречь трением, то вместо (16.61) получаем

$$a\left[\omega_e^2(a) - \nu^2\right] = \pm\varepsilon E; \tag{16.63}$$

при этом в правой части следует брать «+» для $a>0$ и «—» для $a<0$.

Второе приближение (пренебрегая трением)

$$x = a\cos(\nu t + \theta) + \varepsilon u_1(a, \nu t, \nu t + \theta), \tag{16.64}$$

где

$$u_1(a, \nu t, \nu t + \theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n(\nu t + \theta)}{\omega^2(1-n^2)}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi)\cos\psi d\psi, \tag{16.65}$$

и амплитуда стационарных колебаний определяется соотношением

$$a\left[\omega_e^2(a) - \nu^2\right] + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f_n(a)\left[f_{n+1}^{(1)}(a) + f_{n-1}^{(1)}(a)\right]}{\omega^2(1-n^2)} = \pm\varepsilon E, \tag{16.66}$$

где

$$\left.\begin{aligned} f_n(a) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi)\cos n\psi d\psi; \\ f_n^{(1)}(a) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'_a(a\cos\psi)\cos n\psi d\psi. \end{aligned}\right\} \tag{16.67}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьев И. В., Беляев М. М. Техника измерения колебаний. ЦАГИ. Изд. Бюро новой техники, 1947.
2. Ананьев М. В. Тимофеев И. Г. Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование. «Машиностроение», 1965.
3. Бабицкий В. И., Кобринский А. Е. Периодические движения двухмассовой колебательной системы в полости. Теория машин и механизмов, вып. 103—104. «Наука», 1964.
4. Бабицкий В. И., Кобринский А. Е., Романов В. Д. Области существования и устойчивости виброударных режимов двухмассовой колебательной системы в полости. Теория машин и механизмов, вып. 105—106. «Наука», 1965.
5. Брунштейн Р. Е. Кобринский А. Е. Периодические движения системы, содержащей шарик в полости. Изв. АН СССР, ОТН, «Механика и машиностроение», 1959, № 1.
6. Брунштейн Р. Е., Кобринский А. Е. Об устойчивости периодических движений виброударных систем. Изв. АН СССР, ОТН, «Механика и машиностроение», 1960, № 5.
7. Брунштейн Р. Е., Кобринский А. Е. Динамика и устойчивость двухмассовых виброударных систем. Изв. АН СССР, «Механика и машиностроение», 1964, № 5.
8. Галаев П. И. Изучение колебательного движения соударяющихся масс. Киев, Институт строительной механики АН УССР, 1957.
9. Гопп. Ю. А. Демпферы крутильных колебаний коленчатых валов быстроходных двигателей. Харьков, ГНТИ, 1938.
10. Ден-Гартог Дж. П. Теория колебаний. Пер. с англ. А. Н. Обморшева. Гостехтеоретиздат, 1942.
11. Ильинский В. С. Фундаменты с амортизаторами под молоты. «Вестник машиностроения», 1955, № 10.
12. Кобринский А. Е. Принцип действия и краткая теория виброгасителя Д. И. Рыжкова. «Вестник машиностроения», 1954, № 9.
13. Кобринский А. Е. Колебания двухмассовой системы, движущейся с периодическими соударениями. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 5.
14. Кобринский А. Е., Шляхтин А. В., Ямщикова М. Н. К теории машин виброударного действия. Труды семинара по ТММ, 1960, вып. 79.
15. Кобринский А. Е. К теории виброударных механизмов. В сб.: «Динамика машин», Машгиз, 1960.
16. Кононенко В. Об импульсном виброгасителе. Доклады АН УССР, 1953, № 6.

17. Коренев Б. Г., Резников Л. М. О колебаниях башенных сооружений, оборудованных динамическими гасителями. «Строительная механика и расчет сооружений», 1968, № 2.
18. Коренев Б. Г., Резников Л. М. О колебаниях конструкций с динамическими гасителями при стационарных случайных воздействиях. «Строительная механика и расчет сооружений», 1970, № 4.
19. Коренев Б. Г., Резников Л. М. О гашении автоколебаний башенных сооружений при действии ветра. «Строительная механика и расчет сооружений», 1971, № 6.
20. Коренев Б. Г., Сысоев В. И. Метод гашения колебаний сооружений башенного типа. «Бюллетень строительной техники», 1953, № 5.
21. Ройтенберг Я. Н. Маятник с импульсивным демпфированием. «Инженерный сборник», т. 3, вып. I, 1946.
22. Рыжков Д. И. Опыт устранения вибраций при скоростном точении. Изд-во АН СССР, 1953.
23. Сергеев С. И. Демпфирование механических колебаний. Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959.
24. Сысоев В. И. Маятниковый гаситель колебаний сооружений башенного типа. Сб. ЦНИИСК «Исследования по динамике сооружений». Под ред. Б. Г. Коренева. Госстройиздат, 1957.
25. Сысоев В. И. Свободные колебания систем с одной степенью свободы, имеющих ограничители. Сб. ЦНИИСК. «Исследования по динамике сооружений». Под ред. Б. Г. Коренева. Госстройиздат, 1961.
26. Фейгин М. И. К теории нелинейных демпферов (ударный демфер и демпфер сухого трения). Изв. высших учебных заведений. «Радиофизика», т. 2 № 4, 1959.
27. Фейгин М. И. О вынужденных колебаниях двух масс, сочлененных с зазором. Изв. АН СССР, ОТН, 1960, № 5.
28. Фейгин М. И. К теории ударного демпфера. Изв. высш. учебных заведений. «Радиофизика», т. 4, № 3. 1961.
29. Хейнрих Г., Дезойер К. Гашение прямолинейных колебаний при помощи маятникового демпфера. «Механика». Периодич. сб. переводов иностр. статей, 1961.
30. Эрлих Л. Б., Слезингер И. П. Демпфер ударного действия. «Вестник машиностроения», 1954, № 7.
31. Grubin C. On the theory of the acceleration damper. Journ. of Appl. Mech., v. 23, № 3, september, 1956.
32. Johnson R. C. Impact forces in mechanisms. Mach. Design, 1958, 30, № 12.
33. Lieber P. and Jensen D. P. An acceleration damper: development, design and some applications. «Transactions of the ASME», 1945, X, v. 67, № 7.
34. New torsional vibration damper. A swedish development for large and small oil engines «The motor ship», february, 1939.
35. Paget A. L. Vibration of steam—turbine buckets and damping by impact. Engineering, 19.III.1937.
36. Алексеев А. М., Сборовский А. К. Судовые виброгасители. Судпромгиз, 1962.
37. Ананьев И. В., Тимофеев П. Г. Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование. «Машиностроение», 1965.
38. Сысоев В. И. Динамический гаситель с ударным демпфированием. «Строительная механика и расчет сооружений», 1971, № 3.
39. Пикулев Н. А., Эрделевский А. Н. К вопросу проектирования группы виброгасителей с учетом расстроек. «Строительная механика и расчет сооружений», 1971, № 5.
40. Сысоев В. И. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы, снабженных ударными гасителями колебаний. Сб. ЦНИИСК «Исследования по динамике сооружений» под ред. Б. Г. Коренева. 1971, вып. 17.
41. Коренев Б. Г., Зевин А. А., Резников Л. М. Сравнительный анализ эффективности динамического и ударного гасителей колебаний. «Строительная механика и расчет сооружений», 1972, № 3.
42. Зевин А. А. Вынужденные колебания пластины с ударным гасителем. Сб. ЦНИИСК «Исследования по динамике сооружений» под. ред. Б. Г. Коренева, 1971, вып. 17,

РАЗДЕЛ 17

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СООРУЖЕНИЙ

(Л. С. Максимов, И. С. Шейнин)

Изучение вибраций сооружений производится с целью:

1) определения допустимости этих вибраций;

2) определения динамических характеристик сооружения для прогнозирования его поведения при возможном изменении динамических нагрузок вследствие реконструкции, смены оборудования и т. п.;

3) исследования и уточнения истинного характера динамических процессов в сооружении для разработки и улучшения методов расчета и конструирования сооружений с учетом динамических явлений.

Сложность измерения вибраций сооружений заключается в крайнем разнообразии колебательных процессов и в широком диапазоне изменения характеризующих их параметров. Амплитуды колебательного движения могут иметь порядок от нескольких метров для высотных сооружений типа мачт, башен и дымовых труб до нескольких микрон для жестких конструктивных элементов. Частоты могут иметь порядок от десятых долей герца при колебаниях высотных сооружений до нескольких килогерц при колебаниях жестких сооружений. Для различного рода измерений предназначены измерительные приборы: механические, оптические, а также получившие широкое развитие электрические приборы, основанные на преобразовании кинематических параметров вибрации в электрические величины с последующим использованием методов электрических измерений.

Обзор литературы по экспериментальным методам изучения вибраций сооружений см. [4, 10, 29].

17.1. Механические и оптические приборы для измерения вибраций

Общая теория приборов для измерения вибраций составляет основное содержание виброметрии [6, 8]. Установившейся классификации этих приборов нет. Наиболее известные примеры классификации приводятся в [6] и особенно обстоятельно в [8].

Термином «измерение вибрации» обозначают либо запись линейного или углового перемещения (скорости, ускорения) какой-либо части (элемента) колеблющегося тела, либо измерение одного или нескольких параметров этого процесса — амплитуд и частот гармонических составляющих вибраций, статистических характеристик случайного колебательного движения, пиковых значений перемещения (скорости, ускорения) произвольного колебательного движения и т. п.

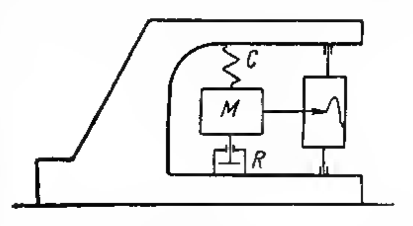


Рис. 17.1. Механическая схема прибора с сейсмомассой

Если вблизи элемента, иолебаиия иоторого иеобходимо измерить, не удается найти другой элемент, иоторый можно принять за неподвижный, измеряют перемещении элемеита отиосительио так изываемой иерционной массы (сейсмомассы).

Движеиие сейсмомассы относительно основания прибора, движущегося вместе с элемеитом, колебании которого измеряются (рис. 17.1), описывается дифференциальным уравиением

$$M \frac{d^2}{dt^2}(Z+z) + R\frac{dz}{dt} + Cz = 0 \tag{17.1}$$

или

$$\ddot{z} + 4\pi D_1 f_1 \dot{z} + (2\pi f_1)^2 z = -\ddot{Z}. \tag{17.2}$$

Здесь M — масса; R — иоэффициент сопротивлении; C — жестиость пружины; $z(t)$ — перемещение центра массы относительно основании прибора, причем за иуль принито положение статического равновесии; $Z(t)$ — перемещеиие осиоваиия прибора;

$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{M}}$ — собствеииая частота сейсмомассы;

$D_1 = \frac{R}{4\pi f_1 M}$ — относительное затухаиие или просто затухание.

Если осиование совершает гармоиичесние иолебании

$$Z(t) = a \sin 2\pi f t$$

с амплитудой a и частотой f, то вынужденные колебания сейсмомассы относительно корпуса прибора также являются гармоничесними:

$$z(t) = A \sin(2\pi f t - \varphi) \tag{17.3}$$

с той же частотой f, амплитудой

$$A = \frac{a\zeta^2}{\sqrt{(1-\zeta^2)^2 + (2D_1\zeta)^2}}. \tag{17.4}$$

и сдвигом фаз

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2D_1\zeta}{1-\zeta^2}, \quad (\zeta = f/f_1). \tag{17.5}$$

Графини, поназывающие отношение амплнтуды перемещения массы A к амплитуде перемещении основания a (рис. 17.2, a), к амплитуде скорости движении основания $2\pi fa$ (рис. 17.2, б), н амплитуде ускорения осиоваиия $(2\pi f)^2 a$ (рис. 17.2, в) в зависимости от ζ называются амплитудно-частотными или, для краткости, амплнтудиыми харантеристинами соответствеино по перемещению, скорости и усиорению. Графии зависимости сдвига фаз от ζ (рис. 17.2, г) называют фазочастотной или просто фазовой харантеристииой. Для уииверсальностн характеристик, приведенных на графиках рис. 17.2, б и 17.2, в, иа них показаиы безразмерные ордииаты, получаемые из размерных умножением на f_1 н f^2 соответствеино.

Амплитудиая характеристика по перемещению (рис. 17.2, a) показывает, что дли всех частот, в три и более раза превышающих собствеииую частоту сейсмомассы, относительиое перемещеиие сейсмомассы прантичесни то же, что и перемещеиие иолеблющегоси элемеита относительно иеподвижных координат. Специальным подбором затухаиия можио удлинить горизоитальный участои харантеристики в сторону низких частот. Например, при $D_1 = 0{,}6$ с точностью до 5% могут быть измерены амплитуды дли всех частот выше 1,2 собственной.

Одиано, как видно из фазовой характеристики (рис. 17.2, г), в последием случае гармонини с частотами ниже $3f_1$ будут иметь разиый сдвиг фаз, что

приведет к искажению формы полигармонического колебания при записи, хотя и не изменит амплитудного спектра. В большинстве приборов стремятся достигнуть затухания $D_1=0{,}55 \div 0{,}6$ не только для улучшения амплитудной характеристики в ущерб фазовой, но и для подавления паразитических собственных колебаний сейсмомассы, вызванных случайными толчками.

Работа прибора с сейсмомассой в зоне высоких частот, когда используется практически горизонтальный участок амплитудной характеристики по перемещению, называется работой в режиме *вибрографа* или *виброметра* (в литературе встречается также равнозначный, но реже употребляемый термин — в режиме сейсмографа или сейсмометра).

Приборы, предназначенные для регистрации перемещений, т. е. для работы в режиме вибрографа, стремятся делать как можно более низкочастотными. Практически нижний предел собственной частоты ограничивается габаритами прибора и весом сейсмомассы и редко опускается ниже 0,2—1 *гц*.

Верхний предел частотного диапазона вибрографов ограничен появлением резонансов в отдельных деталях прибора и в большинстве современных низкочастотных приборов не менее чем в 100 раз превышает собственную частоту.

Амплитудная характеристика по скорости (рис. 17.2, *б*) имеет горизонтальный участок только при очень высоком затухании, причем этот участок тем длиннее, а чувствительность прибора тем меньше, чем больше затухание. При использовании этого горизонтального участка характеристики говорят, что прибор работает в режиме *велосиметра* или *велосиграфа*.

Амплитудная характеристика по ускорению (рис. 17.2, *в*) имеет горизонтальный участок в зоне низких частот ($\zeta \leqslant 0{,}8$ при $D_1=0{,}6$ с точностью до 5%). При измерениях на этих частотах прибор работает в режиме *акселерометра* или *акселерографа*. Для расширения диапазона измеряемых частот приборы для регистрации ускорений стремятся делать по возможности высокочастотными. Однако выбирать собственную частоту слишком высокой нецелесообразно из-за снижения чувствительности, так как отношение амплитуды перемещения сейсмомассы к амплитуде ускорения обратно пропорционально квадрату собственной частоты.

Рассмотрение фазовой характеристики (рис. 17.2, *г*) показывает, что для акселерометра с коэффициентом $D_1=0{,}6$ сдвиг фаз при $\zeta<1$ прямо пропорционален частоте, благодаря чему искажения формы записи полигармонического колебания получаются наименьшими. При этом также достаточно быстро затухают собственные колебания сейсмомассы, вызванные случайными толчками.

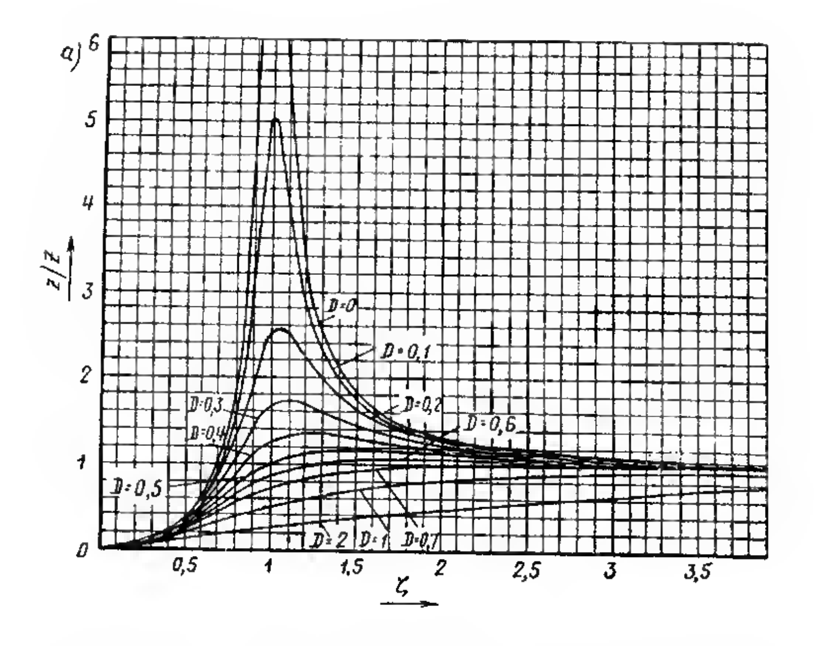
Механические приборы для измерения и регистрации вибраций в настоящее время распространены сравнительно мало.

Простейшими приборами, позволяющими проводить измерения без регистрации, являются индикаторы часового типа, амплитудомер А. М. Емельянова и В. Ф. Смотрова и язычковые частотомеры [10].

Среди приборов с регистрацией следует отметить тастограф и аналогичные ему, но не столь универсальные приборы ВР-1, ВР-2, ВР-3 и прибор фирмы «Аскания» [6], предназначенные для работы в качестве виброщупов с использованием неподвижного штатива (или рук оператора вместо штатива).

Наиболее универсальным механическим прибором является измерительный прибор Гейгера (рис. 17.3), состоящий из регистратора, позволяющего работать с неподвижной точкой, и набора сейсмомасс, пружин и других приспособлений, позволяющих использовать его для работы в качестве вибрографа и акселерографа при линейных и угловых вибрационных перемещениях, а также для измерения и регистрации скорости вращения вала машины или колебаний этой скорости и ряда других величин [4, 10].

Прибор имеет лентопротяжный механизм с пружинным приводом, ручным заводом и плавной регулировкой скорости ленты от 0,5 до 2 и от 5 до 20 *см/сек* (два положения переключателя), рычажную систему, связывающую перо с вибрирующим элементом или сейсмомассой, и две системы отметок времени — от внешнего и внутреннего токопрерывателя. Движение от неподвижной точки к перу может передаваться с увеличением от 1 до 36 раз и с уменьшением от 1 до 4 раз, а от сейсмомассы к перу — с увеличением от 3 до 12 раз.



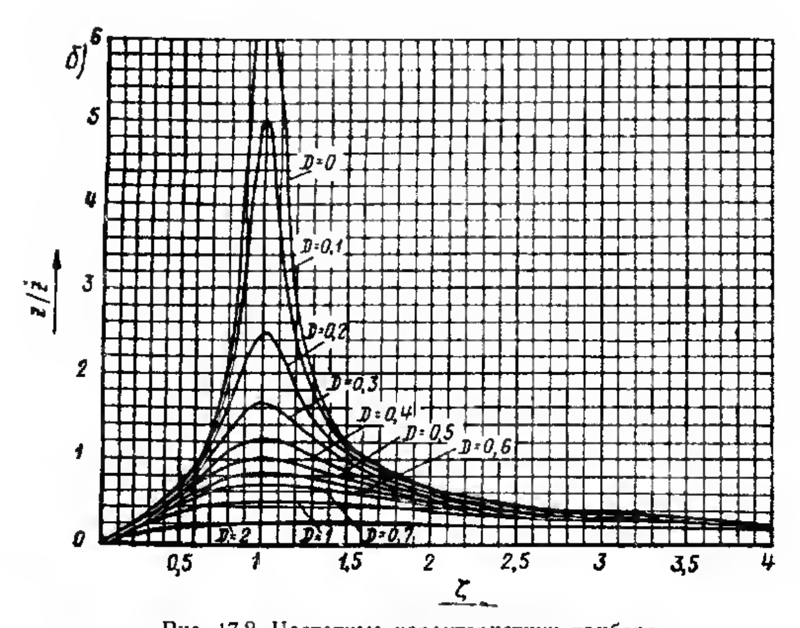
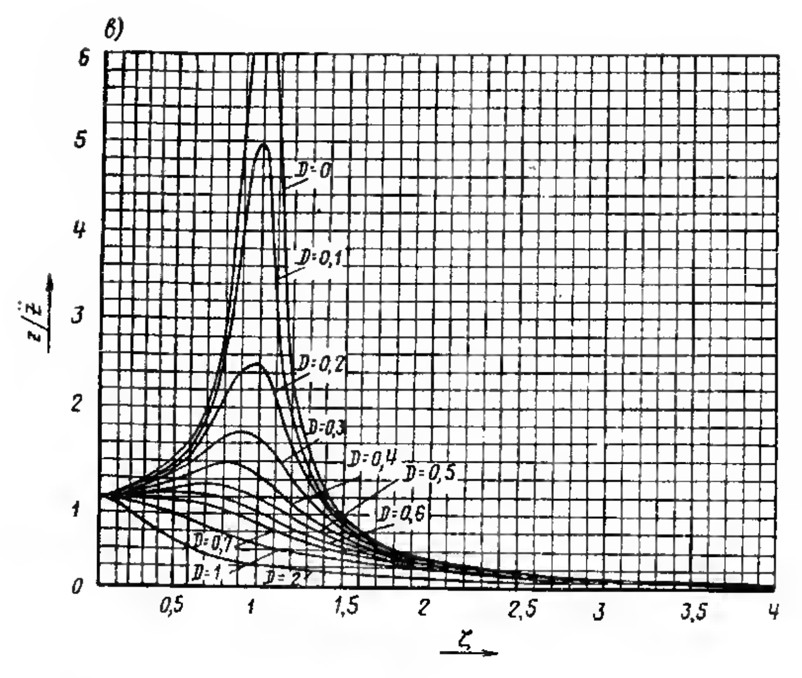
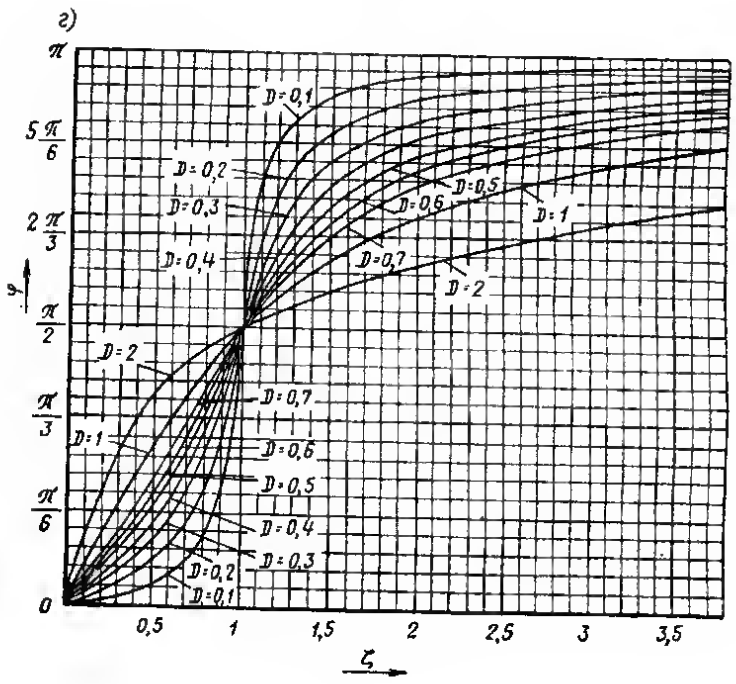


Рис. 17.2. Частотные характеристики прибора

а—в — амплитудные, соответственно по перемещению, скорости и ускорению; *г* — фазовая


в)
6
5
4
3
2
1
0
z/ż
D=0
D=0,1
D=0,2
D=0,3
D=0,4
D=0,5
D=0,6
D=0,7
D=1
D=2
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
ζ


г)
π
5π/6
2π/3
π/2
π/3
π/6
0
φ
D=0,1
D=0,2
D=0,3
D=0,4
D=0,5
D=0,6
D=0,7
D=1
D=2
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
ζ

Измеряемые частоты лежат в пределах от 5 до 300 *гц*, а с добавочными устройствами, входящими в комплект прибора, — от 2,5 *гц*. Лента шириной 50 *мм* выпускается двух типов: белая — для чернильных перьев и красная восковая — для царапающих.

Аналогичные характеристики имеют вибрографы типа Кембридж и близкие — двух- и трехкомпонентные вибрографы Доу, Майгака и Шредера [4, 6, 33].

Паспортные характеристики виброизмерительных приборов с механическим методом регистрации не всегда соответствуют фактическим [25]. Вибрографы Гейгера и Майгака могут быть допущены к применению с ограниченными коэффициентами увеличения. Некоторые вибрографы, как, например, трехкомпонентный виброграф Шредера, оказались непригодными для измерений.

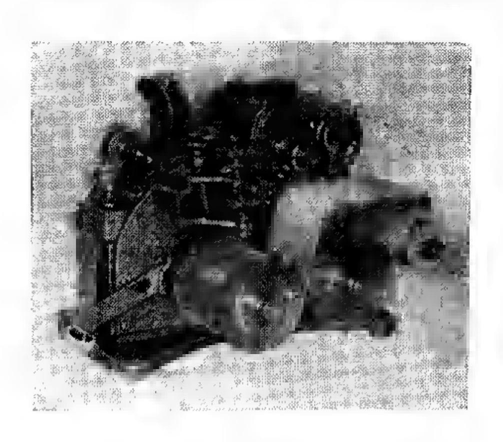


Рис. 17.3. Виброграф Гейгера

Оптические приборы в простейших случаях используются для измерения амплитуды колебаний, но существуют и универсальные приборы для регистрации вибраций на фотоленту, отличающиеся от механических тем, что для увеличения используются так называемые «оптические рычаги» — системы зеркал и линз, передающие к фотоленте световой луч от зеркала, механически соединяемого с колеблющимся телом [6].

Для измерения амплитуд колебаний высотных сооружений, при величине этих амплитуд от нескольких сантиметров до нескольких метров, используют геодезические оптические приборы. Для измерения частот используют стробоскопы с градуированной шкалой, подбирая частоту вспышек так, чтобы вибрирующая поверхность казалась неподвижной.

Более сложные оптические виброизмерительные приборы, в том числе зеркальные, фотографические, фототеневые, фотоэлектронные и т. п., распространены весьма мало, так как серийно они не выпускаются. Описание таких приборов и библиографию по этому вопросу можно найти в [6, 8, 33].

Механические и оптические приборы обладают существенным недостатком — они позволяют производить измерения одновременно только в одной точке и вблизи вибрирующего элемента. В большинстве случаев требуется иметь запись колебаний одновременно во многих точках сооружения. Часто возникает необходимость дистанционного измерения вибрации. Такую возможность дают только электрические приборы.

17.2. Электрические приборы для измерения вибраций

В основу устройства всех электрических приборов для измерения вибраций положен общий принцип — кинематические параметры колебательного движения преобразуются в электрические величины, которые затем измеряются или регистрируются с помощью электроизмерительных приборов или регистраторов электрических сигналов. Основное преимущество электрических приборов — возможность дистанционного измерения и одновременной регистрации вибраций во многих точках, что позволяет проследить сложные динамические процессы в сооружении в целом, установить формы колебаний, проанализировать связь вибраций с динамическими нагрузками. Кроме того, электрические методы позволяют во многих случаях использовать электрические приборы

для анализа вибраций, автоматизировать измерительные процессы, а также организовать предупредительную и аварийную сигнализацию, когда какие-либо параметры вибрации достигают недопустимых величин. Различают два класса преобразователей механических величин в электрические — генераторные, т. е. вырабатывающие электродвижущую силу, и параметрические, т. е. изменяющие параметры и соответственно ток в электрической цепи, питаемой от самостоятельного источника.

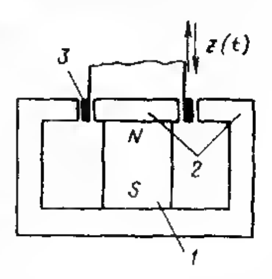


Рис. 17.4. Схема электродинамического преобразователя

1 — магнит; *2* — магнитопроводы; *3* — подвижная катушка

Генераторные преобразователи построены на общих принципах преобразования механической или световой энергии в электрическую. Наибольшее распространение получили способы, основанные на изменении магнитного потока через электрическую катушку, так называемые магнитоэлектрические, ранее называвшиеся также электродинамическими, электромагнитными или индукционными [6, 8, 24]. Такие преобразователи вырабатывают электродвижущую силу (э. д. с.), пропорциональную скорости изменения магнитного потока и соответственно при равномерном магнитном поле — скорости механического движения. Например, ток в катушке магнитоэлектрического преобразователя, показанного на рис. 17.4,

$$i = \frac{G\dot{z} + E_{ц}}{R + r}, \tag{17.6}$$

где G — коэффициент электромеханической связи (к. э. м. с.) преобразователя, измеряемый в *в* на *м/сек*;

$$G = \pi Bnd; \tag{17.7}$$

$\dot{z}$ — скорость перемещения катушки в зазоре в *м/сек*; $E_{ц}$ — электродвижущая сила, развиваемая другими источниками во внешней цепи катушки в *в*; R — внутреннее сопротивление катушки в *ом*; r — сопротивление внешней цепи в *ом*; B — магнитная индукция в зазоре в *тесла*; n — число витков в катушке; d — средний диаметр катушки в *м*.

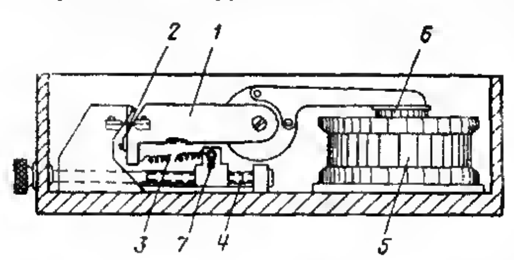


Рис. 17.5. Вибродатчик ВЭГИК без корпуса

При использовании магнитоэлектрического преобразователя в вибродатчике с сейсмомассой преобразователь не только вырабатывает э. д. с., но и оказывает действие на движение сейсмомассы датчика, так как при прохождении по катушке тока эта катушка взаимодействует с магнитным полем, причем сила этого взаимодействия

$$P(t) = Gi. \tag{17.8}$$

Например, катушка, замкнутая на сопротивление r ($E_{ц} = 0$), может выполнять в приборе роль демпфера, развивающего силу

$$P(t) = \frac{G^2\dot{z}}{R + r}. \tag{17.9}$$

Катушка вибродатчика, соединенная с катушкой, чаще называемой рамкой (см. ниже) гальванометра, имеющей к. э. м. с. $G_г$, угол поворота θ и сопротивление $R_г$, развивает силу

$$P(t) = \frac{G^2\dot{z} + GG_г\dot{\theta}}{R + R_г}. \qquad (17.10)$$

Эту силу необходимо учитывать при анализе колебаний сейсмомассы датчика.

В табл. 17.1 приведены характеристики серийных вибродатчиков с магнитоэлектрическими преобразователями, применяемых при измерении колебаний сооружений.

Вибродатчик ВЭГИК (рис. 17.5) [9] содержит механическую систему, состоящую из маятника с сейсмомассой *1*, вращающегося на крестовых шарнирах *2*, и пружины *3*, натяжение и геометрическое положение которой регулируется с помощью винтов *4* и *7*, благодаря чему собственная частота маятника при измерении вертикальных колебаний может быть установлена в пределах от 0,5 до 2,5 *гц*. При измерении горизонтальных колебаний пружина снимается, а для обеспечения устойчивости маятника корпус датчика устанавливается с легким (3—5°) наклоном от центра шарниров к центру тяжести сейсмомассы. Для регулирования наклона служат три установочных винта. Магнитоэлектрический преобразователь датчика состоит из катушки *6* с двумя обмотками, укрепленной на маятнике, и магнитной системы *5*, соединенной с корпусом. Из двух обмоток катушки одна, выполняющая роль демпфирующей, обычно замыкается накоротко или через небольшое сопротивление, а вторая соединяется с измерительным или регистрирующим устройством. Аналогично устроен и вибродатчик И-001 [22].

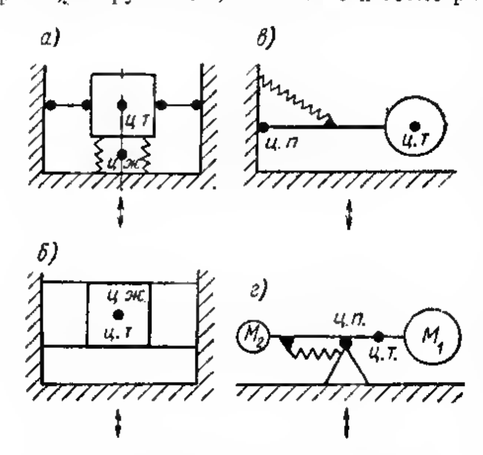


Рис. 17.6. Механические схемы вибродатчиков

а и *б* — с осевой подвеской; *в* — с маятниковой подвеской; *г* — с маятниковой подвеской, двухмассовая

Вибродатчик больших перемещений ВБП-III [16] *и датчик С-5с* [15] имеют оригинальную механическую систему, схема которой показана на рис 17.6, *г*. Расположение масс на жестком рычаге по разную сторону от точки опоры приводит к увеличению приведенной длины маятника с соответствующим увеличением амплитуды измеряемых колебаний и снижением собственной частоты и к.э.м.с.

Для маятников всех приборов такого типа приведенная длина $l_{пр}$ определяется по формуле

$$l_{пр} = \frac{\left(M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2\right)}{(M_1 l_1 - M_2 l_2)}. \qquad (17.11)$$

Датчики с маятниковой подвеской сейсмомассы, в которых кратчайшая линия, соединяющая центр тяжести массы с осью подвески, перпендикулярна направлению колебательного движения (рис. 17.6, *в* и *г*), имеют сравнительно низкие собственные частоты, но в большинстве случаев требуют частой регулировки положения равновесия маятника, что ограничивает применение таких

Таблица 17.1

Вибродатчики с магнитоэлектрическими преобразователями

Марка	К. э. м. с. *в·сек/м*	Собственная частота в *гц*	Сопротивление катушки активное в *ом*	Максимальная измеряемая амплитуда в *мм*	Габариты (длина×ширина×высота или диаметр×высота) в *мм*	Вес в *кг*	Изготовитель
			Маятниковая система подвески				
СМ-2	37+12***	0,35÷1,4	130+45***	3	230×167×145	5,5	ИФЗ
ВЭГИК	10÷30	0,7÷2	28+28*** 55+28*** 40+40***	1	300×150×120	9,5	Опытный завод Сиб. отделения АН СССР (Новосибирск)
И-001	12	1—2	35+35***	1	130×73×73	1,3	Завод «Виброприбор» (Кишинев)
ВБП-3	0,1	0,6	50	100	230×150×230	9,6	Опытный завод СО АН СССР (Новосибирск)
ВБП-П	0,05	0,5	20	200	290×180×150	10	Завод «Гидрометприбор» (Сафолово)
С-5-С	13+7***	0,2	90+90***	15	350×160×150	11	З-д «Контрольприбор» (Москва)
СГКМ	20	0,1÷1	600+100***	2,5	700×380×300	30	ИФЗ АН СССР
СВКМ	20	0,1÷1	600+100***	2,5	700×380×300	40	
НС-3**	60	2—4	320	1	82×100	1,2	Миниприбор СССР
СГКМ-3	60÷70	0,2÷1	40+40***	2,5	750×380×310	51	ИФЗ АН СССР
СВКМ-3	60÷70	0,2÷1	40+40***	2,5	750×380×310	57	
СГКД	3÷4+2÷3***	0,02÷0,15	25+20***	2,5	700×380×300	30	
СВКД	3÷4+2÷3***	0,03÷0,20	25+20***	2,5	700×380×300	40	

Продолжение табл. 17.1

Марка	К. э. м. с. $в \cdot сек/м$	Собственная частота в *гц*	Сопротивление катушки активное в *ом*	Максимальная измеряемая амплитуда в *мм*	Габариты (длина×ширина×высота или диаметр×высота) в *мм*	Вес в *кг*	Изготовитель
			Осевая система подвески				
ВИЛ-43А (Р37-12)	3	12÷500*	5	2	38×38×60	0,21	ЭПО ИМ АН УССР
ВИЛ-49А (Р37-12)	50	12÷500*	2000	2	38×38×60	0,21	
ВИЛ-63А (Р37-11)	5	10÷500*	5	3	56×56×60	0,52	
ВИЛ-69А (Р37-11)	100	10÷500*	4000	3	56×55×60	0,52	
СП-14**	65	34	300	1	48×110	0,65	Миниприбор СССР
СП-15**	70	10÷11	400	1	45×119	0,9	
СПМ-16**	70	28÷32	400	1	45×119	0,9	
СПМ-16А**	60	33÷35	189	1	45×130	1,1	
СПЭН-1**	50	10	210	1	74×100	1,6	
СПЭД-56М**	20	31	500	1	35×70	0,25	
СПЭД-52**	25	20	300	1	46×66	0,6	
СМД**	60	12	580	1	47×117	0,65	
С110	19	10	250	1	42×47	0,15	Уфимский з-д геофизического приборостроения
С120	19	20	250	1	42×47	0,15	
С130	19	30	250	1	42×47	0,15	
С205	32	5	230	1	46×75	0,5	
С210	32	10	230	1	46×75	0,5	
С220	32	20	230	1	46×75	0,5	
С230	32	30	230	1	46×75	0,5	

* Указаны пределы измеряемых частот.
** Данные по приборам ориентировочные.
*** Две катушки.

датчиков в местах, куда доступ в процессе измерений затруднен или невозможен. Разработаны способы дистанционной регулировки этих датчиков [11, 31], но в серийно выпускаемых датчиках они не применяются.

Датчики с маятниковой подвеской чувствительны также к вращательному компоненту вибрации. Менее чувствительны к вращательным компонентам датчики с так называемой осевой подвеской сейсмомассы, в которых центр тяжести массы и центр жесткости лежат на линии, совпадающей с направлением измеряемого колебательного движения (рис. 17.6, *а* и *б*). Однако собственные частоты датчиков с осевой подвеской относительно высоки: практически не ниже 6—10 *гц*.

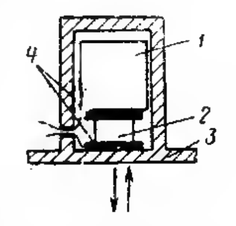


Рис. 17.7. Схема акселерометра с пьезоэлектрическим преобразователем

1 — сейсмомасса; *2* — пьезоэлемент; *3* — корпус; *4* — обкладки

Э. д. с., вырабатываемая магнитоэлектрическими датчиками, во многих случаях может быть измерена или зарегистрирована без усиления, благодаря чему измерительные схемы оказываются чрезвычайно простыми и надежными.

Пьезоэлектрические преобразующие элементы получили наибольшее распространение в датчиках ускорения, где они одновременно выполняют и роль упругого элемента механической системы (рис. 17.7). Технические характеристики этих датчиков приведены в [3].

Параметрические преобразователи в зависимости от параметров, изменение которых связано с изменением измеряемой механической величины, называют преобразователями омического сопротивления (или просто сопротивления), индуктивными или емкостными.

Преобразователи омического сопротивления широко применяют для измерения перемещений и деформаций. Наиболее распространены два основных вида преобразователей сопротивления — ползунковые (см., например, [1]), сопротивление которых меняется пропорционально перемещению ползунка по спирали, намотанной из провода либо по элементу, покрытому мастикой, обладающей повышенным электрическим сопротивлением, и **тензорезисторы** [7, 23], сопротивление которых меняется пропорционально деформации чувствительного элемента, изготовляемого из тензочувствительных металлов или полупроводников.

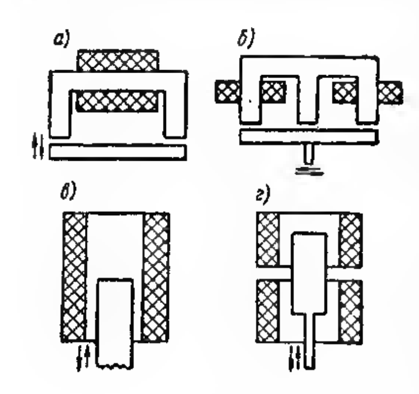


Рис. 17.8. Схемы индуктивных преобразователей

а — с переменным воздушным зазором; *б* — то же, дифференциального; *в* — с подвижным сердечником; *г* — то же, дифференциального

Индуктивные преобразователи [1, 3, 6, 8, 24, 29, 33] нашли довольно широкое применение благодаря простоте изготовления и надежности.

Преобразователь состоит из электрической катушки с сердечником-магнитопроводом. Магнитное сопротивление магнитной цепи катушки меняется пропорционально измеряемому перемещению (рис. 17.8).

Емкостные преобразователи [6, 8, 24] имеют обычно вид плоского конденсатора, емкость которого меняется пропорционально перемещению из-за изменения либо зазора, либо площади пластин, либо диэлектрической проницаемости.

17.3. Регистрирующие устройства

Наиболее широко распространены различные методы записи вибраций, связанные с нанесением на ленту видимых графиков перемещения, скорости, ускорения или других параметров колебательного процесса в функции от времени, которые затем могут быть просмотрены исследователем и обработаны с помощью линеек, сеток, палеток или специальных устройств для чтения и обработки виброграмм для получения необходимых количественных данных.

Запись с помощью карандаша, чернил или царапающей иглы применяется в механических приборах и в электрических приборах-самописцах [1], в которых также применяются нагреваемые перья для записи на восковом слое. Электрические самописцы в динамических исследованиях сооружений применяются пока довольно редко.

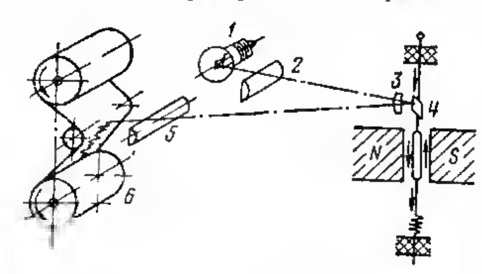


Рис. 17.9. Принципиальная схема светолучевого осциллографа

Для многоканальной записи электрических сигналов от электромеханических преобразователей вибродатчиков широко применяются светолучевые осциллографы [2, 4—6, 8, 17, 27, 29, 33].

Светолучевой магнитоэлектрический осциллограф (рис. 17.9) содержит зеркальный гальванометр *4*, зеркальце которого, поворачиваясь вместе с рамкой под влиянием протекающего через рамку электрического тока, отражает на движущуюся фотоленту *6* луч света, падающий на него от лампы *1* через конденсор *2*, линзы *3* и *5*.

В состав современных осциллографов общего назначения (табл. 17.2) входит от 4 до 30 гальванометров (каналов), что позволяет одновременно записывать на фотоленте соответствующее число процессов. Расстояние от зеркальца гальванометра до фотоленты называют оптическим плечом или длиной светового указателя. Оптическое плечо всех осциллографов в табл. 17.2 равно 300 *мм*. Фотолента, как правило, помещается в сменную светонепроницаемую кассету и протягивается электродвигателем (существуют несерийные осциллографы с пружинным приводом). Коробка передач позволяет регулировать скорость протяжки, а магнитная муфта — с большой точностью включать протяжку дистанционно. Некоторые кассеты позволяют применять фотоленты разной ширины. Применяются следующие виды фотолент: кинолента шириной 35 *мм* перфорированная, цветная и черно-белая; фотобумага осциллографная, марки РО, шириной 60, 100, 120, 200, 300 *мм*, причем бумага шириной 100 и 120 *мм* выпускается перфорированной и неперфорированной; фотобумага УФ с непосредственным почернением при применении в осциллографе ультрафиолетового осветителя, не требующая проявления и фиксирования; полупроводниковая электрографическая бумага ЭФО с немедленным проявлением в кассете; применяется со специальной электрографической кассетой.

Цветная фотолента может применяться в осциллографах со светофильтрами, что облегчает чтение пересекающихся виброграмм.

В большинстве осциллографов записываемые процессы могут наблюдаться визуально, благодаря тому, что часть светового луча от гальванометра отводится на вращающийся зеркальный барабан и от него — на экран из матового стекла. Зеркальный барабан дает развертку луча во времени, причем, регулируя скорость его вращения, можно подобрать наиболее удобную для наблюдения развертку.

---

[1] Н. В. Мартыненко, М. С. Шкабардня. Быстродействующие самопишущие приборы. «Приборы и системы управления», 1970, № 8.

Таблица 17.2

Таблица технических характеристик светолучевых осциллографов общего назначения

Марка	Число каналов	Тип гальванометра	Лента: тип (УФ, РО, КИНО)	Лента: ширина в *мм*	Лента: емкость кассеты в *м*	Лента: скорость протяжки в *мм/сек*	Магнитная система	Вид и напряжение тока питания в *в*	Габариты в *мм*	Вес в *кг*	Завод-изготовитель
Н102; Н102Т[5]	8	М0В2; Н135	КИНО, цветная и черно-белая	35	10	1—5 000	Индивидуальные постоянные магниты в гальванометрах	~127; 220; —24 с заменой двигателя на М1102-А	560×450× ×220	35	«Вибратор» (Ленинград)
Н105[1]; Н105Т[5]	12	М1012; М1013; М004	КИНО, РО, УФ	35; 60; 100; 120	25	0,5—10 000	М1062	~127; 220	530×280× ×310[4]	35[4]	
Н107[3])	12	М1012; М1013; М004	КИНО, РО, УФ	35; 60; 100; 120	25	0,5—2 500	М1062	~127; 220	528×280× ×308[4]	35[4]	
Н109[2,3])	20	М1012; М1013; М004	УФ, РО	120, 300	25, 100	12—2 500	М1062	~220	575×540× ×335[4]	51[4]	
Н004М	20	М1012; М1013; М004	РО	100 120; 150; 200	20	1—2 500	Постоянный магнит	=27	485×315× ×245	29	«Виброприбор» (Кишинев)
Н005М	6	М001; М1012	КИНО, РО	35; 60	20	1—2 500	То же	=27	465×200× ×245	19	
Н008М	12	М004; М1012	РО	60, 100; 120	20	1—2 500	»	=27	470×260× ×260	22	
Н010М	30	М004; М1012	РО	120; 150; 200; 280; 300	20	1—2 500	»	=27	465×245× ×425	37	
Н700	14	М001	РО	120	12	2,5—2 500	Постоянный магнит	=27	470×245× ×280	18	

[1] Комплект из осциллографа Н105, установленного на монтажном столе с магазинами шунтов и добавочных сопротивлений, имеет марку К-105 (общий вес 90 *кг*).

[2] Комплект из осциллографа Н109, установленного на монтажном столе с магазинами шунтов и добавочных сопротивлений, имеет марку К-109 (общий вес 145 *кг*).

[3] Нет визуального наблюдения регистрируемого процесса.

[4] Габариты и вес осциллографа указаны без блока питания. Блок питания типа П131 имеет габариты 385×260×200 *мм* и вес 16 *кг*.

[5] Вариант для тропических районов.

Таблица 17.3

Таблица технических характеристик осциллографических гальванометров

Тип	Частота собственных колебаний в гц	Рабочий диапазон частот в гц	Чувствительность в мм/ма·м	Постоянная по току в а·м/мм	Внутреннее сопротивление в ом	Внешнее сопротивление в ом	Тип успокоения	Диаметр (для гальванометрических вставок) в мм	Расположение контактов	Для каких осциллографов выпускается	Изготовитель
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
М001-1А	120	0—48	1 400	$7{,}2\cdot10^{-7}$	35±7	180***	Жидк.+Э-М	6	ОКВ	Н004; Н700	Завод «Виброприбор» (Кишинев)
М001-2	400	0—200	270	$3{,}7\cdot10^{-6}$	40±8	30***		6			
М001-3	1200	0—400	35	$2{,}9\cdot10^{-6}$	13±2	—	Жидкостное	6			
М001-4	2500	0—800	6	$1{,}7\cdot10^{-4}$	13±3	—		6			
М002*	30	2—200****	10 000	—	85	—	Э-М КЗ	6			
М009*	30±5	1,3—240****	15 000	—	80	—		6	КК	Н005; Н006; Н008; Н010; Н13; Н105; Н107; Н109	
М006-1,25	1,25	0—0,75	200 000	$5\cdot10^{-9}$	50	550**	Э-М	6			
М006-2,5	2,5	0—1,5	60 000	$2\cdot10^{-8}$	50	3000**		6			
М006-5	5	0—3	16 600	$6\cdot10^{-8}$	50	2000**		6			
М006-10	10	0—6	6 600	$1{,}5\cdot10^{-7}$	50	1000**		6			
М004-0,6	600	0—300	80	$1{,}25\cdot10^{-6}$	13±2	—	Жидкостное	6			
М004-1,2	1200	0—600	20	$5\cdot10^{-6}$	13±2	—		6			
М005-0,15	150	0—90	2 000	$5\cdot10^{-7}$	60	200**		6			
М005-0,3	300	0—180	500	$2\cdot10^{-6}$	60	80**		6			
М010-20	20	0—12	00 000	$0{,}17\cdot10^{-7}$	120	3000**	Э-М	6			
М010-40	40	0—24	14 300	$0{,}7\cdot10^{-7}$	120	1500**		6			
М010-80	80	0—48	7 150	$0{,}14\cdot10^{-6}$	60	800**		6			
М1012-150	160	0—90	2 000	$0{,}5\cdot10^{-6}$	60	200**		6			Завод «Вибратор» (Ленинград)
М1012-300	300	0—180	500	$2\cdot10^{-6}$	60	80**		6			
М1012-600	600	0—300	45	$2{,}2\cdot10^{-5}$	13	—	Э-М КЗ	6			
М1012-1200	1200	0—600	6,2	$1{,}6\cdot10^{-4}$	5	—		6			
М1013-600	600	0—400	120	$8{,}3\cdot10^{-6}$	50	700**	Жидк. + +Э-М	6			
М1013-1200	1200	0—700	30	$3{,}3\cdot10^{-5}$	50	300**		6			

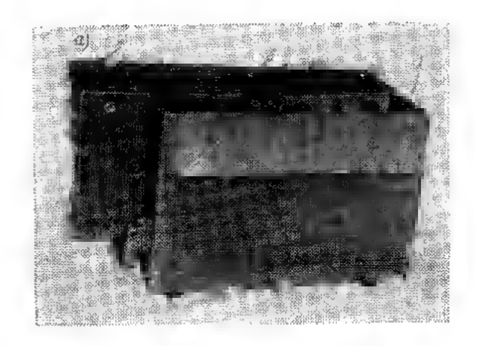
Тип	Частота собственных колебаний в *гц*	Рабочий диапазон частот в *гц*	Чувствительность в *мм/ма·м*	Постоянная по току в *а·м/мм*	Внутреннее сопротивление в *ом*	Внешнее сопротивление в *ом*	Тип успокоения	Диаметр (для гальванометрических вставок) в *мм*	Расположение контактов	Для каких осциллографов выпускается	Изготовитель
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
М0В2-IX	160	0—100	250	$4\cdot10^{-6}$	55	300**		—			
М0В2-Х	80	0—50	1 000	$1\cdot10^{-6}$	55	300**		—			
Н135-0,6	950	0—600	52	$19\cdot10^{-6}$	9	—		—			
Н135-0,9	1 400	0—900	20	$50\cdot10^{-6}$	9	—	Жидкостное	—	ГН	Н102	Завод «Вибратор» (Ленинград)
Н135-1,5	2 400	0—1500	6	$17\cdot10^{-5}$	9	—		—			
Н135-2	3 200	0—2000	2	$5\cdot10^{-4}$	4	—		—			
Н135-3	4 800	0—3000	1	$1\cdot10^{-3}$	4	—		—			
Н135-6	9 600	0—6000	0,16	$62\cdot10^{-4}$	2	—		—			
ГЭМЗ-53-0	620	0—310	—	$7\cdot10^{-6}$	52	50**		—			
ГЭМЗ-53-I	400	0—200	200	$4,2\cdot10^{-6}$	56	100**		—			
ГЭМЗ-53-II	200	0—100	1 000	$1\cdot10^{-6}$	56	400**		—	ОВКС	ОТ-24-65	Завод математических машин (Томск)
ГЭМЗ-53-III	130	0—70	2 000	$4,5\cdot10^{-7}$	56	400**		—			
ГЭМЗ-53-IV	70	0—35	10 000	$1,15\cdot10^{-7}$	44,5	400**		—			
ГЭМЗ-53-V	25	0—12	50 000	$2,5\cdot10^{-8}$	36	1 000**	Э-М	—			
ГБ-IV-В-1	30	0—15	50 000	$2\cdot10^{-8}$	58	1 200**		6			
ГБ-III-Б-1	1,25	0—0,6	260 000	$4\cdot10^{-9}$	64	6 000**		9,5			
ГБ-III-Б-2,5	2,5	0—1,25	67 000	$1,5\cdot10^{-8}$	60	3 000**		9,5	ОКВ	Н700; Н004	ОКБ ИФЗ АН СССР
ГБ-III-3	5	0—2,5	50 000	$2\cdot10^{-8}$	140	4 000**		9,5			

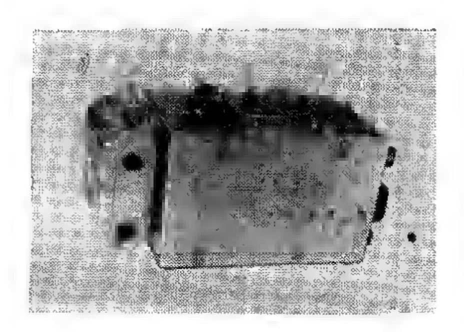
Обозначения: Э-М — электромеханическое на внешнем сопротивлении; Э-М КЗ — электромеханическое на короткозамкнутом каркасе рамки гальванометра; ОКВ — осевые штырьки концентрические, оба сверху; КК — кольцевые контакты на корпусе; ГН — гнезда в нижнем торце корпуса гальванометра; ОВКС — осевой штырек сверху и клемма в средней части корпуса.

* Интегрирующий гальванометр из комплекта К-001.
** Оптимальное при $D_2=0,65\div0,7$.
*** Критическое ($D_2=1$).
**** Рабочий диапазон частот указан для комплекта К-001.

Внешний вид нескольких светолучевых осциллографов показан на рис. 17.10.

Магнитные системы гальванометров, применяемых в осциллографах, могут быть либо индивидуальными для каждого гальванометра, либо общими для всех гальванометров осциллографа. В последнем случае общая магнитная система обычно содержит поворотные полюсные наконечники с гнездами для гальванометров — вставок.





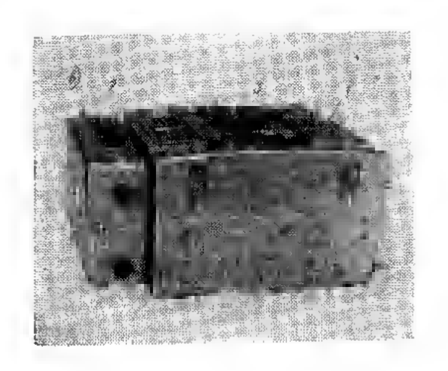


Рис. 17.10. Светолучевые осциллографы

а — Н105; *б* — Н700; *в* — Н004; *1* — корпус; *2* — кассета; *3* — экран визуального наблюдения

Технические характеристики некоторых наиболее употребительных гальванометров, применяемых в осциллографах, приведены в табл. 17.3. Рамка гальванометра на подвесках представляет собой механическую колебательную систему с собственной частотой f_2 и затуханием D_2, совершающую вращательные колебания под действием проходящего через рамку тока i. Дифференциальное уравнение движения рамки:

$$\ddot{\theta} + 4\pi D_2 f_2 \dot{\theta} + (2\pi f_2)^2 \theta = S (2\pi f_2)^2 i, \tag{17.12}$$

где S — чувствительность гальванометра (4-я графа табл. 17.3).

Подбирая определенным образом параметры гальванометра, можно получить отклонение луча, пропорциональное: току, если $(2\pi f_2)^2\theta \gg \ddot{\theta} + 4\pi D_2 f_2 \dot{\theta}$, интегралу от тока во времени, если $4\pi D_2 f_2 \dot{\theta} \gg \ddot{\theta} + (2\pi f_2)^2\theta$, двукратному интегралу от тока по времени, если $\ddot{\theta} \gg 4\pi D_2 f_2 \dot{\theta} + (2\pi f_2)^2\theta$.

Рабочий диапазон частот в 3-й графе табл. 17.3 указан для случаев, когда гальванометры имеют жидкостное успокоение, либо для гальванометров с электромагнитным успокоением, при условии, что сопротивление внешней цепи гальванометра будет не менее оптимального или 1,5 критического, указанного в 7-й графе табл. 17.3. При этом отклонение луча пропорционально току.

Гальванометры для работы в режиме однократного интегрирования подбираются с собственными частотами, лежащими в пределах диапазона измеряемых частот или близкими к ним, и включаются на внешнее сопротивление, во много раз меньшее критического. Гальванометр М002, выпускаемый специально как интегрирующий, должен иметь затухание, равное 20, что обеспечивается главным образом за счет вихревых токов в металлическом каркасе рамки.

Методология расчета амплитудно- и фазочастотных характеристик вибрографов, образованных путем соединения магнитоэлектрического датчика с гальванометром, изложена в литературе [5, 12, 20, 21].

Недостатком осциллографической регистрации является то, что при всей наглядности осциллограмм обработка их чрезвычайно трудно поддается автоматизации.

17.4. Методы измерения колебаний сооружений и конструкций

Экспериментальное определение амплитудно- и фазочастотных характеристик вибрографа может быть выполнено на тарировочном вибростенде.

Наибольшее распространение для тарировки вибрографов в диапазоне частот 0,1—100 *гц* получили эксцентриковые и электродинамические вибростенды, создающие гармонические колебания рабочего стола с постоянной амплитудой перемещения (скорости, ускорения) в определенном диапазоне частот [2, 32]. В эксцентриковых стендах вращательное движение вала привода преобразуется в возвратно-поступательное движение вибростола с помощью эксцентрикового механизма (иногда с применением уменьшительных рычагов). В электродинамических стендах используется мощный электродинамический преобразователь, питаемый переменным током, частота и сила которого могут изменяться заданным образом.

Как в СССР, так и за рубежом промышленностью выпускаются в большом ассортименте испытательные вибростенды, предназначенные для испытаний приборов и оборудования на вибропрочность и виброустойчивость. Использование этих стендов для тарировки вибрографов возможно, хотя при этом возникает ряд трудностей, обусловленных конструкцией испытательных стендов: недостаточно точный контроль амплитуды, непостоянство амплитуды перемещения при изменении частоты, иногда значительные нелинейные искажения и др. Поэтому при выборе вибростендов для целей тарировки вибрографов предпочтение должно быть отдано специально для этого предназначенным тарировочным вибростендам (табл. 17.4).

При экспериментальном определении на вибростенде амплитудно-частотной характеристики датчик вибрографа устанавливается на рабочем столе вибростенда. Крепление вибродатчика к столу с горизонтальной поверхностью необходимо лишь в случае, если расчетное значение амплитуды ускорения при тарировке превысит 0,9 g для вертикального вибростенда и 0,2 g для горизонтального вибростенда.

У вибродатчиков с регулируемой собственной частотой перед тарировкой она устанавливается равной (с точностью 2%) принятому номинальному значению f_1. В дальнейшем в процессе измерения вибрации сооружений принятый номинал f_1 сохраняется.

Процесс работы на тарировочном вибростенде заключается в ступенчатом изменении частоты колебаний рабочего стола, измерении амплитуды его перемещения (скорости, ускорения) и осциллографировании показаний тарируемого вибрографа. Надлежащий выбор скорости развертки и длительности записи должен обеспечить точность определения частоты по осциллограмме не менее 1% при экономном расходовании осциллографной бумаги. Обычно время осциллографирования принимают равным 10—20 периодам колебаний.

По окончании работы на вибростенде производится обработка полученных осциллограмм (см. 17.6). При построении амплитудно-частотной характеристики по оси абсцисс откладывается частота или период вынужденных колебаний, а по оси ординат — величина, характеризующая чувствительность прибо-

Таблица 17.4

Технические характеристики некоторых вибростендов

Марка	Назначение	Тип стенда	Угол между направлением колебаний и вертикалью	Диапазон частот колебаний в *гц*	Диапазон амплитуд колебаний в *мкм*	Коэффициент нелинейных искажений в %	Максимально допустимое ускорение *g*	Размеры рабочего стола в *см*	Максимальная нагрузка на рабочий стол в *кг*	Габариты наибольшего блока в *м*	Общий вес стенда в *кг*	Изготовитель
ВУТ-300/6	Тарировочный	Эксцентриковый	0°, 90°	5—100*	10—150	Не нормируется	6	20×17	6	0,85×0,6×0,4; 2,5×0,8**	458	Завод «Виброприбор» (Таганрог)
ВИП	То же	То же	0°, 90°	5—81	100—900	То же	Не нормируется	15×16	12	0,69×0,42×0,38; 0,9×0,6**	120	Опытный завод СО АН СССР (Новосибирск)
ОИВУ-2	»	Электродинамический	0—360°	1—100	5—5000	1,5—10	1	⌀ 30 и 4,5	3	1×1×1,5	1500	ВНИИМ им. Д. И. Менделеева (Ленинград)
ОВУ-1	»	То же	0—360°	25—10 000	5—500	1,5—5	25	⌀ 30 и 4,5	0,5	0,9×0,8×1,25	1000	То же
СОВКУ-68, электродинамический вибратор***	»	»	0°, 30°, 60°, 90°	1—300	5—500	3—10	0,01—1	⌀ 15	2	1,13×0,68×0,98	623	Завод «Виброприбор» (Таганрог)
ВЭДС-10А	Испытательный	»	0—90°	5—5000	До 6000	Не более 8	17	⌀ 8	1,9	0,46×0,55×1,44	220	То же
ST600	То же	»	0—90°	20—600	» 8000	5	10	⌀ 25 и 12	5	1,1×0,71×0,92	700	Geräte und Regler Werke (GRW) Тельтов (ГДР)
ST1000	»	»	0—90°	20—1000	» 8000	5	12	⌀ 25 и 12	15	1,2×0,9×1,6	700	То же

* При использовании специального контрпривода частотный диапазон расширяется до 0,2 *гц*.

** Размеры фундамента в плане.

*** Завод поставляет комплект СОВКУ — 68, в который входит пять стендов, перекрывающих диапазон частот 1 *гц* — 50 *кгц*.

ра. Для вибрографов — это увеличение (отношение амплитуды записи на осциллограмме к амплитуде перемещения рабочего стола вибростенда). Для велосиграфов и акселерографов — это отношение амплитуды записи на осциллограмме к амплитуде соответственно скорости и ускорения колебаний рабочего стола.

В зависимости от требований к точности измерения и характера обработки осциллограмм за *рабочий диапазон частот вибрографа* принимается интервал, на котором амплитудно-частотная характеристика отклоняется не более чем на 5÷10% от своего среднего значения.

Для снятия фазочастотной характеристики вибрографа необходимо измерять разность фаз колебаний рабочего стола вибростенда и показаний вибрографа [8].

Исследованию колебаний сооружения или строительной конструкции должно предшествовать составление программы испытаний. В программе указывается: цель испытаний, типы виброизмерительной аппаратуры и условия ее работы (синхронность записей, необходимые служебные сигналы и отметки и т. п.), точки и направления измерения вибрации, необходимые режимы источников вибрации (конечно, если эти режимы можно регулировать) и т. д.

Выбор аппаратуры для решения той или иной виброметрической задачи почти всегда встречает определенные трудности, обусловленные главным образом недостатком сведений о параметрах измеряемой вибрации и неуниверсальностью технических характеристик вибрографов. В большинстве случаев основными критериями при выборе аппаратуры являются: соответствие рабочего диапазона частот вибрографа спектру измеряемых вибраций[1], соответствие амплитудного диапазона вибрографа наибольшим ожидаемым амплитудам перемещения (скорости, ускорения) объекта; надлежащая чувствительность вибрографа, которая должна обеспечить определение ординат осциллографической кривой с точностью не менее 2—3%. В зависимости от конкретных задач исследований существенными могут стать и другие требования: вес датчика, возможность его дистанционной регулировки и пр.

При проведении измерений используются различные схемы расположения датчиков. Часто придерживаются, например, следующей схемы испытаний. Вначале производится запись колебаний при каком-то определенном (по возможности наиболее типичном) динамическом воздействии и при таком расположении вибродатчиков, которое обеспечивает выявление формы колебаний сооружения или конструкции.

Для полной характеристики колебательного движения твердого тела (например, жесткого массива на упругом основании) необходимо иметь синхронную запись колебаний по трем направлениям в каждой из трех по возможности наиболее удаленных друг от друга точек, не лежащих на одной оси. Таким образом, при решении данной задачи требуется минимум девять вибродатчиков. При специальной расстановке датчиков число их может быть уменьшено до шести — восьми [8]. Для более легкого разделения колебаний твердого тела на компоненты при обработке осциллограмм удобно ставить три вибродатчика, ориентированных по осям координат, в непосредственной близости от центра тяжести тела. Однако это далеко не всегда технически осуществимо. При исследованиях колебаний, связанных с деформацией конструкций (например, изгибом балки, пластины и пр.), обязательна установка вибродатчиков на опорных частях конструкции.

Этот этап исследований обычно дает возможность установить точки и направления регистрации колебаний, наиболее характерные для данного динамического процесса. Установив приборы в указанных характерных точках, получают зависимости параметров вибрации (амплитуд, частот или других характеристик) от режимов источников вибрации.

Для выявления формы колебаний конструкции необходимо иметь синхронную запись вибрации иногда в довольно значительном числе точек, зачастую

---

[1] Располагая рассчитанной или экспериментально определенной амплитудно-частотной характеристикой, можно в относительно простых случаях определить кинематические параметры измеряемых колебаний и за пределами рабочего диапазона частот вибрографа, хотя и с меньшей точностью.

превышающем число измерительных каналов. В таких случаях записи делают последовательно, переставляя все вибродатчики, кроме одного, двух или трех (в зависимости от числа регистрируемых компонентов колебаний) контрольных.

Иногда требуется измерить перемещение некоторой точки конструкции относительно другой точки, также испытывающей колебания (например, середины пролета балки относительно опоры). Это может быть достигнуто *методом спаренных датчиков,* который заключается в том, что на один гальванометр включаются последовательно два датчика, одинаково ориентированные и установленные в этих точках. Датчики включаются «на разность», т. е. так, чтобы при движении датчиков в одну сторону наведенные в них э. д. с. вычитались. Для снижения погрешностей измерения необходима достаточно хорошая идентичность спариваемых датчиков. Тарировка измерительного канала, предназначенного для работ по методу спаренных датчиков, производится следующим образом: один из датчиков устанавливается на тарировочном стенде и подвергается вибрации, а второй находится на неподвижном основании.

При изучении волновых процессов в основаниях сооружений и в строительных конструкциях часто бывает необходимо замерить скорость распространения колебаний, а также определить характеристики затухания их с расстоянием. С этой целью несколько одинаково ориентированных вибродатчиков устанавливают по створу, совпадающему с направлением распространения волны, причем расстояние между датчиками из соображения удобства фазовой корреляции принимается не более $^1/_4$ длины волны, если позволяют размеры объекта.

При размещении вибродатчиков на сооружении необходимо следить за строгой ориентировкой их в направлении принятых осей координат. Для обеспечения однозначности интерпретации записей при изучении формы колебаний необходимо также придерживаться определенной системы расположения датчика относительно положительного и отрицательного направления соответствующей координатной оси.

Устанавливать вибродатчики желательно на практически горизонтальных поверхностях. В этом случае датчик крепится к испытываемой конструкции лишь в том случае, если расчетное значение наибольшего ускорения колебаний конструкции превышает $0{,}2g$.

Кроме отметок времени, обязательных для каждой осциллограммы, часто приходится наносить на осциллограмму некоторые специальные отметки.

Если при измерениях используется более одного осциллографа, необходима их синхронизация. Существует много способов синхронизации. Часто для этой цели используется по одному каналу каждого осциллографа, на который подается общий сигнал.

В некоторых случаях (например, при динамических испытаниях конструкций вибромашиной, при балансировке машин с вращающимися частями и пр.) на один из гальванометров подается сигнал, соответствующий моменту прохождения ротора через определенное положение. Изготовление соответствующего датчика сигнала не представляет трудностей [24].

В других случаях весьма желательно иметь на осциллограмме отметку начала процесса, например момента взрыва, если исследуются колебания сооружений при взрывах. Удобным приспособлением для получения такой отметки является петля из провода, надеваемая на заряд и соединенная последовательно с источником постоянного тока, омическим сопротивлением и гальванометром.

Оптимальная длительность осциллографирования стационарных процессов может, вообще говоря, варьироваться в очень широких пределах и определяется в основном характером и частотным составом исследуемых процессов. В случае периодических колебаний рекомендуется осциллографировать от 10 до 20 полных периодов с тем, чтобы можно было учесть нерегулярные отклонения кривой [13].

При стационарных случайных процессах оптимальное время осциллографирования определяется спектральными характеристиками исследуемых процессов и требуемой точностью измерений [12а, 19].

При больших расстояниях между датчиками и осциллографом серьезное

внимание следует обратить на организацию связи (телефонной, визуальной, радио) между оператором, ведущим запись вибрации, лицом, в ведении которого находится изменение режимов работы оборудования, возбуждающего динамические нагрузки, и другими участниками испытаний.

Перед измерениями обязательно должна производиться проверка и настройка аппаратуры на объекте измерений. При проверке и настройке, а также в процессе измерений следует обратить внимание на следующие моменты.

При использовании низкочастотных вибродатчиков с регулируемым периодом собственных колебаний (например, ВЭГИК, И-001 и др.) необходимо тщательно следить за тем, чтобы период собственных колебаний датчика всегда был равен принятому значению. В большинстве случаев достаточна точность установки периода $\pm 5\%$.

Все элементы виброизмерительного тракта (вибродатчики, каналы аттенюатора, гальванометры и пр.) должны иметь одинаковую строго определенную полярность, которая соблюдается при их электрическом соединении.

После установки вибродатчиков на объекте и до начала испытаний полезно лишний раз убедиться в одинаковой полярности вибрографов путем их «прокачки»[1]: подвесной системе каждого датчика дается от руки легкий толчок в направлении той оси, по которой ориентирован датчик, а по осциллографу наблюдают за перемещением лучей гальванометров. При правильной полярности начальное перемещение лучей всех гальванометров происходит в одном и том же направлении.

Перед началом основного цикла измерений следует снять одну или несколько пробных осциллограмм, в процессе получения которых проверяется весь виброизмерительный комплект в целом, подбирается накал осветителей, скорость развертки, наиболее подходящие коэффициенты увеличения вибрографов и т. п.

Полезно до начала основного цикла измерений провести так называемую «запись на идентичность»: все датчики виброизмерительного комплекта одинаково ориентируются и устанавливаются по возможности близко друг к другу на небольшой площадке исследуемого объекта, в пределах которой изменение параметров колебаний можно считать несущественным. Запись ведется при одинаковой чувствительности всех вибрографов. В хорошо подготовленном виброизмерительном комплекте фазовые сдвиги между каналами практически отсутствуют, а различия в амплитудах колебаний по отдельным записям должны быть небольшими (в пределах разброса чувствительности вибрографов).

Условия проведения испытаний рекомендуется записывать в журнале в табличной форме.

Сразу после фотообработки и сушки осциллограмм на них делаются надписи, соответствующие записям в журнале. На осциллограмме указывают: место проведения испытаний (завод, цех, объект и т. д.), дату, порядковый номер осциллограммы, время (часы и минуты) начала осциллографирования, условия испытаний (режимы источников вибрации и пр.), период отметок времени. Против каждой осциллографической кривой отмечают: порядковый номер гальванометра[2], тип[3] и номер вибродатчика, место установки датчика, направление измеряемых колебаний, коэффициент загрубления и, в случае необходимости, другие данные.

Если одной из задач испытаний является определение формы колебаний сооружения или конструкции, то должна быть установлена и соответствующим образом обозначена на осциллограмме полярность вибрографов: например, «перемещение луча на осциллограмме вверх соответствует перемещению объекта в положительном направлении оси x, y или z». Эти обозначения удобно делать с помощью условных знаков.

---

[1] Эту операцию целесообразно выполнять лишь при использовании низкочастотных вибродатчиков: ВЭГИК, И-001 и др.

[2] В журнале перед началом испытаний записывают заводские номера гальванометров; в дальнейшем отмечают все случаи замены гальванометров.

[3] Если при испытаниях используются вибродатчики нескольких типов.

17.5. Испытания сооружений и конструкций специальными динамическими нагрузками

Для определения динамических характеристик (собственных частот, декрементов колебаний) сооружения или его какого-либо элемента прибегают к возбуждению следующих видов колебаний [1]:

а) гармонических колебаний, частота которых меняется в достаточно широком диапазоне; в результате испытаний получают амплитудно- и фазочастотные характеристики[2] конструкции для каждой исследуемой формы колебаний;

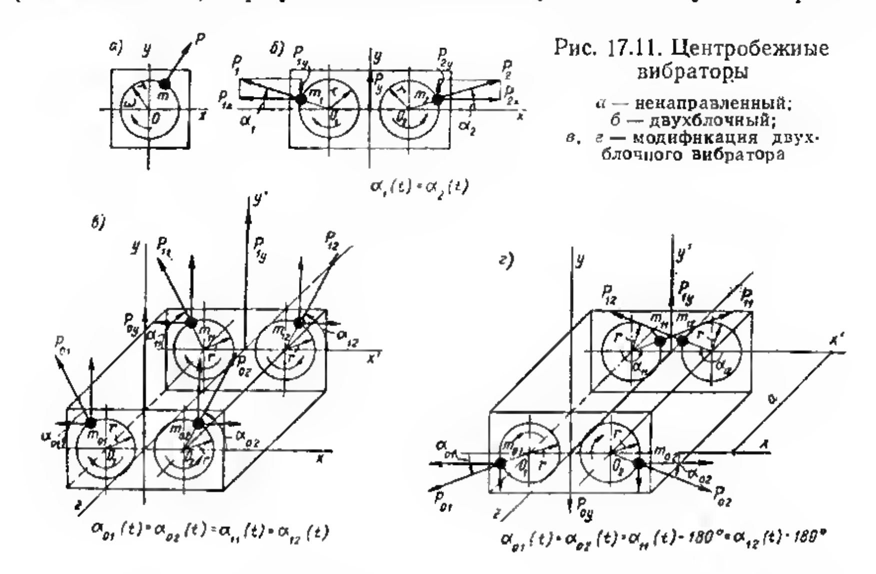


Рис. 17.11. Центробежные вибраторы

а — ненаправленный; *б* — двухблочный; *в*, *г* — модификация двухблочного вибратора

б) собственных колебаний, возбуждаемых ударом или начальным смещением конструкции; динамические характеристики конструкции определяются в этом случае известными методами из полученной записи собственных колебаний;

в) колебаний в переходном режиме при пуске (остановке) оборудования или специального возбудителя гармонических колебаний; результаты испытаний позволяют приближенно определить значения собственных частот.

Для возбуждения вынужденных грамонических колебаний применяются **центробежные вибраторы (вибрационные машины)**.

Ненаправленный вибратор (рис. 17.11, *а*). При вращении внецентренно расположенной массы m вокруг оси O с круговой частотой ω возникает центробежная сила $P=mr\omega^2$, проекции которой на оси x и y изменяются во времени по гармоническому закону.

Двухблочный вибратор (рис. 17.11, *б*). Две равные массы m_1 и m_2, кинематически связанные между собой так, что в любой момент времени углы $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ равны, вращаются вокруг осей O_1 и O_2 в противоположные стороны. Вследствие этого проекции на ось x центробежных сил P_1 и P_2 равны, но про-

---

[1] В некоторых случаях динамические характеристики конструкций могут быть приближенно определены из записей ее колебаний под действием эксплуатационной нагрузки.

[2] Чаще ограничиваются только амплитудно-частотными характеристиками.

тивоположны по направлению и, следовательно, проекция равнодействующей $P_x(t)=0$, а проекция равнодействующей $P_y(t)$ изменяется по закону

$$P_y(t) = 2mr\omega^2 \sin \omega t, \quad (m = m_1 = m_2). \tag{17.13}$$

Модификацией двухблочного вибратора является вибратор, показанный на рис. 17.11, *в* и *г**. Он имеет две пары внецентренно расположенных масс, вращающихся вокруг осей O_1 и O_2. Массы m_{01} и m_{02} расположены в плоскости xy, а массы m_{11} и m_{12} в плоскости $x'y'$. Этот вибратор может служить источником как знакопеременной силы, так и знакопеременного момента.

При взаимном расположении масс, показанном на рис. 17.11, *в* (в любой момент времени $\alpha_{01}=\alpha_{02}=\alpha_{11}=\alpha_{12}$), работа вибратора принципиально не отличается от работы двухблочного вибратора. Если же, сохранив кинематическую связь масс m_{01} и m_{02}, переместить массу m_{11} на 180° относительно массы m_{01}, а массу m_{12} — на 180° относительно массы m_{02}, то при работе вибратора (рис. 17.11, *г*) проекция силы $P_{0y}(t)$ в каждый момент времени равна проекции силы $P_{1y}(t)$, но имеет обратный знак. Поэтому рассматриваемый вибратор создает в плоскости yz знакопеременный момент

$$M(t) = 2mra\omega^2 \sin \omega t, \quad (m = m_{01} = m_{02} = m_{11} = m_{12}). \tag{17.14}$$

Одной из важнейших характеристик вибраторов, определяющей величину возбуждаемой силы, является кинетический момент

$$M_к = \Sigma \omega m_i r_i, \tag{17.15}$$

$m_i r_i$ — кинетический момент массы m_i, расположенной с эксцентрицитетом r_i относительно оси вращения.

Простейший ненаправленный вибратор можно изготовить из электродвигателя, внецентренно насадив на его вал маховик.

Двухблочные вибраторы делаются как с постоянным, так и с регулируемым кинетическим моментом.

Для определения динамических характеристик конструкций с помощью вибратора необходимо изменять в широких пределах его число оборотов. Поэтому в электроприводе используется обычно электродвигатель постоянного тока в комплексе с агрегатом Леонарда, что обеспечивает возможность изменения числа оборотов вибратора в 15—20 раз. Вибратор соединяется с электродвигателем через клиноременную передачу, гибкий вал или, в редких случаях, посредством общего вала.

Отечественной промышленностью не выпускаются вибраторы, специально предназначенные для динамических испытаний сооружений и строительных конструкций. Поэтому организации, проводящие такие испытания, обычно используют специально изготовленные вибраторы.

Метод вынужденных колебаний, применяемый с целью определения динамических характеристик сооружений и конструкций, имеет ряд особенностей.

Место установки вибромашины на конструкции определяется изучаемой формой колебаний (см. п. 4.3). Чем ближе расположена вибромашина к узлу, тем меньше будут амплитуды колебаний соответствующей формы.

Большое значение имеет закрепление вибратора на конструкции. Для соединения вибратора с железобетонным элементом небольшой толщины можно охватить конструкцию хомутом или пропустить через отверстия в конструкции анкерные болты. Если же эти способы неприменимы, то анкеры необходимо соединить с основной арматурой (по возможности без сварки). Хотя двухблочные вибраторы имеют очень хорошую (теоретически идеальную) характеристику направленности, тем не менее следует предусматривать анкеры или другие приспособления, которые препятствовали бы раскачке вибратора в направлениях, перпендикулярных направлению действия основной силы.

Амплитуды колебаний конструкции при испытаниях должны быть такими, чтобы, во-первых, не была нарушена нормальная работа конструкции, во-вторых, эти колебания могли быть зарегистрированы с достаточной точностью вибрографами и, в-третьих, помехи (микросейсмы) не повлияли существенно на

* Впервые применен Н. В. Вешняковым.

качество записей. Если кинетический момент вибратора регулируется, то испытание рекомендуется начинать установив наименьший $M_к$, а затем постепенно его увеличивать.

Поскольку кинетический момент вибратора известен, нетрудно определить для каждой частоты ω амплитуду возмущающей силы или момента по формулам (17.13) или (17.14). Далее вычисляются амплитудно-частотные характеристики $A/P = f(\omega)$ или $A/M = f_1(\omega)$, где A, P и M — амплитуды соответственно перемещения конструкции, возбуждающей силы и возбуждающего момента.

Для возбуждения вынужденных колебаний конструкции в переходном режиме часто применяют ненаправленный вибратор, образованный электродвигателем переменного тока и маховиком, внецентренно насаженным на его вал. Запись вибрации производится на выбеге электродвигателя после отключения его от сети. Электродвигатель следует выбирать с таким расчетом, чтобы его частота вращения в стационарном режиме была больше значений измеряемых собственных частот, а выбег происходил достаточно продолжительное время — порядка нескольких минут.

При проведении динамических испытаний сооружений и конструкций **методом собственных колебаний**, возбуждаемых ударом или начальным смещением, необходимо иметь в виду следующее:

а) в этом случае практически не удается уловить высшие формы колебаний, а если и удается, то не более одной гармоники;

б) при испытаниях многопролетной конструкции возникают колебания с частотой, близкой к частоте собственных колебаний соответствующей однопролетной конструкции; истинные собственные частоты многопролетной конструкции могут быть выявлены лишь при гармоническом возбуждении;

в) в месте удара конструкцию следует защищать прокладкой из дерева или из другого достаточно мягкого материала; такая прокладка предохраняет поверхность конструкции от повреждения и уменьшает интенсивность высокочастотных колебаний, возникающих в материале конструкции при ударе;

г) при возбуждении колебаний начальным смещением конструкция соединяется через трос с лебедкой, воротком и т. п.; в силовую линию (трос) включается элемент, с помощью которого можно быстро снять усилие, приложенное к конструкции; таким элементом может быть, например, струна, перекусываемая после достижения определенного натяжения; существуют конструкции специальных механических сбрасывателей, позволяющих практически мгновенно разорвать силовую линию;

д) во время испытаний контролируются амплитуды перемещения конструкции, которые назначаются исходя из тех же соображений, что и при выборе амплитуд колебаний при гармоническом возбуждении.

17.6. Методика обработки результатов измерений

Обработка осциллограмм начинается с определения масштабов записи: горизонтального (масштаба времени) и вертикального. Временной масштаб легко определяется по маркам времени, имеющимся на осциллограмме. Вертикальный масштаб определяется по рабочему участку амплитудно-частотной характеристики данного вибрографа (см. п. 17.1) с учетом загрубления, которое использовалось при осциллографировании.

Определение по осциллографической кривой частоты и амплитуды гармонических колебаний, а также фазового сдвига не представляет трудностей. С целью повышения точности определения частоты рекомендуется брать для обработки участок осциллограммы, соответствующий нескольким периодам колебаний. Амплитуда перемещения (скорости, ускорения)

$$A = \frac{2A_{осц}\,\beta}{2V(f)}, \qquad (17.16)$$

где $2A_{осц}$ — двойная амплитуда (размах) осциллографической кривой; $V(f)$ — значение амплитудно-частотной характеристики вибрографа на частоте f; β — коэффициент загрубления.

Если частота f находится за пределами рабочего диапазона частот вибрографа, то для определения амплитуды гармонических колебаний можно воспользоваться соответствующей ветвью амплитудно-частотной характеристики.

Записи колебаний сооружений и конструкций, возникающих под действием источника гармонической нагрузки, например машины с неуравновешенным ротором, лишь в очень редких случаях не отличимы от синусоиды. Как правило, они в большей или меньшей мере искажены вследствие действия различных случайных факторов. Если эти искажения невелики и амплитуда колебаний изменяется незначительно, то размах $2A_{осц}$ можно определить как среднее арифметическое из нескольких замеренных значений.

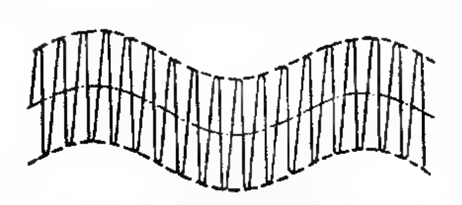


Рис. 17.12. Пример обработки методом огибающих записи суммы двух гармонических колебаний разной частоты

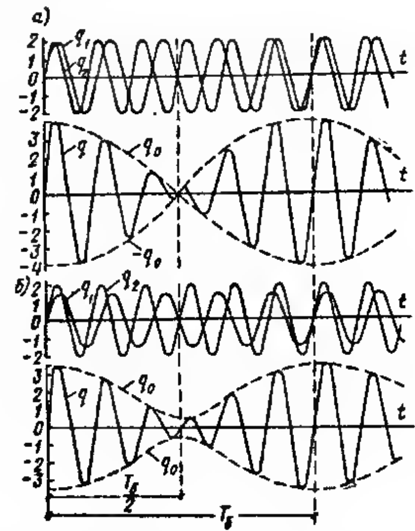


Рис. 17.13. Биения. Сложение колебаний [8]

а — $q_1=2\sin 5t$ и $q_2=2\sin 6t$; *б* — $q_1=1{,}5\sin 5t$ и $q_2=2\sin 6t$

Для **суммы двух гармонических колебаний разной частоты** следует рассмотреть два характерных случая:

1) периоды колебаний значительно отличаются друг от друга; в этом случае, соединяя плавной линией максимумы (или минимумы) осциллографической кривой, получают *огибающую* (рис. 17.12); период и амплитуда низкочастотной составляющей определяются по огибающей, а период и амплитуда высокочастотной составляющей — по участкам самой осциллографической кривой, соответствующим минимумам или максимумам огибающей;

2) периоды колебаний мало отличаются друг от друга (*биения*).

Если складываются два гармонических колебания:

$$q_1 = q_{a1}\cos(\omega t + \varepsilon); \quad q_2 = q_{a2}\cos(\omega + \Delta\omega)\,t, \tag{17.17}$$

причем $\Delta\omega \ll \omega$, то суммарное колебание выражается зависимостью (рис. 17.13)

$$q = q_a\cos(\omega t + \psi), \tag{17.18}$$

где

$$q_a = \sqrt{q_{a1}^2 + q_{a2}^2 + 2q_{a1}\,q_{a2}\cos(\Delta\omega t - \varepsilon)}\,; \tag{17.19}$$

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}\frac{q_{a1}\sin\varepsilon + q_{a2}\sin\Delta\omega t}{q_{a1}\cos\varepsilon + q_{a2}\cos\Delta\omega t}\,. \tag{17.20}$$

Обработка записей биений производится с учетом следующих формул и правил (см. рис. 17.13).

Частота биений

$$f_б = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{T_б}, \qquad (17.21)$$

где $T_б$ — *период биений,* определяемый по *огибающей* q_0.

Расстояние между огибающими в *горбе* $2q_{макс}$ равно сумме двойных амплитуд составляющих:

$$2q_{макс} = 2(q_{a1} + q_{a2}). \qquad (17.22)$$

Расстояние между огибающими в *талии* $2q_{мин}$ равно разности двойных амплитуд составляющих:

$$2q_{мин} = 2|q_{a1} - q_{a2}|. \qquad (17.23)$$

В общем случае осциллограмма суммы двух гармонических колебаний может иметь довольно сложную форму. Для определения периода, амплитуды и фазовых углов составляющих может оказаться полезным сравнение экспериментальной кривой с известными формами [8, 13].

При **периодических колебаниях с числом гармоник более двух (полигармонических колебаниях)** в большинстве случаев по осциллографической кривой можно сравнительно легко определить полный размах колебаний по разнице между максимальной и минимальной ординатами[1], а также основную частоту[2].

Для разложения заданной осциллографической кривой на гармонические составляющие и определения их периодов, амплитуд и фазовых углов применяется гармонический анализ [8, 13].

Для правильной интерпретации осциллограмм **затухающих гармонических колебаний** (в частности, для определения истинной амплитуды и времени первого отклонения) необходимо учитывать амплитудные и фазовые искажения, вносимые аппаратурой [5, 6, 8, 17].

В случае если отношение соседних амплитуд остается приблизительно постоянным, логарифмический декремент колебаний определяется по формуле (3.3). Для определения частоты колебаний и декремента не следует использовать первый экстремум записи.

При **колебаниях типа стационарного случайного процесса** объективной количественной характеристикой конкретной осциллографической кривой (реализации стационарного случайного процесса) является размах колебаний, т. е. разность между максимальной и минимальной ординатами кривой. Однако эта характеристика недостаточно устойчива (величина размаха зависит от длины осциллограммы), а главное, она дает недостаточную информацию для анализа колебаний сооружения.

Обработка реализаций стационарных случайных процессов производится с привлечением методов корреляционного анализа [12а, 18]*.

На практике нередко встречается **наложение колебательных процессов различных типов** из числа рассмотренных выше. Часто колебания, происходящие по детерминированному закону, осложнены колебаниями случайного характера. В качестве примера на рис. 17.14 приведена осциллограмма сложного колебательного процесса, в котором на гармонические колебания наложены случайные колебания с относительно высокой преобладающей частотой и небольшой амплитудой. Если интенсивность случайной составляющей невелика (наибольший размах колебаний, по крайней мере, на порядок меньше двойной амплитуды гармонических колебаний) и не предъявляются повышенные требования к точности обработки, то амплитуда и частота гармонической составляющей могут быть определены по осредняющей осевой линии (рис. 17.14, *в*), а размах случайных колебаний может быть оценен по участкам записи в райо-

---

[1] При условии, что все гармоники лежат в пределах рабочего диапазона частот вибрографа.

[2] Определение основной частоты может встретить трудности, если низшая гармоника имеет небольшую амплитуду.

* См. также Вендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. Пер. с англ. «Мир», 1971 и литературу к разделу 10.

не максимумов и минимумов гармонической составляющей. Для получения более точных и объективных результатов необходимо привлечение к обработке методов корреляционного анализа.

Для анализа осциллографических графиков периодических процессов и реализаций стационарных случайных процессов применяются различные механические счетно-решающие устройства.

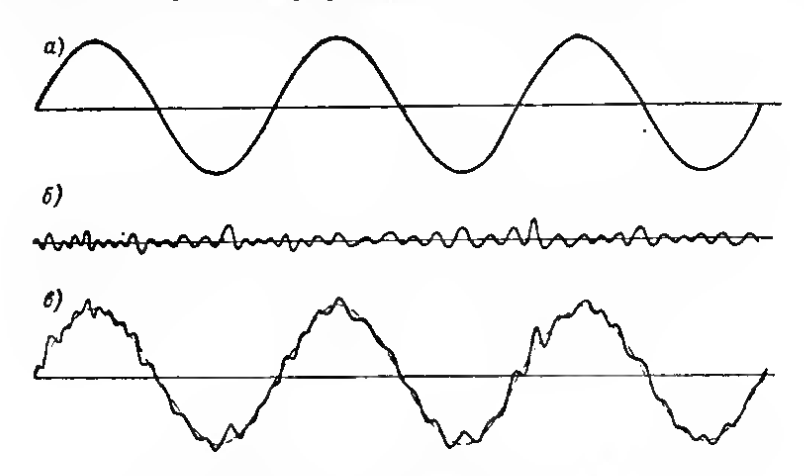


Рис. 17.14. Наложение колебаний двух типов

а — гармонические колебания; *б* — случайные колебания; *в* — результат наложения гармонических и случайных колебаний

Механический анализатор Мадера — Отта [6, 13] применяется для гармонического анализа полигармонических колебаний. При обработке оператор обводит штифтом увеличенный график кривой, соответствующий одному периоду колебаний. Точность определения амплитуд гармоник составляет приблизительно 0,1 *мм* в масштабе анализируемого графика. Длина периода анализируемой кривой 2,5—72 *см*. Количество пар коэффициентов Фурье, вычисление которых допускает конструкция анализатора, равно 33. Однако при анализе обычных виброграмм надежно определяются только первые шесть пар коэффициентов.

Среди механических приборов для обработки графиков реализаций стационарных случайных процессов получил некоторое распространение и хорошо зарекомендовал себя *механический коррелятор* [18]. Он позволяет вычислять математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и ординаты корреляционной функции. Возможно также вычисление ординат взаимной корреляционной функции (см. раздел 10).

При обработке осциллограммы на корреляторе она протягивается лентопротяжным механизмом, и два оператора производят с помощью штурвалов непрерывное совмещение визиров с обрабатываемой кривой. Механическое счетно-решающее устройство выполняет при этом соответствующие вычисления. Ошибка в вычислении ординат корреляционной функции, вносимая операторами из-за неточной обводки кривой, не превышает 5—6%. Пределы изменения τ (в масштабе осциллограммы): при вычислении корреляционной функции 0—20 *см*, при вычислении взаимной корреляционной функции от —10 до 10 *см*. Максимальная разность ординат обрабатываемой кривой 7 *см*. Длина осциллограмм практически не ограничена. Наибольшая ширина осциллограммы 12 *см*.

Автоматизация анализа различных колебательных процессов достигается применением **электрических анализаторов** [12а, 13, 26, 34, 35]. Как правило

они требуют, чтобы исследуемый процесс был введен в анализатор в виде электрического аналога[1].

В табл. 17.5 приведены основные технические характеристики некоторых электрических анализаторов спектра и анализаторов гармоник звукового и инфразвукового диапазона. Анализаторы спектра СК4-26 и С4-12 дают возможность наблюдать на экране электронно-лучевой трубки и фотографировать

Таблица 17.5

Технические характеристики электрических анализаторов спектра и анализаторов гармоник звукового и инфразвукового диапазона

Основные данные	С4-12	СК4-26	С4-29	С5-3А
Диапазон частот f в *гц*	20—5·10⁵	20—2·10⁴	0,5—100	10—2·10⁴
Ширина полосы пропускания Δf в *гц* . . .	7; 30; 90	5; 30; 150	0,2; 1; 5	6; 200
Чувствительность в *мв*	0,3	0,03	1	0,1
Основная погрешность измерения частоты в *гц*	$\pm(0,5\Delta f+10)$	$\pm(0,02\Delta f+6)$* $\pm(0,02\Delta f+10)$** $\pm(0,02\Delta f+50)$***	$\pm(0,01f+\Delta f)$	$\pm(0,01f+5)$* $\pm(0,01f+30)$***
Относительная погрешность измерения амплитуды	±1 *дб*	±6%	±1 *дб*	±(0,5÷1,5)*дб*
Тип индикатора . . .	ЭЛТ	ЭЛТ	Стрелочный прибор и самописец	Стрелочный прибор и самописец
Габариты в *м*	0,35×0,47×0,56; 0,32×0,23×0,21	0,48×0,44×0,47	0,49×0,25×0,48; 0,49×0,22×0,48	0,5×0,35×0,35
Вес в *кг*	64	50	61	32

* При узкой полосе пропускания.
** При средней полосе пропускания.
*** При широкой полосе пропускания.

амплитудный спектр периодических колебаний и стационарных шумов. Анализатор спектра С4-29 и анализатор гармоник С5-3А позволяют при исследовании периодических колебаний измерять частоту, а также абсолютный уровень гармонических составляющих.

Разработаны и выпускаются серийно устройства для полуавтоматического и автоматического считывания ординат осциллографических кривых, преобразования их в цифровой код и ввода в ЭЦВМ для дальнейшей обработки по любой заданной программе [14, 30].

ЛИТЕРАТУРА

1. Агейкин Д. И., Костина Е. Н., Кузнецова Н. Н. Датчики контроля и регулирования. «Машиностроение», 1965.
2. Анализ и воспроизведение вибраций. Материалы к краткосрочному семинару с 21 по 24 февраля 1967 г. Изд. ЛДНТП, Л., 1967.
3. Аппаратура для измерения параметров вибрации. Сб. под ред. А. Н. Бураго. Л., ЛДНТП, 1967.
4. Безухов К. И. Испытание строительных конструкций и сооружений. Госстройиздат, 1954.

[1] Некоторые анализаторы допускают считывание графического материала непосредственно с осциллограмм, подготовленных в той или иной форме.

5. Бибер Л. А. Вибрографы с гальваиометрической регистрацией. Госэнергоиздат, 1960.
6. Гевондян Т. А., Киселев Л. Т. Приборы для измерения и регистрации колебаний. Машгиз, 1962.
7. Глаговский Б. А., Пивен И. Д. Электротензометры сопротивления. «Энергия», 1964.
8. Иориш Ю. И. Виброметрия. Машгиз, 1963.
9. Кирнос Д. П., Рулев Б. Г., Харин Д. А. Сейсмограф ВЭГИК для работ по инженерной сейсмологии и регистрации близких землетрясений. Труды ИФЗ АН СССР, № 16 (183), 1961.
10. Корчинский И. Л. Натурные испытания строительных конструкций. Стройиздат, 1951.
11. Максимов Л. С., Токмаков В. А. Дистанционная регулировка длиннопериодного вибродатчика. Труды ИФЗ АН СССР, «Сейсмические приборы», № 19 (186). М., 1961.
12. Максимов Л. С., Токмаков В. А. Применение видоизмененного сейсмоприемника СПМ-16 для записи смещений колебательного движения. Известия АН СССР, серия геофизическая, 1964, № 3.
12а. Мирский Г. Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. «Энергия», 1967.
13. Мэнли Р. Анализ и обработка записей колебаний. Пер. с англ. «Машиностроение», 1972.
14. Петренко А. И. Автоматический ввод графиков в электронные вычислительные машины. «Энергия», 1968.
15. Рулев Б. Г. Сейсмоприемник С5С. В сб.: «Аппаратура и методика сейсмометрических наблюдений». «Наука», 1966.
16. Рулев Б. Г., Харин Д. А. Сейсмографы для регистрации больших перемещений. Труды ИФЗ АН СССР, № 16 (153), 1961.
17. Саваренский Е. Ф., Кирнос Д. П. Элементы сейсмологии и сейсмометрии. ГИТТЛ, 1949.
18. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. Физматгиз, 1960.
19. Солодовников В. В., Усков А. С. Статистический анализ объектов регулирования. М., 1960.
20. Токмаков В. А. Формулы гальваиометрической регистрации различных кинематических элементов колебательного движения. В сб.: «Аппаратура и методика сейсмометрических наблюдений». «Наука», 1966.
21. Токмаков В. А., Лавров И. М. Экспериментальное определение параметров сейсмографа и расчет увеличения с помощью номограмм. Труды ИФЗ АН СССР, № 36 (203), 1965.
22. Токмаков В. А., Учитель Ю. Я. Расчет увеличения виброизмерительного комплекта К-001 по его параметрам, определенным экспериментально. Труды ИФЗ АН СССР, № 35 (202), 1964.
23. Трухачев Б. С., Удалов Н. П. Полупроводниковые тензопреобразователи. «Энергия», 1968.
24. Туричин А. М. Электрические измерения неэлектрических величин. Госэнергоиздат, 1959.
25. Харин Д. А. О качестве виброизмерительных приборов с механическим и оптическим методами регистрации. Труды Геофизического института АН СССР, № 14 (141), 1952.
26. Харкевич А. А. Спектры и анализ. Физматгиз, 1962.
27. Хертель В., Дегенхарт И., Кюблер А., Соренсен Х., Трогер И. Светолучевые осциллографы. Под ред. и с дополнением проф. Е. С. Борисевича. «Энергия», 1965.
28. Чиликин М. Г. Общий курс электропривода. Изд. 4-е. М. — Л., «Энергия», 1965.
29. Шейнин И. С. Приборы и оборудование для экспериментальных исследований динамики сооружений. В сб.: «Экспериментальные исследования сооружений». «Энергия», 1967.
30. Шейнин И. С., Носков Л. Д. Автоматизация процесса обработки осциллограмм при помощи ЭЦВМ. «Труды координационных совещаний по гидротехнике», вып. 28. «Динамика гидротехнических сооружений». М. — Л., «Энергия», 1966.
31. Шейнин И. С., Носков Л. Д. Вибродатчики с дистанционным управлением. Известия ВНИИГ, т. 79, 1965.
32. Шкаликов В. С. Вибрационные платформы. «Передовой научно-технический и производственный опыт». № П-59-44/8. М., Изд-во филиала Всесоюзного института научной и технической информации, 1959.
33. Shock and vibration handbook. New York, Mc Grow—Hill, 1961.
34. Грибанов Ю. И., Веселова Г. П., Андреев В. Н. Автоматические цифровые корреляторы, «Энергия», 1971.
35. Курочкин С. С. Многоканальные счетные системы и коррелометры. «Энергия», 1972.

РАЗДЕЛ 18

МОДЕЛИРОВАНИЕ

(И. С. Шейнин)

Моделирование — это изучение явлений на моделях с целью последующего распространения результатов на явления в прототипе[1]. С помощью моделирования решаются следующие научные и производственно-технические задачи:

1) исследование явлений, создание которых или управление которыми на натурных объектах затруднено, неэкономично или вообще невозможно; в частности, на моделях могут быть исследованы различные аварийные режимы;

2) изучение в чистом виде явлений, измерение параметров которых в натуре затруднено или невозможно вследствие наложения помех, не связанных с изучаемым явлением;

3) проверка результатов теоретических исследований, определение границ применимости расчетных предпосылок, принимаемых при построении теории, уточнение полученных теоретически расчетных формул;

4) исследование явлений применительно к объектам, которые вообще не существуют в натуре, для изучения возможности и целесообразности создания таких объектов;

5) подбор оптимальных параметров проектируемых объектов или проверка правильности принятых проектных решений в случаях, когда не существует надежных методов расчета или эти методы настолько трудоемки, что экономичнее использовать методы моделирования.

Классификация методов моделирования не установилась. Наиболее распространено деление на методы физического моделирования и методы математического моделирования.

Физическое моделирование осуществляется с сохранением на модели физической природы явлений, происходящих в натурных условиях.

Математическое моделирование — несколько условный термин, обозначающий, что модель и оригинал имеют различную физическую природу, но явления в них описываются одинаковыми математическими уравнениями. Например, движение механической колебательной системы моделируется электрическим током в колебательной системе, состоящей из индуктивностей, емкостей и сопротивлений.

Условность классификации и связанной с ней терминологии состоит в том, что и физическое моделирование, вообще говоря, позволяет получить достоверные результаты только при наличии строгого математического описания исследуемого явления, т. е. при наличии математических уравнений со всеми дополнительными условиями, обеспечивающими однозначность решения (например, начальные и граничные условия в краевой задаче). Условия, обеспечивающие однозначность решения, называются *условиями однозначности* или *моновалентами*.

Моделирование весьма широко применяется почти во всех областях физики и техники. Здесь приводятся данные, необходимые главным образом для фи-

[1] Или «в оригинале», «в реальном объекте», «в натурных условиях», поскольку установившейся терминологии нет.

зического моделирования, применяемого при решении задач динамики сооружений.

О методах математического моделирования, основанных на электродинамических аналогиях и на использовании серийных аналоговых математических машин, см. [4, 9, 11, 13, 15, 19, 24, 26, 31, 34, 37] и библиографию в этих работах. О других методах математического моделирования см., например, [16].

18.1. Общие принципы физического моделирования, теория подобия, теория размерностей

В основе физического моделирования лежит понятие о подобии явлений. Два явления называют подобными, если они имеют одинаковую физическую природу и если характеристики одного из них отличаются от характеристик другого только масштабом, одинаковым для всех одноименных характеристик. Одноименными называются характеристики, имеющие одинаковую размерность. Масштабный множитель, позволяющий перейти от характеристик одного явления к характеристикам другого, называют *коэффициентом подобия или константой подобия*. В зависимости от вида изучаемых характеристик различают:

геометрическое подобие — если речь идет только о геометрических характеристиках; геометрически подобными называют фигуры, отношения всех соответствующих размеров в которых одинаковы;

механическое подобие — если речь идет о подобии механических характеристик — сил, давлений, механических напряжений, скоростей и т. п.; механическое подобие иногда подразделяют на *кинематическое подобие*, т. е. подобие геометрическо-временных характеристик движения — деформаций, перемещений, скоростей, ускорений, и т. п. и на *динамическое подобие* — т. е. подобие сил, давлений, механических напряжений и т. п. Естественно, что механическое подобие включает в себя и геометрическое подобие.

Аналогично различают и другие виды подобия — тепловое, электрическое и т. п., которые здесь не рассматриваются.

Для моделирования основной интерес представляют следующие вопросы:

1) если два явления подобны и соотношения между величинами, характеризующими одно из них, известны, то каковы будут соотношения между величинами, характеризующими второе из этих явлений?

2) каковы признаки подобия, т. е. какие условия необходимы и достаточны для того, чтобы два явления были подобными?

Ответ на эти вопросы дают три теоремы подобия [12].

Первая теорема подобия, сформулированная Ньютоном в 1686 г. [18], устанавливает, что в подобных механических системах коэффициент подобия для сил α_F связан с коэффициентами подобия для масс α_M, для времени α_t и для длин α_l (α_l называют также коэффициентом геометрического подобия) зависимостью

$$\alpha_F = \frac{\alpha_M \alpha_l}{\alpha_t^2}. \qquad (18.1)$$

Эта зависимость получается сразу, если применить второй закон Ньютона к первой системе, в которой масса M_1 движется с ускорением d^2l_1/dt_1^2 и равнодействующая всех действующих на массу M_1 сил равна F_1, и ко второй системе, для которой

$$M_2 = \alpha_M M_1; \quad l_2 = \alpha_l l_1; \quad t_2 = \alpha_t t_1; \; F_2 = \alpha_F F_1. \qquad (18.2)$$

Тогда, подставляя (18.2) в формулу

$$F_2 = M_2 \frac{d^2 l_2}{dt_2^2}, \tag{18.3}$$

получим

$$F_1 = \frac{\alpha_M \alpha_l}{\alpha_F \alpha_t^2} M_1 \frac{d^2 l_1}{dt_1^2}. \tag{18.4}$$

Но поскольку

$$F_1 = M_1 \frac{d^2 l_1}{dt_1^2}, \tag{18.5}$$

то

$$\frac{\alpha_M \alpha_l}{\alpha_F \alpha_t^2} = 1, \tag{18.6}$$

откуда сразу получается (18.1).

Левая часть выражения (18.6) называется *индикатором подобия*. Из этого выражения можно установить масштаб сил по масштабам масс, длин и времени.

Если в (18.3) и (18.5) массу представить в виде плотности ρ, умноженной на объем, то вместо (18.6) и (18.1) можно записать:

$$\frac{\alpha_\rho \alpha_l^4}{\alpha_F \alpha_t^2} = 1; \quad \alpha_F = \frac{\alpha_\rho \alpha_l^4}{\alpha_t^2}. \tag{18.7}$$

Здесь и далее подстрочный индекс при коэффициенте подобия α показывает, к какой характеристике относится коэффициент.

В (18.3) и (18.5) можно представить ускорение как первую производную скорости v, так что вместо (18.6) и (18.1) будет:

$$\frac{\alpha_M \alpha_v}{\alpha_F \alpha_t} = 1; \quad \alpha_F = \frac{\alpha_M \alpha_v}{\alpha_t}. \tag{18.8}$$

Аналогично, подставляя в разных комбинациях $M = \rho l^3$ и $l = vt$, можно получить:

$$\frac{\alpha_\rho \alpha_l^3 \alpha_v}{\alpha_F \alpha_t} = 1; \quad \alpha_F = \frac{\alpha_\rho \alpha_l^3 \alpha_v}{\alpha_t}; \tag{18.9}$$

$$\frac{\alpha_\rho \alpha_l^2 \alpha_v^2}{\alpha_F} = 1; \quad \alpha_F = \alpha_\rho \alpha_l^2 \alpha_v^2; \tag{18.10}$$

$$\frac{\alpha_M \alpha_v^2}{\alpha_F \alpha_l} = 1; \quad \alpha_F = \frac{\alpha_M \alpha_v^2}{\alpha_l}. \tag{18.11}$$

Если же выразить силу через определяющие ее параметры, например силу тяжести

$$F = Mg \tag{18.12}$$

или силу, распределенную по площади,

$$F = pl^2 \tag{18.13}$$

(p — давление или механическое напряжение), то, например, из (18.11) с учетом (18.12) получим:

$$\frac{\alpha_v^2}{\alpha_g \alpha_l} = 1 \tag{18.14}$$

или из (18.10) с учетом (18.13)

$$\frac{\alpha_\rho \alpha_v^2}{\alpha_p} = 1. \tag{18.15}$$

Таким образом можно получить множество других индикаторов подобия.

Индикаторы подобия в форме (18.6), (18.8) и (18.11) используются для систем с сосредоточенными массами, а в форме (18.7), (18.9) и (18.10) — для сплошных сред. Вообще разнообразие форм индикаторов подобия связано с разнообразием задач.

Теперь первую теорему подобия можно сформулировать короче: для подобных механических явлений индикаторы подобия равны единице. На практике часто пользуются еще одной формулировкой этой теоремы. Заменяя в (18.1) [или любой другой из аналогичных формул (18.7)—(18.11)] коэффициенты подобия отношением входящих в них величин согласно (18.2), получим:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{M_2 \, l_2 \, t_1^2}{M_1 \, l_1 \, t_2^2} \tag{18.16}$$

или

$$\frac{F_2 \, t_2^2}{M_2 l_2} = \frac{F_1 \, t_1^2}{M_1 l_1}. \tag{18.17}$$

Вместо (18.17) можно записать

$$K = \frac{F t^2}{Ml} = \text{idem}. \tag{18.18}$$

Безразмерный комплекс K называют *критерием подобия*. Если исходить из зависимости (18.7), то получится критерий подобия

$$K_1 = \frac{F t^2}{\rho l^4} = \text{idem}. \tag{18.19}$$

Критерии подобия, получающиеся из (18.11),

$$\text{Ne} = \frac{Fl}{Mv^2} = \text{idem}, \tag{18.20}$$

из (18.14)

$$\mathrm{Fr} = \frac{v^2}{gl} = \mathrm{idem} \quad (18.21)$$

и из (18.15)

$$\mathrm{Eu} = \frac{p}{\rho v^2} = \mathrm{idem}, \quad (18.22)$$

называют критериями Ньютона, Фруда и Эйлера. Другие виды специальных критериев будут приведены при изложении методов моделирования различных явлений. Разнообразие критериев подобия, так же как и индикаторов подобия, связано с разнообразием задач и особенно с различием в физической природе сил. Так, например, в подобных системах, находящихся под действием сил тяжести (18.12), должен быть одинаковым критерий Фруда, т. е. должно выполняться условие (18.21). И вообще для подобных механических явлений критерии подобия должны быть одинаковыми.

Разнообразие форм критериев подобия позволяет составлять некоторые критерии так, чтобы в них входили только заданные величины, определяющие однозначность решения, — физические константы материалов, параметры системы (размеры, массы, жесткости и т. п.) и величины, входящие в граничные и начальные условия задачи. Критерии подобия, составленные из заданных величин, входящих в условия однозначности, называются *определяющими*.

Безразмерные комбинации, в которые входят величины, определяемые по ходу решения задачи, называют *инвариантами*, имея в виду, что они одинаковы в соответствующие моменты времени и в соответствующих точках модели и оригинала; иногда их называют *определяемыми критериями*.

Дифференциальные уравнения, граничные и начальные условия всегда могут быть преобразованы к безразмерному виду так, что в них будут входить только критерии подобия. Такие уравнения, связывающие определяемые критерии с определяющими, называют *критериальными уравнениями*.

Поскольку для подобных систем соответственные критерии одинаковы, то для подобных явлений критериальные уравнения, а также начальные и граничные условия в критериальной форме тождественны.

Согласно *второй теореме подобия* [12] для того, чтобы данные, полученные из опыта, можно было непосредственно распространять на подобные явления, эти данные надо обрабатывать и представлять в виде зависимости между критериями подобия. Другими словами, надо стараться установить зависимость не между отдельными величинами, характеризующими явление, а между их комплексами, представляющими критерий подобия.

Третья теорема подобия устанавливает [12], что для подобия явлений необходимо и достаточно, чтобы условия однозначности (моноваленты) этих явлений были подобны, т. е. чтобы явления описывались одной и той же системой уравнений, граничных и начальных условий, причем определяющие критерии должны быть равны.

Таким образом, для выполнения моделирования необходимо следующее.

1. Составить уравнения, описывающие изучаемое явление в натуре, установить начальные и граничные условия, а затем привести их к критериальной форме.

2. Запроектировать модель, подобрав масштабы всех величин таким образом, чтобы определяющие критерии для модели и оригинала были равны (условия однозначности подобны) либо чтобы для явления в модели подходили дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия в критериальной форме, составленные для оригинала; при этом необходимо тщательно проверить, чтобы на модели сохранилась физическая природа явления, т. е. чтобы с изменением масштаба не начали играть основную роль те эф-

фекты, которые не проявляются в натуре, например краевые эффекты или переход в другую стадию работы для твердых деформируемых тел, либо переход турбулентного движения в ламинарное, либо проявление кавитации или капиллярности для жидкостей и т. п. Такое изменение физической природы явления с изменением масштаба называют *масштабным эффектом.* Если нет полной уверенности в отсутствии масштабного эффекта, то для обеспечения надежности результатов, получаемых при моделировании, проектируют несколько моделей разного масштаба (*масштабную серию*) и сверяют результаты, полученные на них.

Масштабы модели должны быть достаточно малыми для того, чтобы моделирование было экономичным и могло быть осуществлено с применением доступного экспериментального оборудования — вибростолов, вибровозбудителей, лотков, ударных труб и т. п. Но в то же время эти масштабы должны быть сравнительно велики для того, чтобы обеспечить достаточно слабое влияние масштабных эффектов, достаточно точное осуществление параметров, входящих в состав определяющих критериев и достаточно надежное измерение всех параметров явления, входящих в состав определяемых критериев. Нахождение компромисса между этими двумя противоречивыми требованиями к выбору масштабов составляет одну из основных трудностей при проектировании модели явления, имеющего строгое математическое описание.

3. Изготовить модель, оснастить ее необходимой измерительной аппаратурой и провести на ней эксперименты во всех интересующих исследователя режимах.

4. Обработать результаты эксперимента, представив их в виде зависимостей определяемых критериев от определяющих; эти зависимости пригодны и для натуры, если моделирование выполнено правильно.

На практике такая идеальная схема моделирования не всегда возможна по следующим причинам.

1. Из разных определяющих критериев могут вытекать несовместимые требования к масштабам или к физическим константам материала модели. Так, например, если модель выполняется из того же материала, что и оригинал, то из критерия Эйлера (18.22) вытекает требование равенства скоростей на модели и в оригинале (или равенства масштабов времени и линейного), тогда как из критерия Фруда (18.21) вытекает требование изменения скоростей пропорционально корню квадратному из линейного масштаба (т. е. линейный масштаб должен быть равен квадрату масштаба времени).

Из этого делают вывод [28], что при постоянном g моделирование невозможно.

2. Моделируемое явление столь сложно, что не имеет строгого математического описания, в связи с чем для него не может быть строго проверено подобие.

Для согласования критерия Фруда с другими критериями подобия можно поместить модель в поле центробежных сил, установив ее на специальную центрифугу [21]. Тогда роль ускорения свободного падения будет играть геометрическая сумма ускорений $\overline{g}+\overline{r\omega^2}$. При достаточно большом отношении величины радиуса вращения r к максимальному размеру модели эти ускорения во всех точках модели можно считать параллельными и равными по величине. Угловая скорость вращения ω подбирается по величине необходимого масштаба ускорения. Однако для решения задач динамики сооружений этот метод практически не применялся в связи с серьезными техническими трудностями.

Другой способ преодоления трудностей, связанных с согласованием критериев, базируется на замене принципа подобия модели оригиналу принципом аффинности или аффинного подобия [10, 17, 27, 36]. Согласно этому принципу при переходе от натуры к модели одноименные характеристики могут изменяться в различном масштабе. В качестве простейшего примера аффинных фигур обычно приводят эллипсы. Направляя координатные оси по главным осям эллипсов, можно получить координаты точек любого эллипса через координаты точек одного из эллипсов.

Кроме того, имеются предложения о применении так называемого «нелинейного подобия» [7], при котором величины, характеризующие явление в модели и оригинале, пересчитываются друг в друга с помощью нелинейных уравнений.

Наконец, весьма распространен способ так называемого приближенного моделирования, когда условия подобия соблюдаются лишь частично, с сохранением наиболее существенных из них, либо когда из-за отсутствия строгого математического описания явления методы теории подобия не могут быть применены, так что приближенное подобие устанавливается на основе изучения физической природы явления и применения теории размерностей.

Теория размерностей — это учение о методах определения вида формул, выражающих зависимость между различными физическими величинами, основанное на общем соображении о том, что характер этой зависимости не должен изменяться при изменении масштабов применяемых единиц измерения.

Из указанного общего соображения нельзя установить, от каких именно величин зависит изучаемое явление и какова конкретная функциональная зависимость между величинами, характеризующими это явление. На эти вопросы можно ответить лишь на основе изучения физической природы явления. Но теория размерностей позволяет найти наиболее рациональные формы построения этих зависимостей, выразить их в виде отношений между минимальным количеством безразмерных комбинаций физических величин и тем самым, с одной стороны, облегчить изучение физических закономерностей, а с другой стороны, распространить результаты этого изучения на все подобные явления.

Не останавливаясь здесь на одной из основных задач, которую теория размерностей решает совместно с метрологией, а именно на стандартизации основных единиц измерения физических величин, отметим только, что согласно международной системе единиц СИ для механических величин устанавливаются три *основные* независимые друг от друга единицы: длина L (метр), масса M (килограмм) и время T (секунда), а кроме того, две дополнительные: плоский угол (радиан) и телесный угол (стерадиан). Единицы измерения остальных величин выражаются через основные и называются *производными*.

Представление производной единицы измерения с помощью основных единиц называется *размерностью*. Размерности в системе СИ наиболее часто встречающихся в динамике сооружений величин представлены в табл. 18.1.

Размерность производных единиц всегда может быть составлена в виде степенного одночлена из основных единиц.

Таблица 18.1

Величина	Размерность	Единица измерения	Величина	Размерность	Единица измерения
Частота	T^{-1}	*гц*	Сила	MLT^{-2}	*н*
			Удельный вес . .	$ML^{-2}T^{-2}$	*н/м*^{3}
Круговая частота (угловая скорость) .	T^{-1}	*рад/сек*	Механическое напряжение (давление)	$ML^{-1}T^{-2}$	*н/м*^{2}
Угловое ускорение	T^{-2}	*рад/сек*^{2}	Момент инерции (динамический) . . .	ML^2	*кг·м*^{2}
Скорость	LT^{-1}	*м/сек*	Работа и энергия .	ML^2T^2	*дж*
Ускорение	LT^{-2}	*м/сек*^{2}	Мощность	ML^2T^{-3}	*вт*
Площадь	L^2	*м*^{2}	Динамическая вязкость	$ML^{-1}T^{-1}$	*н·сек/м*^{2}
Объем	L^3	*м*^{3}			
Плотность	ML^{-3}	*кг/м*^{3}	Кинематическая вязкость	L^2T^{-1}	*м*^{2}*/сек*

Во всех преобразованиях, базирующихся на теории размерности, используется *свойство размерной однородности* физических уравнений, установленное Фурье [12] и заключающееся в том, что все члены любого физического уравнения имеют одинаковую размерность.

Определение вида критериев подобия с помощью анализа размерностей, как уже упоминалось, возможно лишь при условии, что на основании изучения физической природы явления удается установить полный перечень величин x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, от которых зависит характеристика явлений φ, интересующая исследователя. Обозначим эту зависимость

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n). \tag{18.23}$$

Выбрав три величины x_i с независимыми размерностями и приняв их за основные величины (положим для определенности, что эти величины x_1, x_2 и x_3, причем не следует путать их с основными единицами измерения), введем для их размерности обозначения:

$$[x_1] = a_1; \quad [x_2] = a_2; \quad [x_3] = a_3. \tag{18.24}$$

Размерности остальных величин будут иметь вид:

$$\left.\begin{array}{c} [\varphi] = a_1^{\alpha_0} a_2^{\beta_0} a_3^{\gamma_0}; \\ [x_4] = a_1^{\alpha_1} a_2^{\beta_1} a_3^{\gamma_1}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [x_n] = a_1^{\alpha_{n-3}} a_2^{\beta_{n-3}} a_3^{\gamma_{n-3}}. \end{array}\right\} n-2. \tag{18.25}$$

Если теперь уменьшить единицы измерения в k_i раз, то изменятся только численные значения всех величин из (18.23), так что в новой системе единиц они будут равны:

$$\left.\begin{array}{c} x_1' = k_1 x_1, \quad x_2' = k_2 x_2, \quad x_3' = k_3 x_3; \\ \varphi' = k_1^{\alpha_0} k_2^{\beta_0} k_3^{\gamma_0} \varphi; \\ x_4' = k_1^{\alpha_1} k_2^{\beta_1} k_3^{\gamma_1} x_4; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = k_1^{\alpha_{n-3}} k_2^{\beta_{n-3}} k_3^{\gamma_{n-3}} x_n, \end{array}\right\} \tag{18.26}$$

а вместо (18.23) можно написать:

$$\varphi' = \varphi'\left(x_1', x_2', x_3', x_4', \ldots, x_n'\right). \tag{18.27}$$

Поскольку масштабы k_1, k_2 и k_3 могут быть выбраны, вообще говоря, произвольно, то, принимая их равными

$$k_1 = \frac{1}{x_1}; \quad k_2 = \frac{1}{x_2}; \quad k_3 = \frac{1}{x_3}. \tag{18.28}$$

и обозначая

$$
\left.\begin{aligned}
&\varphi' \left| = \frac{\varphi}{x_1^{\alpha_0} x_2^{\beta_0} x_3^{\gamma_0}} = \pi; \right. \\
&\quad k_1 = x_1^{-1} \\
&\quad k_2 = x_2^{-1} \\
&\quad k_3 = x_3^{-1} \\
&x_4' \left| = \frac{x_4}{x_1^{\alpha_1} x_2^{\beta_1} x_3^{\gamma_1}} = \pi_1; \right. \\
&\quad k_1 = x_1^{-1} \\
&\quad k_2 = x_2^{-1} \\
&\quad k_3 = x_3^{-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&x_n' \left| = \frac{x_n}{x_1^{\alpha_{n-3}} x_2^{\beta_{n-3}} x_3^{\gamma_{n-3}}} = \pi_{n-3}; \right. \\
&\quad k_1 = x_1^{-1} \\
&\quad k_2 = x_2^{-1} \\
&\quad k_3 = x_3^{-1} \\
&\quad \varphi'\left(1, 1, 1, x_4', \ldots, x_n'\right) = \\
&\quad = f\left(x_4', \ldots, x_n'\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (18.29)
$$

получим вместо (18.27)

$$
\pi = f(\pi_1, \ldots, \pi_{n-3}). \qquad (18.30)
$$

Сравнение (18.29) с (18.24) и (18.25) показывает, что все величины π, $\pi_1, \ldots \pi_{n-3}$ оказываются безразмерными и не зависят от выбора системы тех единиц измерения, через которые выражаются основные величины x_1, x_2 и x_3.

Вообще говоря, если бы в (18.23) было не три, а k величин с независимыми размерностями, то принимая их за основные величины, совершенно аналогично можно было бы показать [28], что связь между $n+1$ размерными величинами φ, $x_1, \ldots, x_n$, независимая от выбора системы единиц измерения, принимает вид соотношения между $n+1-k$ величинами π, $\pi_1, \ldots, \pi_{n-k}$, представляющими собой безразмерные комбинации из $n+1$ размерных величин. Этот общий вывод теории размерностей известен под названием π-теоремы.

Пример определения вида критериев с помощью анализа размерности можно привести применительно к какой-либо известной системе, имеющей строгое математическое описание, с тем чтобы потом сравнить полученные результаты.

Рассмотрим движение системы с одной степенью свободы, состоящей из массы $M([M]=M)$, пружины, жесткость которой равна $C([C]=MT^{-2})$, и демпфера с коэффициентом сопротивления $R([R]=MT^{-1})$. Будем считать, что на систему действует гармоническая сила $Pe^{i\omega t}$ $([P]=MLT^{-2}$, $[\omega]=T^{-1}$, $[t]=T)$, а начальные перемещения $x_0([x_0]=L)$ и скорость $\dot{x}_0([\dot{x}_0]=LT^{-1})$

заданы. В этом случае уравнение вида (18.23) связывает девять величин — перемещение массы x и восемь величин, перечисленных выше. В качестве основных величин лучше выбрать константы, размерность которых выражена через размерность только одной из основных единиц СИ, если такие имеются. В данном случае это x_0, M и ω. Записав их первыми в правой части уравнения вида (18.23), получим:

$$x = x(x_0, M, \omega, C, R, P, \dot{x}_0, t). \tag{18.31}$$

Теперь аналогично (18.25) запишем

$$\begin{aligned} [x] &= [x_0]^1 [M]^0 [\omega]^0; \\ [C] &= [x_0]^0 [M]^1 [\omega]^2; \\ [R] &= [x_0]^0 [M]^1 [\omega]^1; \\ [P] &= [x_0]^1 [M]^1 [\omega]^2; \\ [\dot{x}_0] &= [x_0]^1 [M]^0 [\omega]^1; \\ [t] &= [x_0]^0 [M]^0 [\omega]^{-1}, \end{aligned} \tag{18.32}$$

так что согласно (18.29)

$$\pi = \frac{x}{x_0}; \quad \pi_1 = \frac{C}{M\omega^2}; \quad \pi_2 = \frac{R}{M\omega}; \tag{18.33}$$

$$\pi_3 = \frac{P}{M\omega^2 x_0}; \quad \pi_4 = \frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}; \quad \pi_5 = t\omega$$

и

$$\frac{x}{x_0} = f\left(\frac{C}{M\omega^2}, \frac{R}{M\omega}, \frac{P}{M\omega^2 x_0}, \frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}, t\omega\right). \tag{18.34}$$

Возможны случаи, когда среди заданных физических величин не находится трех, размерность которых выражена через размерность только одной из основных единиц СИ, либо они есть, но не очень удобны для практического использования. В этом случае можно и практически удобно использовать комбинации величин со сложной размерностью, дающие простую размерность. Например, в приведенном выше случае можно в качестве основных величин использовать комбинации M, C и P, приводящие к простой размерности, а именно

$$M, \ \omega_0 = C^{1/2} M^{-1/2} \left([\omega_0] = T^{-1}\right) \text{ и } x_{ст} = PC^{-1} \ ([x_{ст}] = L). \tag{18.35}$$

Тогда вместо (18.31) будет:

$$x = x(x_{ст}, M, \omega_0, \omega, R, x_0, \dot{x}_0, t), \tag{18.36}$$

так что, выполняя все действия аналогично (18.32) и (18.33), получим вместо (18.34)

$$\frac{x}{x_{ст}} = f_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}, \frac{R}{M\omega_0}, \frac{x_0}{x_{ст}}, \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_{ст}}, t\omega_0\right). \tag{18.37}$$

Разумеется, вводя обозначения (18.35), можно от (18.34) прямо перейти к (18.37). В (18.34), (18.37) и в любые другие уравнения типа (18.30) входят два вида безразмерных комбинаций — составленные из двух одноименных величин, называемые *симплексами*, и составленные из нескольких величин разной размерности, называемые *комплексами*.

Другой способ определения вида критериев подобия, называемый **способом Рэлея**, широко применяется на практике. Он состоит в представлении зависимости (18.23) в виде степенного одночлена, в который переменные

$x_1, \dots, x_n$ вводятся в неопределенных степенях с последующим уточнением этих степеней на основе свойства размерной однородности. Применительно к (18.36) выкладки по способу Рэлея будут иметь следующий вид:

$$x = x_{\text{ст}}^{z_1} M^{z_2} \omega_0^{z_3} \omega^{z_4} R^{z_5} x_0^{z_6} \dot{x}_0^{z_7} t^{z_8}; \tag{18.38}$$

подставляя размерности левых и правых частей, получим:

$$L^1 = L^{z_1+z_6+z_7} M^{z_2+z_5} T^{-z_3-z_4-z_5-z_7+z_8}, \tag{18.39}$$

т. е. по свойству размерной однородности:

$$z_1 + z_6 + z_7 = 1; \quad z_2 + z_5 = 0; \quad z_3 + z_4 + z_5 + z_7 - z_8 = 0. \tag{18.40}$$

Выражая показатели степени z_1, z_2 и z_3 основных величин через остальные:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= 1 - z_6 - z_7; \quad z_2 = -z_5; \\ z_3 &= z_8 - z_4 - z_5 - z_7, \end{aligned}\right\} \tag{18.41}$$

подставляя (18.41) в (18.38) и группируя члены с одинаковым показателем степени, получим:

$$x = x_{\text{ст}} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{z_4} \left(\frac{R}{M\omega_0}\right)^{z_5} \left(\frac{x_0}{x_{\text{ст}}}\right)^{z_6} \left(\frac{x_0}{\omega x_{\text{ст}}}\right)^{z_7} (\omega_0 t)^{z_8}, \tag{18.42}$$

т.е. в полном соответствии с (18.37)

$$\frac{x}{x_{\text{ст}}} = f_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}, \frac{R}{M\omega_0}, \frac{x_0}{x_{\text{ст}}}, \frac{x_0}{\omega x_{\text{ст}}}, \omega_0 t\right). \tag{18.43}$$

Причем в дальнейшем функция f_1 не обязательно должна иметь вид степенного одночлена (18.42).

Отметим, наконец, что свойство размерной однородности, сформулированное в теории размерностей, используется также и при наличии строгого математического описания изучаемого явления для приведения дифференциальных уравнений, граничных и начальных условий к критериальной форме. Способ такого приведения покажем применительно к рассмотренному выше примеру. Дифференциальное уравнение движения массы

$$M\ddot{x} + R\dot{x} + Cx = Pe^{i\omega t} \tag{18.44}$$

и начальные условия

$$x(0) = x_0 \text{ и } \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \tag{18.45}$$

содержат те же девять величин, что и равенство (18.31).

Введем безразмерные величины, обозначив их значком $\sim$:

$$x = L\tilde{x}; \quad x_0 = L\tilde{x}_0; \quad \dot{x}_0 = LT^{-1}\tilde{\dot{x}}_0; \quad \omega = T^{-1}\tilde{\omega}, \quad t = T\tilde{t}, \tag{18.46}$$

где L и T — некоторые размерные множители, связь которых с параметрами системы (18.44) установим в дальнейшем. Подставляя (18.46) в (18.44), получим:

$$\frac{ML}{T^2}\ddot{\tilde{x}} + \frac{RL}{T}\dot{\tilde{x}} + CL\tilde{x} = Pe^{i\tilde{\omega}\tilde{t}}. \tag{18.47}$$

Для того чтобы привести уравнение к безразмерной форме, разделим все члены на один из размерных коэффициентов, например на CL:

$$\frac{M}{CT^2}\ddot{\tilde{x}} + \frac{R}{CT}\dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = \frac{P}{CL}e^{i\tilde{\omega}\tilde{t}}. \tag{18.48}$$

Величинами T и L можно распорядиться так, чтобы максимально упростить это уравнение, например, положить:

$$T^2 = \frac{M}{C} = \frac{1}{\omega_0^2}; \quad L = \frac{P}{C} = x_{\text{ст}}. \tag{18.49}$$

Тогда, введя еще обозначение

$$\frac{R\omega_0}{C} = \frac{R}{M\omega_0} = \gamma, \tag{18.50}$$

можно написать вместо (18.44) и (18.45)

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\tilde{x}} + \gamma\dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = e^{i\tilde{\omega}\tilde{t}};\\ &\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0; \quad \dot{\tilde{x}}(0) = \dot{\tilde{x}}_0, \end{aligned}\right\} \tag{18.51}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{x} = \frac{x}{x_{\text{ст}}}; \quad \tilde{x}_0 = \frac{x_0}{x_{\text{ст}}}; \quad \dot{\tilde{x}}_0 = \frac{\dot{x}_0}{x_{\text{ст}}\,\omega_0};\\ &\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad \tilde{t} = t\omega_0. \end{aligned}\right\} \tag{18.52}$$

Таким образом, задача свелась к тем же безразмерным критериям, что и в (18.37). Это подтверждает высказанное соображение о том, что если на основе изучения физической природы явления удается выявить полный перечень величин, от которых зависит интересующая исследователя характеристика явления, то теория размерностей позволяет установить вид критериев подобия и тем самым обеспечить достоверность моделирования явлений, не имеющих строгого математического описания. Следует, однако, иметь в виду, что при этом всегда остается сомнение в полноте перечня величин, особенно если этот перечень получен в результате опытов на модели, так как на модели может и не проявиться влияние ряда величин, которые являются весьма существенными или даже основными в натуре. Поэтому строгие методы теории подобия следует использовать во всех случаях, когда это только возможно.

18.2. Моделирование механических колебательных систем с сосредоточенными параметрами

Сооружение, конструкцию или механизм называют механической колебательной системой с сосредоточенными параметрами, если его расчетная схема может быть представлена в виде совокупности абсолютно жестких тел, соединенных между собой и с основанием безынерционными упругими связями и демпфирующими элементами. Движение таких систем описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые решаются либо аналитически, либо с применением математического моделирования. Физическое моделирование таких систем в большинстве случаев оказывается гораздо более трудоемким и менее экономичным. Практически оно применяется только для отработки на моделях конструкции каких-либо специальных устройств (см., например, [14]) либо для создания учебных пособий. При этом определение вида критериев подобия трудностей не вызывает, поскольку практически всегда имеется строгая математическая формулировка задачи. Покажем это для общего случая. Система дифференциальных уравнений движения и начальные условия имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}(a_{lk}\ddot{q}_k+b_{lk}\dot{q}_k+c_{lk}q_k)=Q_l(t),\ (l=1,2,\ldots,n);\\&q_k(0)=q_{k0},\quad \dot{q}_k(0)=\dot{q}_{k0},\quad (k=1,2,\ldots,n),\end{aligned}\right\}\qquad(18.53)$$

Условимся, что в первую строку в (18.53) запишем уравнение, в котором $[Q_1]=MLT^{-2}$, а в этом уравнении первой запишем скобку, в которой $[q_1]=L$. Во вторую строку запишем уравнение, в котором $[Q_2]=ML^2T^{-2}$, а в качестве второй обобщенной координаты запишем такую, что $[q_2]=$ рад. Если в системе (18.53) все обобщенные координаты (а значит, и обобщенные силы) имеют одинаковую размерность, то выкладки упрощаются.

Введем обозначения:

$$\frac{c_{lk}}{a_{lk}}=\omega_{lk}^2;\ \frac{b_{lk}}{c_{lk}\,\omega_{11}}=\tilde{\gamma}_{lk};\ \frac{\omega_{lk}}{\omega_{11}}=\tilde{\omega}_{lk};\quad \omega_{11}t=\tilde{t};$$

$$Q_l(t)=\begin{cases}Q_{10}\tilde{Q}_l(\tilde{t}), & \text{если } [Q_l]=MLT^{-2};\\ Q_{20}\tilde{Q}_l(\tilde{t}), & \text{если } [Q_l]=ML^2T^{-2};\end{cases}$$

$$\frac{Q_{10}}{c_{11}}=q_{1\text{ст}};\quad \frac{Q_{20}}{c_{22}}=q_{2\text{ст}};$$

$$\tilde{\mu}_{lk}=\begin{cases}\dfrac{a_{lk}\,\omega_{11}^2}{c_{11}}, & \text{если } [q_k]=L \text{ и } [Q_l]=MLT^{-2};\\[2mm] \dfrac{a_{lk}\,q_{1\text{ст}}\,\omega_{11}^2}{c_{22}\,q_{2\text{ст}}}, & \text{если } [q_k]=L \text{ и } [Q_l]=ML^2T^{-2};\\[2mm] \dfrac{a_{lk}\,q_{2\text{ст}}\,\omega_{11}^2}{c_{11}\,q_{1\text{ст}}}, & \text{если } [q_k]=\text{рад и } [Q_l]=MLT^{-2};\\[2mm] \dfrac{a_{lk}\,\omega_{11}^2}{c_{22}}, & \text{если } [q_k]=\text{рад и } [Q_l]=ML^2T^{-2};\end{cases}\qquad(18.54)$$

$$q_k=\begin{cases}q_{1\text{ст}}\,\tilde{q}_k, & \text{если } [q_k]=L;\\ q_{2\text{ст}}\,\tilde{q}_k, & \text{если } [q_k]=\text{рад}.\end{cases}$$

Подставив (18.54) в (18.53) и проведя несложные преобразования, получим:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mu}_{lk}\left(\ddot{\tilde{q}}_k+\tilde{\gamma}_{lk}\dot{\tilde{q}}_k+\tilde{\omega}_{lk}^2\tilde{q}_k\right)=\tilde{Q}_l(\tilde{t}),\quad (l=1,2,\ldots,n);\\&\tilde{q}_k(0)=\tilde{q}_{k0},\ \dot{\tilde{q}}_k(0)=\dot{\tilde{q}}_{k0},\quad (k=1,2,\ldots,n),\end{aligned}\right\}\qquad(18.55)$$

где

$$\tilde{q}_{k0}=\begin{cases}\dfrac{q_{k0}}{q_{1\text{ст}}}, & \text{если } [q_k]=L;\\[2mm] \dfrac{q_{k0}}{q_{2\text{ст}}}, & \text{если } [q_k]=\text{рад};\end{cases}\qquad(18.56)$$

$$\tilde{q}_{k0} = \begin{cases} \dfrac{q_{k0}}{q_{1ст}\,\omega_{11}}, & \text{если } [q_k] = L; \\ \dfrac{\dot{q}_{k0}}{q_{2ст}\,\omega_{11}}, & \text{если } [q_k] = \text{рад}. \end{cases}$$

Таким образом, движения систем, описываемые безразмерными координатами $\tilde{q}_k$, будут подобны, если собственные параметры этих систем a_{ik}, b_{ik} и c_{ik} будут удовлетворять равенству определяющих критериев $\tilde{\mu}_{ik}$, $\tilde{\gamma}_{ik}$ и $\tilde{\omega}_{ik}$, а начальные условия, возмущающие силы и время будут заданы в масштабах, определяемых по (18.56) и (18.54).

Отметим несколько обстоятельств, имеющих большое практическое значение.

Во-первых, жесткость, прочность и вес пружии, равно как сила вязкого трения и вес подвижных частей демпфирующих элементов, с изменением размеров, меняются в разных пропорциях. Поэтому при моделировании линейных систем с постоянными параметрами необходима проверка напряжений в материале пружин, с тем, чтобы они не оказались выше предела пропорциональности, а кроме того, проверка возможности считать эти элементы модели безынерционными.

Во-вторых, при моделировании систем с переменными параметрами необходимо, чтобы и на эти параметры распространялось изменение масштаба времени.

В-третьих, при моделировании нелинейных систем необходимо, чтобы диаграммы нелинейности (например, индикаторные диаграммы нелинейных пружин) оригинала и модели, построенные в безразмерных координатах, совпадали.

18.3. Моделирование стержневых конструкций и арок

Моделирование применяется для исследования колебаний сложных пространственных стержневых систем, которые могут содержать и сосредоточенные инерционные либо упругие элементы (см. 18.2), или сравнительно несложных систем при сложных возмущениях. Рассмотрим условия подобия систем из прямолинейных и однородных по длине стержней, движение которых описывается дифференциальными уравнениями:

для поперечных колебаний | для крутильных колебаний

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, t); \qquad \Bigg| \qquad GJ_p\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \bar{J}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \bar{m}(x, t). \qquad (18.57)$$

При этом должны удовлетворяться граничные условия и условия сопряжения:

а) на свободном конце

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0; \qquad \Bigg| \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0; \qquad (18.58)$$

б) в заделке

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \qquad \Bigg| \qquad \theta = 0; \qquad (18.59)$$

в) на свободно опертом конце

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \qquad \Bigg| \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0; \qquad (18.60)$$

г) при упругой заделке

$$EJ\left|\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right| = K_1^* \,|w|; \tag{18.61}$$

$$EJ\left|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right| = K_2^*\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|; \qquad GJ_{\text{p}}\,\frac{\partial \theta}{\partial x} = K_2^*\,\theta; \tag{18.62}$$

д) в точке, где стержень соединяется с сосредоточенными упругими элементами или сосредоточенными нагрузками

$$w_- = w_+; \qquad \theta_- = \theta_+; \tag{18.63}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_- = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_+; \tag{18.64}$$

$$EJ\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_- \pm K_2^*\frac{\partial w}{\partial x} = EJ\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_+; \qquad GJ_{\text{p}}\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_- \pm K_2^*\,\theta = GJ\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_+; \tag{18.65}$$

$$EJ\left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_- \pm K_1^*\, w = EJ\left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_+; \tag{18.66}$$

$$EJ\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_- \pm \overline{M} = EJ\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_+; \qquad GJ_{\text{p}}\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_- \pm \overline{M} = GJ_{\text{p}}\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_+; \tag{18.67}$$

$$EJ\left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_- \pm P = EJ\left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_+; \tag{18.68}$$

е) в точке, где стержень соединяется с сосредоточенными инерционными элементами

$$w_- = w_+; \qquad \theta_- = \theta_+; \tag{18.69}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_- = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_+; \tag{18.70}$$

$$EJ\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_- \pm \overline{J}^*\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial t^2} = EJ\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_+; \qquad GJ_{\text{p}}\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_- \pm \overline{J}^*\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = GJ_{\text{p}}\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_+; \tag{18.71}$$

$$EJ\left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_- \pm M^*\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = EJ\left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_+; \tag{18.72}$$

ж) в точке, где под прямым углом перекрещиваются два стержня: стержень *1*, ось которого совпадает с осью x, и стержень *2*, ось которого совпадает с осью y:

$$w_1 = w_2; \ \left|\frac{\partial w_1}{\partial x}\right| = |\theta_2|; \quad \left|\frac{\partial w_2}{\partial y}\right| = |\theta_1|; \ \left|\frac{\partial v_1}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial u_2}{\partial y}\right|; \tag{18.73}$$

$$EJ_{y1}\left.\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right|_- \pm GJ_{\text{p}2}\left.\frac{\partial \theta_2}{\partial y}\right|_- - EJ_{y1}\left.\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right|_+ \mp GJ_{\text{p}2}\left.\frac{\partial \theta_2}{\partial y}\right|_+ = 0; \tag{18.74}$$

$$EJ_{x2}\left.\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right|_- \pm GJ_{\text{p}1}\left.\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\right|_- - EJ_{x2}\left.\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right|_+ \mp GJ_{\text{p}1}\left.\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\right|_+ = 0; \tag{18.75}$$

$$EJ_{y1}\left.\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}\right|_- \pm EJ_{x2}\left.\frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3}\right|_- - EJ_{y1}\left.\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}\right|_+ \mp EJ_{x2}\left.\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}\right|_+ = 0; \tag{18.76}$$

$$EJ_{z1}\left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_- \pm EJ_{z2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_- - EJ_{z1}\left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_+ \mp EJ_{z2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_+ = 0, \tag{18.77}$$

и начальные условия:

$$w(x, 0) = w_0(x); \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = \dot{w}_0(x); \tag{18.78}$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x); \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial t} = \dot{\theta}_0(x), \tag{18.79}$$

где E и G — модули упругости и сдвига: $[E] = [G] = ML^{-1}T^{-2}$; J — момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения перпендикулярно плоскости изгиба; $[J] = L^4$; J_p — полярный момент инерции поперечного сечения стержня относительно центра тяжести поперечного сечения; $[J_p] = L^4$; $\bar{J}$ — погонный динамический момент инерции относительно продольной оси стержня; $[\bar{J}] = ML$; m — погонная масса стержня; $[m] = ML^{-1}$; $p(x, t)$ — погонная поперечная нагрузка на стержень; $[p] = MT^{-2}$; $P(t)$ — сосредоточенная поперечная нагрузка; $[P] = MLT^{-2}$; $\bar{m}(x, t)$ — распределенный внешний крутящий момент; $[\bar{m}] = MLT^{-2}$; $\bar{M}(t)$ — сосредоточенный крутящий момент; $[\bar{M}] = ML^2T^{-2}$; u, v, w — перемещения в направлении осей x, y, z соответственно; θ — угол поворота сечения в своей плоскости; K_1^*, K_2^* — жесткость сосредоточенного упругого элемента соответственно относительно линейного и углового перемещения; $[K_1^*] = MT^{-2}$; $[K_2^*] = ML^2T^{-2}$; $\bar{J}^*$, M^* — соответственно динамический момент инерции и масса сосредоточенного инерционного элемента; $[\bar{J}^*] = ML^2$; $[M^*] = M$. Подстрочные индексы 1 и 2 в формулах (18.71) — (18.77) обозначают номер стержня, а индексы минус и плюс — сечения слева и справа от точки.

Приводя формулы (18.57) — (18.77) к безразмерному виду, как показано в п. 18.1 и представляя

$$p(x, t) = p_0 \tilde{f}(\tilde{x}_1 \tilde{t}); \quad \bar{m}(\tilde{x}_1 \tilde{t}) = \bar{m}_0 \tilde{f}_1(\tilde{x}_1 t), \tag{18.80}$$

получим критерии подобия:

из (18.74) — (18.75)

$$\sigma = \text{idem}; \tag{18.81}$$

из (18.57)

$$\lambda = \frac{\rho L^2}{ET^2} = \text{idem}; \tag{18.82}$$

$$\tilde{p}_n = \frac{p_0}{EL} = \text{idem}; \quad \tilde{p}_к = \frac{\bar{m}_0}{EL^2} = \text{idem}; \tag{18.83}$$

из (18.67) — (18.68)

$$\tilde{M} = \frac{\bar{M}}{EL^3} = \text{idem}; \quad \tilde{P} = \frac{P}{EL^2} = \text{idem}; \tag{18.84}$$

или

$$\frac{\bar{M}}{\bar{m}_0 L} = \text{idem}; \quad \frac{P}{p_0 L} = \text{idem};$$

из (18.61) — (18.66)

$$K_1 = \frac{K_1^*}{EL} = \text{idem}; \quad K_2 = \frac{K_2^*}{EL^3} = \text{idem}; \tag{18.85}$$

из (18.71) — (18.72)

$$\frac{\bar{J}^*}{\rho L^5} = \text{idem}; \quad \frac{M^*}{\rho L^3} = \text{idem}. \tag{18.86}$$

В (18.82) входит отношение E/ρ, равное квадрату скорости распространения волн сжатия в материале модели, а в (18.81) σ — коэффициент Пуассона.

Таким образом, для обеспечения подобия явлений в модели стержневой системы и в оригинале необходимо и достаточно обеспечить геометрическое подобие, подобие условий опирания, равенство коэффициентов Пуассона материалов модели и оригинала, подобие нагрузок по (18.83) и (18.84), подобие характеристик сосредоточенных упругих и инерционных элементов по (18.85) и (18.86) и изменение времени пропорционально линейному масштабу и обратно пропорционально отношению скоростей распространения волн сжатия в материалах модели и оригинала. При этом прогибы изменяются пропорционально линейному масштабу, углы поворота и относительные деформации волокон в модели и оригинале одинаковы, а напряжения в волокнах изменяются пропорционально модулю упругости. При моделировании плоских стержневых систем ограничение по коэффициенту Пуассона отпадает.

О некоторых возможностях аффинного подобия при моделировании плоских стержневых систем см. [2].

Ограничение, связанное с отсутствием влияния продольных сил N на деформацию стержней, может быть снято при условии

$$N \ll N_{\text{кр}}; \tag{18.87}$$

где $N_{\text{кр}}$ — эйлерова критическая сила, или при удовлетворении критерию

$$\frac{N}{N_{\text{кр}}} = \text{idem}, \text{ т. е. } E = \text{idem}, \tag{18.88}$$

следовательно, при выполнении модели из того же материала, что и оригинал.

При выполнении одного из условий (18.87) или (18.88) приведенные выше правила подобия стержневых систем могут быть использованы для моделирования арок. Пример моделирования арок см. в [5].

В заключение отметим, что при выяснении правил моделирования для стержневых систем нигде не были использованы возможности уменьшения количества определяющих критериев за счет соответствующего выбора основных единиц. Поскольку имеется жесткое условие (18.81), то из трех основных величин для произвольного выбора остается только две. Могут быть выбраны масштабы длин и времени либо длин и скорости распространения волн сжатия в материале модели, либо, вообще говоря, плотности и времени или длины, поскольку они связаны выражением (18.82). При использовании условия (18.88) возможность произвольного выбора остается только для линейного масштаба. Учет еще одного вида сил, например сил тяжести, лишил бы возможности произвольного выбора и линейного масштаба, установив $L = \text{idem}$, т. е. привел бы к принципиальной невозможности моделирования.

Возможность произвольного выбора одного или двух масштабов позволяет сократить число определяющих параметров при обработке результатов эксперимента и тем самым сделать результаты более обозримыми. Какой из критериев целесообразно сократить, решается в зависимости от условий задачи, причем ответ в значительной степени диктуется опытом и интуицией исследователя.

18.4. Моделирование тонких плит и тонких оболочек малого подъема

Моделирование применяется для исследования колебаний тонких плит и оболочек сложной конфигурации, ребристых, переменной толщины, а также пластинчатых систем и т. п. при разнородных граничных условиях и сложных возмущениях.

Рассмотрим колебания плит постоянной толщины, движение которых описывается уравнением

$$D\Delta\Delta w + m\ddot{w} = P(x, y, t) \tag{18.89}$$

при граничных условиях:

а) для свободно опертого края, параллельного, например, оси x,

$$w = 0;\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = a; \qquad (18.90)$$

б) для свободного края, параллельного, например, оси y,

$$w = 0;\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = b; \qquad (18.91)$$

в) для свободного края, параллельного, например, оси x,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0;\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\sigma)\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} = 0 \text{ при } x = a \qquad (18.92)$$

и при начальных условиях (если их необходимо учитывать)

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y);\ \dot{w}(x, y; 0) = \dot{w}_0(x, y). \qquad (18.93)$$

Здесь обозначено:

$D = \dfrac{E\delta^3}{12(1-\sigma^2)}$ — цилиндрическая жесткость; $[D] = ML^2T^{-2}$;

$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа; $[\Delta] = L^{-2}$; m — масса на единицу площади плиты; $[m] = ML^{-2}$; w — прогиб плиты, $[w] = L$; P — распределенная нагрузка; $[P] = ML^{-1}T^{-2}$; x, y — прямоугольные координаты; $[x] = [y] = L$; t — время; $[t] = T$; E — модуль упругости; $[E] = ML^{-1}T^{-2}$; δ — толщина плиты; $[\delta] = L$; σ — коэффициент Пуассона.

Вводя безразмерные величины $w > L\tilde{w}$; $x = L\tilde{x}$; $y = L\tilde{y}$; $t = T\tilde{t}$; $\Delta = L^{-2}\tilde{\Delta}$; $P = P_0\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$ и подставляя их в (18.89) — (18.93), получим:

$$\tilde{\Delta}\tilde{\Delta}\tilde{w} + \frac{mL^4}{DT^2}\ddot{\tilde{w}} = \frac{P_0L^3}{D}\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}). \qquad (18.94)$$

Граничные и начальные условия сохраняют свой вид с заменой только входящих в них величин на безразмерные. Положим для упрощения критериев $L = \delta$, тогда

$$\frac{P_0L^3}{D} = \frac{P_0}{E} 12(1-\sigma^2); \qquad (18.95)$$

$$\frac{mL^4}{DT^2} = \frac{\rho\delta^2}{ET^2} 12(1-\sigma^2). \qquad (18.96)$$

Коэффициент Пуассона входит в (18.90), (18.92) и (18.95) в разных степенях и в разных сочетаниях с относительными величинами. Следовательно, при моделировании необходимо, чтобы коэффициент Пуассона материалов модели и натуры был одинаков: $\sigma = \text{idem}$. При этом условии критерий (18.95) может быть записан просто

$$\frac{P_0}{E} = \text{idem}, \qquad (18.97)$$

т. е. интенсивность нагрузки должна изменяться пропорционально модулю упругости, а критерий (18.96)

$$K = \frac{ET^2}{\rho\delta^2} = \text{idem} \qquad (18.98)$$

или

$$T = K\delta \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \qquad (18.99)$$

т. е. масштаб времени должен изменяться пропорционально линейному размеру и обратно пропорционально отношению скоростей распространения упругих волн в материалах модели и оригинала.

К указанным трем правилам моделирования необходимо добавить обычные правила: должно быть выдержано геометрическое подобие и подобие граничных и начальных условий. При этом:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{E\tilde{z}}{1-\sigma^2}\left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{x}^2} + \sigma\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{y}^2}\right); \\ Y_y &= -\frac{E\tilde{z}}{1-\sigma^2}\left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{y}^2} + \sigma\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{x}^2}\right); \\ Y_x &= -\frac{E\tilde{z}}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{x}\,\partial\tilde{y}}, \end{aligned}\right\} \qquad (18.100)$$

где X_x, Y_y и $Y_x = X_y$ — компоненты напряжений, т. е. напряжения не зависят от масштаба модели и изменяются пропорционально модулю упругости. Прогибы пропорциональны линейному масштабу, а относительные удлинения волокон и углы поворота одинаковы на модели и в натуре. Не приводя здесь вывода, отметим, что указанные правила подобия могут быть использованы для моделирования тонких оболочек малого подъема — цилиндрических и двоякой кривизны, при условии, что либо нормальные силы в оболочке много меньше критических, либо оболочка и оригинал выполнены из одинакового материала (см. также заключительное замечание и п. 18.3).

18.5. Моделирование твердых деформируемых тел

Моделирование применяется для исследования колебаний или изучения распространения волн в массивных телах, имеющих сложную конфигурацию или составленных из разнородных материалов при различных граничных условиях и сложных воздействиях.

Рассмотрим здесь только уравнения линейной динамической теории упругости, выписав:

одно из уравнений Ляме

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\Delta w + Z \qquad (18.101)$$

одно из условий на поверхности

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)l + \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)m + \left(\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)n = Z_\nu, \qquad (18.102)$$

и одно из выражений, связывающих деформации с напряжениями

$$e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{X_y}{2\mu}, \qquad 18.103)$$

и имел в виду, что уравнения неразрывности имеют тождественный вид при любом выборе масштабов.

В (18.101) — (18.103) приняты следующие обозначения:

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} \text{ постоянные Ляме,} \qquad (18.104)$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \text{ — объемная деформация;}$$

l, m, n — направляющие косинусы углов между нормалью ν к поверхности тела и осями координат x, y, z соответственно; Z — проекция объемных сил на ось z; $Z\nu$ — проекция на ось z поверхностных сил, действующих на площадке с нормалью ν; e_{xy} и X_y — компоненты деформации и напряжения в направлении оси x по площадке, нормальной к оси y. Остальные обозначения такие же, как и выше.

Подставляя для определенности

$$Z = \rho g + \rho \ddot{w}_0. \qquad (18.105)$$

и приводя (18.101) к безразмерному виду, получим критерий подобия

$$\frac{\lambda}{\mu} = \text{idem или } \sigma = \text{idem}. \qquad (18.106)$$

Далее с учетом (18.104) получаем:

$$K^2 = \frac{ET^2}{\rho L^2} = \text{idem или } T = KL\sqrt{\frac{\rho}{E}}; \qquad (18.107)$$

$$\text{Fr} = \frac{gT^2}{L} = \text{idem или } \frac{g\rho L}{E} = \text{idem}; \qquad (18.108)$$

$$\frac{\ddot{w}_0 T^2}{L} = \text{idem или } \frac{\ddot{W}_0 \rho L}{E} = \text{idem}. \qquad (18.109)$$

Приводя (18.102) и аналогичные уравнения на поверхности к безразмерному виду, получим с учетом (18.104):

$$\frac{X_\nu}{E} = \frac{Y_\nu}{E} = \frac{Z_\nu}{E} = \text{idem}. \qquad (18.110)$$

Наконец, если упругое тело состоит из разнородных материалов, то, выписывая условия совместности деформаций и равновесия элементов на границе раздела двух сред с использованием равенств типа (18.103), получим (подстрочные индексы относятся к материалам по разную сторону от границы):

$$\frac{E_1}{E_2} = \text{idem}, \qquad (18.111)$$

а с учетом того, что в (18.107) масштабы L и T постоянны во всех областях модели,

$$\sqrt{\frac{E_1\rho_2}{\rho_1 E_2}} = \text{idem},$$

т. е. с учетом (18.111)

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \text{idem}. \qquad (18.112)$$

Вообще говоря, существует принципиальная возможность создания модели, удовлетворяющей одновременно критерию Фруда и остальным критериям. Для этого необходимо «только», чтобы отношение скоростей волн сжатия в материалах модели и оригинала было пропорционально корню из линейного масштаба, т. е.

$$\frac{E}{\rho L} = \text{idem}. \tag{18.113}$$

Однако практически проблема создания материалов, которые позволяли бы широко варьировать модулями упругости при сохранении неизменным коэффициента Пуассона, до настоящего времени не решена. Поэтому сформулируем правило моделирования без учета критерия Фруда.

Для обеспечения подобия явлений в модели линейно-деформируемого упругого тела и в оригинале необходимо и достаточно обеспечить геометрическое подобие, подобие условий на поверхности (18.110) (имея в виду, что если на поверхности заданы перемещения или деформации, то их подобие входит в условия геометрического подобия) и начальных условий, равенство коэффициентов Пуассона материалов модели и оригинала, изменение масштаба времени пропорционально линейному масштабу и обратно пропорционально отношению скоростей распространения волн сжатия в материалах модели и натуры, сохранение отношения между модулями упругости и плотностями разнородных материалов согласно (18.111) и (18.112) и, наконец, подобие заданных ускорений согласно (18.109), если движение тела происходит в неинерциальной системе координат.

О моделировании твердых деформируемых тел на основе аффинного подобия и при различных характеристиках материалов см. [10, 17, 27, 36] (см. также заключительное замечание к п. 18.3).

18.6. Техника моделирования

К технике моделирования относится:

1) выбор материалов для модели;

2) технология изготовления моделей и соответствующее оборудование;

3) методы, приборы и оборудование для создания на модели исследуемых режимов;

4) методы и приборы для измерения величин, характеризующих изучаемое явление;

5) методы и приборы для механизации и автоматизации обработки результатов измерения.

Модельные материалы выбираются в процессе проектирования модели одновременно с выбором масштабов. При этом необходимо учитывать и остальные перечисленные вопросы техники моделирования, так как нередко приходится возвращаться к этому начальному вопросу проектирования, если оказывается, что на модели, размеры и материалы которой полностью отвечают условиям подобия, не удастся осуществить необходимые режимы, например возбудить ее колебания с требуемыми частотами и амплитудами из-за отсутствия соответствующих возбудителей, либо не удастся измерить величины, характеризующие изучаемое явление, из-за отсутствия соответствующих методов и приборов.

В табл. 18.2 приводятся некоторые механические характеристики наиболее распространенных материалов, используемых для моделирования.

Эта таблица предназначена для первоначальной ориентации. Перед изготовлением модели необходимо на специальных установках определять механические характеристики материалов и соответственно уточнять размеры модели, условия эксперимента, получаемые результаты.

Технология изготовления моделей, методы обработки материалов и соответствующее оборудование для этой цели описаны в руководствах и курсах по технологии материалов. Никаких существенных особенностей, связанных с моделированием, в этой технологии нет.

Таблица 18.2

Механические характеристики материалов для моделирования

Материал	Статический модуль упругости E, кгс/см²	Коэффициент Пуассона σ	Плотность ρ, г/см³	Скорость распространения волн сжатия $a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ м/сек	Коэффициент затухания γ	Предел упругости в кгс/см²	Предел прочности в кгс/см²
Бетон	$(1,4\div4)10^5$	0,16—0,18	1,8—2,4	2800—4100	0,05—0,10	30—300	50—750
Песчано-цементный раствор	$(1,5\div2)10^5$	0,16—0,18	1,2—2,2	3000—3500	—	10—150	25—500
Гипс	$(2\div5)10^5$	0,22	1,2—1,8	3200—5000	—	—	40—60
Сталь (материал)	$(1,5\div2,1)10^6$	0,28—0,30	7,5—7,9	4500—5100	0,015	$(2,2\div4,2)10^3$	$(3—6)10^3$
Стальные конструкции из проката	$(1,9\div2,1)10^6$	0,29	7,8	5000—5100	—	—	—
Алюминиевые сплавы	$(0,7\div0,75)10^6$	0,33	2,7—2,8	~5100	0,001	~3500	~5000
Магниевые сплавы	$0,45\cdot10^6$	0,26	1,7—1,8	~5100	—	~2100	~2800
Титановые »	$(1\div1,1)10^6$	0,33	4,5	4700—4900	—	~5200	~7000
Медь	$(1\div1,3)10^6$	0,34	8,9	3400—3800	0,002	—	—
Латунь	$(0,8\div1,5)10^6$	0,32—0,42	8,3—8,9	3100—4100	—	—	—
Бакелит	$(3\div4)10^4$	0,30—0,36	1,27—1,40	1500—1700	—	~500	~800
Органическое стекло *	$(2,8\div4,2)10^4$	0,50	1,18	1500—1990	0,05—0,10	~550	—
Целлулоид *	$(1\div2,8)10^4$	0,33—0,38	1,35—1,45	850—1400	0,08—0,12	200—400	300—500
Эпоксидные смолы при 20° С	$(1\div4)10^4$	0,35—0,50	1,9	700—1450	—	50—300	100—800
Композиции на основе эпоксидных смол	$(0,5\div5)10^4$	0,32—0,50	1,2—2,9	500—1500	—	—	—
Резина (30 по дурометру)	9	0,50	0,95	30	0,03	—	—
Резина * (60 по дурометру)	26	0,50	0,95	52	0,17	—	—
Композиции на основе резины	5—50	0,50	0,9—2,5	14—55	0,05—0,15	—	—
Вальцмасса	0,5—10	0,4—0,50	1,23—1,35	—	—	0,2—1,4	1—5

* На частоте 100 гц динамический модуль упругости возрастает для оргстекла ~ на 40%, для целлулоида ~ на 65% и для резины с твердостью 60 по дурометру ~ на 80%.

Методы, приборы и оборудование для создания на модели исследуемых режимов, для измерения величин, характеризующих изучаемое явление и для механизации обработки результатов применительно к моделям сооружений, испытываемым на динамические воздействия, изложены в разделе 17 справочника.

Особое положение занимает техника моделирования, базирующаяся на методах динамической фотоупругости. Обзор этой техники и примеры ее использования приведены в [22, 23].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверкиев А. Г. Новый метод гидравлических модельных исследований. Изв. ВНИИГ, т. 47, 1952.

2. Борконский Р. И., Мальцев В. И. Моделирование колебаний стержневых конструкций. Научно-техн. информ. бюлл. Ленингр. политехн. ин-та, № 12, 1957.

3. Васильков Б. С., Милейковский И. Е. Экспериментально-теоретическое исследование сборной железобетонной оболочки. В сб.: «Экспериментальные и теоретические исследования по железобетонным оболочкам». Госстройиздат, 1959.

4. Волынский Б. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. Физматгиз, 1960.

5. Гнамичава С. Р. Исследование колебаний арок на моделях. Вестник ВИА, 64. Сборник по строительной механике, 1952.

6. Геронимус В. Б. Исторический очерк развития теории прочностного подобия и моделирования. Труды Новосиб. ин-та инж. железнодор. транспорта. Строительная механика, мосты, конструкции, вып. XXIV. Новосибирск, 1961.

7. Геронимус В. Б. Нелинейное подобие и его применение к моделированию. В том же сборнике.

8. Геммерлинг А. В., Трофимов В. И. Испытание моделей каркаса здания Дворца культуры и науки в Варшаве. «Строительная промышленность», 1954, № 2.

9. Гутенмахер Л. И. Электрические модели. Изд-во АН СССР, 1949.

10. Завриев К. С. и др. Основы теории сейсмостойкости зданий и сооружений. Стройиздат, 1970.

11. Керопян К. К., Чеголин П. М. Электрическое моделирование в строительной механике. Госстройиздат, 1963.

12. Кирпичев М. В. Теория подобия. Изд-во АН СССР, 1953.

13. Кобринский И. Е. Математические машины непрерывного действия. Машгиз, 1957.

14. Коренев Б. Г., Пикулев Н. А., Шейнин И. С. О методах уменьшения вибрации при прохождении через резонанс во время пуска и остановки оборудования. В сб.: «Колебания зданий и сооружений». Стройиздат, 1963.

15. Лужин О. В. Конференция по электрическому моделированию задач строительной механики, сопротивления материалов и теории упругости. (Ростов-на-Дону, январь — февраль, 1962). «Строительная механика и расчет сооружений», 1962, № 2.

16. Лукьянов В. С. Применение гидравлических аналогий в научных исследованиях и расчетах. «Техника железных дорог», 1946, № 7.

17. Назаров А. Г. О механическом подобии твердых деформируемых тел. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1965.

18. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Книга II, отдел 7, предложения 32, 33. Русский перевод с латинского с примечаниями и пояснениями А. Н. Крылова. В кн.: Собрание трудов академика А. Н. Крылова, т. VII. М. — Л., 1936.

19. Ольсон Г. Динамические аналогии. ИЛ, 1947.

20. Питлюк Д. А. Расчет строительных конструкций на основе моделирования. Л. — М., Стройиздат, 1965.

21. Покровский Г. И., Федоров И. С. Центробежное моделирование в строительном деле. Стройиздат, 1968.

22. Поляризационный оптический метод исследования напряжений. Труды 5-й Всесоюзной конференции 23—27 июня 1964 г. Изд-во ЛГУ, 1966.

23. Пригоровский Н. И. и др. Напряжения и деформации в деталях и узлах машин. Машгиз, 1963.

24. Пухов Г. Е., Васильев В. В., Степанов А. Е., Токарева О. Н. Электрическое моделирование задач строительной механики, Киев, Изд-во АН УССР, 1963.

25. Рабинович И. М. Механический расчет. Справочник инженера-проектировщика промсооружений, т. II (расчетно-теоретический). Стройиздат, 1934.

26. Розанов Н. С. Некоторые детали установки электроаналогий и применении к решению задач теории упругости. Изв. Института гидротехники, № 24, 1939.

27. Руководство по исследованию механических свойств строительных конструкций на моделях. Ленинакан, АН АрмССР, Ин-т геофизики и инж. сейсмологии, 1966.

28. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. «Наука», 1965.

29. Сильницкий Ю. И., Ковалев М. А. Экспериментальное изучение действия ветра на сквозные пролетные строения мостов. Сборник ЛИИЖТа, вып. 164. Трансжелдориздат, 1959.

30. Телишевский Б. Е., Быковский В. А. Вибрационная платформа с программным фотоэлектрическим управлением. Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 1949.

31. Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. Изд-во физ. мат. лит., 1959.

32. Чудновский В. Г. Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем. Изд-во АН УССР, 1952.
33. Шейнин И. С. Колебания пластинки в водоеме с податливым дном (плоская задача). Известия ВНИИГ, т. 88, 1968.
34. Шейнин И. С. К расчету на аналоговых машинах колебательных систем, проходящих через резонанс. «Строительная механика и расчет сооружений», 1961, № 5.
35. Шилейко И. Г. Опытное изучение действия ветровой нагрузки на мостовые формы. Труды МИИТ, вып. 69. 1946.
36. Эйгенсон Л. С. Моделирование. «Наука», 1952.
37. Этерман И. М, Математические машины непрерывного действия. Машгиз, 1958.
38. Sankev A. Plastic models for vibration analysis. Proc. Experim. Stress Analysis, vol. XI, № 2, 1954.
39. Shock and vibration handbook. Mc Grow—Hill, New York, 1961.
40. Wilbur J. B., Norris C. H. Structural model analysis. Handbook of experimental stress analysis, ed. by M. Hetenyi, N. Y., 1950.

Справочник по динамике сооружений

* * *

Стройиздат

Москва, К-31, Кузнецкий мост, 9

* * *

Редактор издательства *И. С. Бородина*
Технический редактор *Н. Г. Бочкова*
Корректоры *Е. Н. Кудрявцева, Л. П. Бирюкова*

Сдано в набор 6/XII 1971 г. Подписано к печати 6/VII 1972 г.
Т-10718 Бумага 60×90[1]/16 д.л.—16 бум. л. 32 печ. л. (уч.-изд. 37,42 л.)
Тираж 20 000 экз. Изд. № АХ246 Зак. № 1354 Цена 2 руб. 10 коп.

Владимирская типография Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР

Гор. Владимир, ул. Победы, д. 18-б.